COGNOME | | | | | | | | | | | | | | | |

NOME | | | | | | | | | | | | | | | |

MATRICOLA VR | | | | | | |

ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 12/02/2024

II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$ e si dica se comunque la tesi è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se il sistema ha soluzioni, in base al teorema di Rouché-Capelli. In caso affermativo si trovino tutte le soluzioni. Si risolva poi il sistema omogeneo associato e si indichino la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si trovi l'unico punto stazionario. Si scriva la restrizione all'asse y, dove possibile, e si trovino i punti sull'asse dove la funzione si annulla.

QUESITO 1. Quali sono le ipotesi del teorema degli zeri?

QUESITO 2. Si scriva uno dei "confronti standard" dei limiti.

QUESITO 3. Quale relazione sussiste tra un integrale di Riemann del tipo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e una primitiva di $f(x)$?

QUESITO 4. Si dica quando tre vettori v^1, v^2, v^3 sono linearmente indipendenti.

QUESITO 5. Dare una condizione sufficiente affinché un punto stazionario (x_0, y_0) sia punto di minimo per una funzione di due variabili $f(x, y)$.

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	VR

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 12/02/2024
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 & x \le 0 \\ \frac{1}{x+1} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 1]$ e si dica se comunque la tesi è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare T rappresentata da A. Si dica se T è invertibile. Si trovi la dimensione dell'immagine di T e si indichi una sua base. Si trovino infine tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ in cui T si annulla.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = xy + \ln(-xy)$$

si determini e si disegni il suo dominio e si dica, motivando, se è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si trovino tutti i punti stazionari, provando che sono infiniti. Si verifichi che la funzione è costante su tutti i punti stazionari. Si dica infine se nel punto stazionario $(-1, 1)$ le condizioni del 2° ordine sono sufficienti per stabilire la sua natura.

QUESITO 1. Quali sono le ipotesi del teorema degli zeri?

QUESITO 2. In quali casi si può applicare il teorema di De L'Hôpital per il calcolo dei limiti?

QUESITO 3. Descrivere come avviene il calcolo di un $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

QUESITO 4. Cosa significa fare una combinazione lineare di due vettori v^1, v^2?

QUESITO 5. Dare una condizione sufficiente affinché un punto stazionario (x_0, y_0) sia punto di massimo per una funzione di due variabili $f(x, y)$.