Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2016/17

Alberto Peretti

Settembre 2017

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 07/11/2016

ESERCIZIO 1. Dato il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1\%$, determinare:

(a) l'equivalente tasso di interesse trimestrale $i_{1/4}$ nel R.I.C.;

(b) l'equivalente tasso di sconto annuo d nel R.I.S.;

(c) l'equivalente tasso di interesse semestrale $i_{1/2}$ nel R.S.C.;

(d) l'equivalente intensità istantanea di interesse semestrale $\delta_{1/2}$ nel R.I.C..

✎

(a) Possiamo convertire direttamente il tasso di interesse mensile nel tasso trimestrale, oppure convertire prima quello mensile in annuale e successivamente nel trimestrale. Seguendo la via diretta si ha

$$i_{1/4} = (1 + i_{1/12})^3 - 1 = (1 + 0.01)^3 - 1 = 0.030301.$$

(b) Dato che nel R.I.S. si convertono facilmente i tassi di interesse conviene seguire le trasformazioni: $i_{1/12} \to i \to d$ e quindi

$$i = 12 i_{1/12} = 12 \cdot 0.01 = 0.12 \quad ; \quad d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.12}{1+0.12} = 0.107142857.$$

(c) Dato che nel R.S.C. si convertono facilmente i tassi di sconto conviene seguire le trasformazioni

$$i_{1/12} \to d_{1/12} \to d_{1/2} \to i_{1/2}$$

e quindi

$$d_{1/12} = \frac{i_{1/12}}{1 + i_{1/12}} = \frac{0.01}{1 + 0.01} = 0.00990099 \quad ; \quad d_{1/2} = 6 d_{1/12} = 6 \cdot 0.00990099 = 0.05940594$$

$$i_{1/2} = \frac{d_{1/2}}{1 - d_{1/2}} = \frac{0.05940594}{1 + 0.05940594} = 0.063157894.$$

(d) Nel R.I.C. le intensità istantanee si convertono in modo lineare e quindi possiamo seguire le trasformazioni: $i_{1/12} \to \delta_{1/12} \to \delta_{1/2}$, oppure direttamente

$$\delta_{1/2} = \ln(1 + i_{1/2}) = \ln[1 + (1 + i_{1/12})^6 - 1] = 6 \ln 1.01 = 0.059701985.$$

ESERCIZIO 2. Il 01/01/2013 sono stati investiti 10 000€ per 3 anni al tasso di interesse annuo $i = 4\%$ nel regime dell'interesse composto. Supponendo che i tassi di variazione dei prezzi siano stati (su base annua): nel 2013 $g_{13} = 0.01$, nel 2014 $g_{14} = 0.03$ e nel 2015 $g_{15} = 0.02$, si determinino:

(a) il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 3 anni (su base annua);

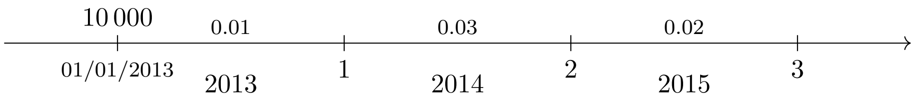
(b) l'importo che dopo 3 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento iniziale;

(c) gli interessi reali prodotti dall'investimento;

(d) il tasso di interesse reale annuo dell'investimento.

Si verifichi infine che quanto ottenuto in (d) può essere calcolato anche in funzione di quanto trovato in (b) e (c).

✎



1. Per determinare il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 3 anni (su base annua) l'equazione è

$$(1+\overline{g})^3 = (1+g_{13})(1+g_{14})(1+g_{15})$$

   da cui

$$\overline{g} = \Big((1+g_{13})(1+g_{14})(1+g_{15})\Big)^{1/3} - 1 = \Big(1.01 \cdot 1.03 \cdot 1.02\Big)^{1/3} - 1 = 0.019967319.$$

2. L'importo, riferito all'istante iniziale, che dopo 3 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento di 10 000€ è dato da

$$C' = 10\,000(1+\overline{g})^3 = 10\,611.06€.$$

3. Gli interessi reali (I_r) prodotti dall'investimento sono dati dalla differenza tra il montante dell'investimento iniziale e l'importo C' appena trovato. Quindi

$$I_r = M_t - C' = 10\,000(1+0.04)^3 - 10\,611.06 = 11\,248.64 - 10\,611.06 = 637.58€.$$

4. Il tasso di interesse reale annuo dell'investimento (i_r), usando la formula, è dato da

$$i_r = \frac{i-\overline{g}}{1+\overline{g}} = \frac{0.04 - 0.019967319}{1+0.019967319} = 0.019640512.$$

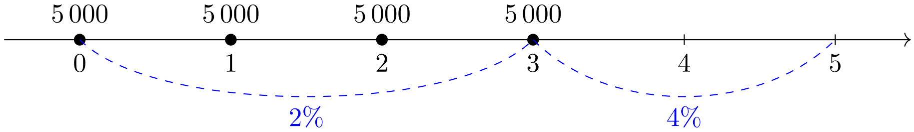
È richiesto infine di verificare che il tasso di interesse reale annuo appena trovato può essere ottenuto anche in funzione di quanto trovato in (b) e (c), e cioè di C' e I_r. Il quoziente

$$\frac{I_r}{C'} = \frac{637.58}{10\,611.06} = 0.060086362$$

è il tasso di interesse reale su base triennale. Convertiamolo in base annua con

$$(1+0.060086362)^{1/3} - 1 = 0.019640512 \quad (= i_r \text{ trovato sopra.})$$

ESERCIZIO 3. Verso in un conto, sul quale ho un tasso a credito $i_1 = 2\%$, 4 importi annuali di 5 000€ ciascuno a partire da subito. Successivamente lascio sul conto quanto accumulato per 2 anni, al tasso $i_2 = 4\%$. Di quanto dispongo sul conto alla fine del 5º anno? Di quanto dovrei incrementare l'importo versato annualmente se volessi un importo finale di valore doppio? E se volessi costituire tale importo (doppio) con 10 versamenti semestrali posticipati di valore costante, a quando dovrebbe ammontare ogni versamento?

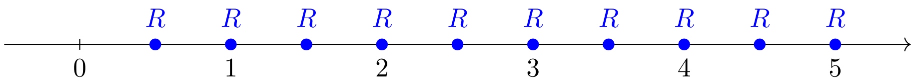


Indicato con V_5 l'ammontare di quanto presente sul conto alla fine del 5º anno, si ha

$$V_5 = 5\,000 \cdot a_{\overline{4}|0.02}(1+0.02)^4 \cdot (1+0.04)^2 = 22\,289.66€.$$

Se voglio un importo di valore doppio ovviamente devo raddoppiare la rata, cioè l'importo versato annualmente (nell'equazione qui sopra i fattori di sconto/capitalizzazione rimangono inalterati) e quindi, per rispondere esattamente alla domanda, dovrò incrementare l'importo versato del 100%.

Veniamo all'ultima domanda: vogliamo costituire un importo pari a $2V_5$ con 10 versamenti semestrali posticipati di valore costante R. Lo schema qui di seguito raffigura la nuova modalità.



L'equazione del valore, scegliendo come istante di valutazione $t = 5$ e indicando per comodità con $0.02_{1/2}$ e $0.04_{1/2}$ gli equivalenti tassi semestrali,[1] è

$$\left(R \cdot a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^3 + R \cdot a_{\overline{4}|0.04_{1/2}}\right) \cdot (1+0.04)^2 = 2V_5$$

da cui si ricava

$$R \cdot \left(a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^3 + a_{\overline{4}|0.04_{1/2}}\right) \cdot (1+0.04)^2 = 2V_5$$

e quindi

$$R = \frac{2V_5}{\left(a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^3 + a_{\overline{4}|0.04_{1/2}}\right) \cdot (1+0.04)^2} = 4\,137.83€.$$

ESERCIZIO 4. Si scriva il piano di ammortamento di un debito di 20 000€ attraverso 4 rate annue con quote capitale costanti posticipate e quote interesse anticipate (ammortamento tedesco). Si assuma un tasso di interesse annuo dell'8%. Si verifichi infine che il debito iniziale è uguale al valore attuale delle rate versate.

✎

Occorre anzitutto ricordare che nel piano di ammortamento tedesco le quote capitale sono costanti e si ottengono semplicemente dividendo il debito iniziale per il numero di rate. Pertanto nel nostro caso abbiamo $C_k = C = 20\,000/4 = 5\,000€$. Inoltre le quote interessi vengono pagate con modalità anticipata in base al debito residuo. La modalità anticipata porta a dover usare il tasso di sconto anziché il tasso di interesse: si ha quindi $I_k = d \cdot D_k$.

Il piano di ammortamento è allora il seguente:

t	$R_k = C + I_k$	C	I_k	D_k
0	1 481.48	0	1 481.48	20 000
1	6 111.11	5 000	1 111.11	15 000
2	5 740.74	5 000	740.74	10 000
3	5 370.37	5 000	370.37	5 000
4	5 000	5 000	0	0

Il valore attuale delle rate versate è

$$V_0 = 1\,481.48 + \frac{6\,111.11}{1.08} + \frac{5\,740.74}{1.08^2} + \frac{5\,370.37}{1.08^3} + \frac{5\,000}{1.08^4} = 20\,000€.$$

[1]Si ha

$$0.02_{1/2} = (1+0.02)^{1/2} - 1 = 0.009950493 \qquad \text{e} \qquad 0.04_{1/2} = (1+0.04)^{1/2} - 1 = 0.019803902.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/01/2017

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale $F = 100$;
- scadenza tra 6 anni;
- rimborso alla pari $C = 100$;
- cedole annue con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_0 = 98$.

Si determini una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm. Si effettui il calcolo senza la tassazione e successivamente considerando la tassazione. Nel secondo caso si dica infine se l'approssimazione trovata stima per eccesso o per difetto il vero tasso di rendimento a scadenza.

✎

Ponendo $F = 100$, $n = 6$, $C = 100$, $r = 0.03$, $P_0 = 98$, e quindi senza considerare la tassazione, la formula per una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza fornisce

$$ytm_0^{\text{NOTAX}} = \frac{rF + (C - P_0)/n}{(C + 2P_0)/3} = \frac{0.03 \cdot 100 + (100 - 98)/6}{(100 + 2 \cdot 98)/3} = 0.033783783.$$

Considerando la tassazione e indicando con γ l'aliquota del 12.50%, cioè $\gamma = 0.125$, la cedola netta è

$$\text{Ced} = rF(1 - \gamma) = 3 \cdot 0.875 = 2.625.$$

La tassazione colpisce anche il capitale in quanto il valore di rimborso $C = 100$ supera il prezzo di acquisto $P = 98$. Pertanto il rimborso netto è

$$\text{Cn} = 100 - 2 \cdot 0.125 = 99.75.$$

La formula per la prima approssimazione fornisce

$$ytm_0^{\text{TAX}} = \frac{\text{Ced} + (\text{Cn} - P_0)/n}{(\text{Cn} + 2P_0)/3} = \frac{2.625 + (99.75 - 98)/6}{(99.75 + 2 \cdot 98)/3} = 0.029585798.$$

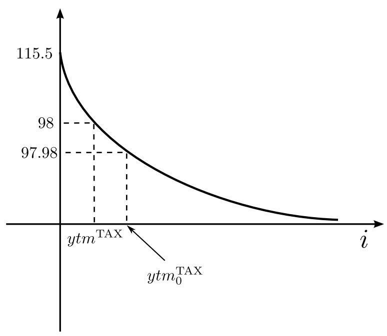
L'ultima domanda chiede di dire se, con la tassazione, l'approssimazione trovata stima per eccesso o per difetto il vero tasso di rendimento a scadenza. L'equazione del valore è

$$98 = \text{Ced} \cdot a_{\overline{6}|ytm} + \text{Cn}(1 + ytm)^{-6}.$$

Come sempre, sfruttando il fatto che il termine di destra è una funzione decrescente del tasso, possiamo utilizzare come tasso di prova quello trovato con l'approssimazione, e cioè $ytm_0^{\text{TAX}} = 0.029585798$. Si ha

$$\text{Ced} \cdot a_{\overline{6}|ytm_0^{\text{TAX}}} + \text{Cn}(1 + ytm_0^{\text{TAX}})^{-6} = 97.98 < 98.$$

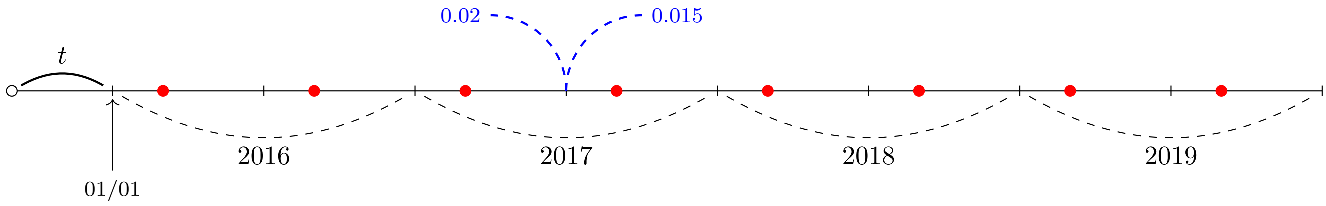
Quindi il vero tasso di rendimento a scadenza è minore dell'approssimazione trovata.



ESERCIZIO 2. Un B.T.P. decennale con scadenza il 01/09/2019 paga cedole il 01/03 e il 01/09 al tasso cedolare $r = 3\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 01/01/2016 presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 3.5\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s in quella data. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016, di tenerlo fino alla scadenza e di aver dato disposizione di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito sarà del 2% fino al 30/06/2017 e successivamente del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Pur trattandosi di un rendimento effettivo, suggerisco di non considerare la tassazione per evitare il caso più laborioso.)

✎



La rappresentazione qui sopra mostra le caratteristiche del B.T.P.

Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.03}{2} \cdot 100 = 1.5.$$

Il calcolo del numero di cedole: in tutto sono $n = 8$. Il tempo t tra la cedola precedente e l'acquisto: sono 4 mesi interi.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.035^{1/2} - 1 = 0.017349497.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1.5\text{a}_{\overline{8}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{4/6} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-8+4/6} = 99.39.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{4}{6} = 1$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 99.39 - 1 = 98.39.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo con il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/09/2019, data di scadenza del titolo.

Se tenessimo conto della tassazione ci troveremmo nella situazione molto laboriosa che si presenta quando si deve trovare un prezzo tel quel sotto la pari. In questo caso infatti il prezzo tel quel dipende dal valore netto di rimborso (c'è tassazione sul capitale) e questo dipende a sua volta dal prezzo tel quel. C'è una formula, ma la vogliamo evitare.

Quindi non consideriamo nemmeno ora la tassazione, come suggerito.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{3+8/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 30/06/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 3 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Scelgo di operare per le prime 3 cedole con il calcolo diretto e per le altre 5 con "a figurato".

Serve il tasso semestrale equivalente

$$i^{(2)}_{1/2} = 0.007472083.$$

Si ha

$$M_1 = 1.5 \cdot \left(1.02 + 1.02^{1/2} + 1\right) \cdot 1.02^{4/12} \cdot 1.015^{2+2/12} = 4.725015895$$

e

$$M_2 = 1.5 \cdot \text{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot (1 + i^{(2)}_{1/2})^5 = 7.612921873.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{3+8/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(3+8/12)} - 1 = 0.033962197.$$

ESERCIZIO 3. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 4 000€ può avvenire o con pagamento immediato, con lo sconto del 3%, oppure con un finanziamento di 2 000€ da restituire in 15 rate mensili costanti (posticipate) di 150€. Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 20€.

Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 12%.

Si calcoli poi una prima approssimazione del T.A.N. (Tasso Annuo Nominale) e del T.A.E.G. (Tasso Annuo Effettivo Globale) dell'operazione. Si dia infine anche una stima del tasso effettivo di costo i_{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento, determinando se tale tasso è maggiore o minore del 15%.

✎

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A = -4\,000(1 - 0.03) = -3\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 4 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 2 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 20€, e le 15 rate mensili posticipate di 150€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.12_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 12%)

$$\text{REA}_B = -2\,000 - 20 - 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|0.12_{1/12}} = -4\,108.01.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$4\,000 = 2\,000 + 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 2\,000 = 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\text{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(15 - 2\,000/150)}{16 \cdot 2\,000/150} = 0.015625.$$

Quello trovato è un tasso mensile che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\text{T.A.N.}_0 = 0.20448277$.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$4\,000 = 2\,000 + 20 + 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 1\,980 = 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(15 - 1\,980/150)}{16 \cdot 1\,980/150} = 0.017045454$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\text{T.A.E.G.}_0 = 0.224854085$.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$3\,880 = 2\,000 + 20 + 150 \cdot \text{a}_{\overline{15}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 15% ($0.15_{1/12} = 0.011714916$) è

$$4\,072.42 > 3\,880$$

e quindi il tasso effettivo è maggiore del 15%.[2]

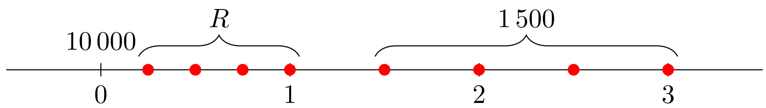
[2]Faccio notare che è forte la tentazione di dire "se il T.A.E.G. è già lui maggiore del 15% allora certamente anche il tasso effettivo lo è". Concordo che sia molto probabile, ma faccio notare che la valutazione del T.A.E.G. è approssimata e non possiamo escludere che sia una pessima approssimazione, molto più in eccesso del valore vero.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/01/2017

ESERCIZIO 1. Posso restituire un prestito di 10 000€ in 3 anni, il primo anno mediante rate trimestrali costanti posticipate e nei restanti due anni mediante rate semestrali costanti posticipate di 1 500€ . Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 10\%$, si determini l'ammontare della rata trimestrale.

Nell'ipotesi invece di poter restituire metà dell'importo tra un anno e il resto con successive rate semestrali posticipate di 500€, con quante rate intere e quale residuo, allo stesso tasso, posso restituire il prestito?

✎



Servono i tassi trimestrale e semestrale equivalenti al tasso annuo i del 10%. Si ha

$$i_{1/4} = 1.1^{1/4} - 1 = 0.024113689 \quad \text{e} \quad i_{1/2} = 1.1^{1/2} - 1 = 0.048808848.$$

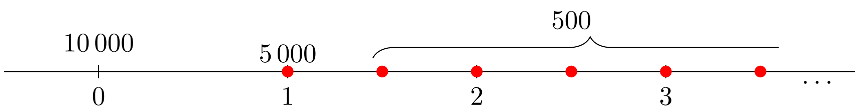
L'equazione che esprime l'equivalenza degli importi è

$$10\,000 = R \cdot a_{\overline{4}|i_{1/4}} + 1\,500 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}}(1+i)^{-1},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{1}{a_{\overline{4}|i_{1/4}}}\Big(10\,000 - 1\,500 a_{\overline{4}|i_{1/2}}(1+i)^{-1}\Big) = 1\,366.36€.$$

Ecco ora lo schema della seconda modalità.



Per poter restituire il debito occorre che

$$5\,000(1+i)^{-1} + 500 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/2}}(1+i)^{-1} \geq 10\,000$$

che equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/2}} \geq \frac{10\,000 - 5\,000(1+i)^{-1}}{500(1+i)^{-1}} \quad \Big(= A = 12\Big).$$

La disequazione equivale a sua volta alle

$$\frac{1-(1+i_{1/2})^{-n}}{i_{1/2}} \geq A \quad \Leftrightarrow \quad 1-(1+i_{1/2})^{-n} \geq i_{1/2}A \quad \Leftrightarrow \quad (1+i_{1/2})^{-n} \leq 1 - i_{1/2}A$$

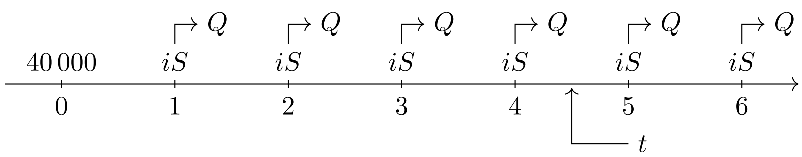
e ancora, applicando i logaritmi,

$$-n\ln(1+i_{1/2}) \leq \ln(1-i_{1/2}A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-i_{1/2}A)}{\ln(1+i_{1/2})} = 18.49.$$

Questo dice che con 19 rate intere si restituisce più del dovuto e pertanto bastano $n = 18$ rate intere più un residuo. Valutiamo il residuo (supponiamo di versarlo unitamente all'ultima rata):

$$10\,000(1+i)^{10} - \Big(5\,000 + 500 \cdot a_{\overline{18}|i_{1/2}}\Big)(1+i)^9 = 236.81€.$$

ESERCIZIO 2. Un prestito di 40 000€ viene restituito in 6 rate annue posticipate con un ammortamento americano a due tassi. Per quanto riguarda gli interessi, pagati anch'essi in via posticipata, il tasso di remunerazione concordato è del 5%. Per la restituzione del capitale, la banca presso la quale vengono depositate le quote di accumulazione offre un tasso del 3%. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 4 anni e mezzo. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento e si dica se questo tasso è maggiore o minore del 6%.



Indicando con $S = 40\,000$€ l'ammontare del prestito e con $i = 0.05$ il tasso di remunerazione, la quota interessi I è costante ed è uguale agli interessi annui sull'intero debito. Quindi si ha

$$I = iS = 0.05 \cdot 40\,000 = 2\,000€.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa costante, e con $i^\star = 0.03$ il tasso di accumulazione, Q si determina in modo che il montante delle 6 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi essa deve soddisfare l'equazione

$$Q\mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star}(1 + i^\star)^6 = S,$$

da cui

$$Q = \frac{S}{\mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star}(1 + i^\star)^6} = \frac{40\,000}{\mathrm{a}_{\overline{6}|0.03}(1 + 0.03)^6} = 6\,183.90€.$$

Pertanto la rata di ammortamento (anch'essa costante) è

$$R = Q + I = 6\,183.90 + 2\,000 = 8\,183.90€.$$

Il fondo di accumulazione F_t dopo 4 anni e mezzo è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 4 anni e mezzo, cioè all'epoca $t = 4.5$. Dato che all'epoca t sono state versate 4 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q\mathrm{a}_{\overline{4}|i^\star}(1 + i^\star)^t = 6\,183.90 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.03}(1 + 0.03)^{4.5} = 26\,256.33€.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo i_{eff} dell'ammortamento è

$$S = R\mathrm{a}_{\overline{6}|i_{\text{eff}}} \quad \text{cioè} \quad 40\,000 = 8\,183.90 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i_{\text{eff}}}.$$

Per stabilire se il tasso effettivo è maggiore o minore del 6% basta calcolare qual è il valore attuale delle 6 rate dell'ammortamento al tasso del 6% e confrontarlo con 40 000. Si trova

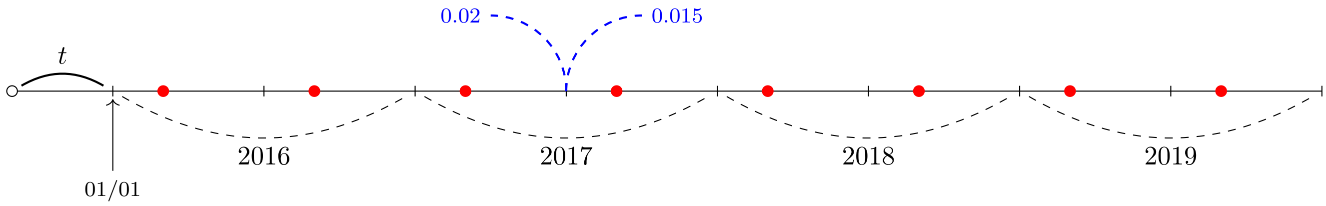
$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.06} = 8\,183.90\mathrm{a}_{\overline{6}|0.06} = 40\,242.89€.$$

Dato che il tasso effettivo sconta più del tasso del 6%, significa che il tasso effettivo è maggiore del 6%.

ESERCIZIO 3. Un B.T.P. decennale con scadenza il 01/09/2019 paga cedole il 01/03 e il 01/09 al tasso cedolare $r = 3\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 01/01/2016 presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 3.5\%$. Si determini il prezzo tel quel P_{tq} e il corso secco P_s in quella data. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 01/01/2016, di tenerlo fino alla scadenza e di aver dato disposizione di reinvestire le cedole su un conto corrente, dove il tasso di interesse a credito sarà del 2% fino al 30/06/2017 e successivamente del 1.5%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Pur trattandosi di un rendimento effettivo, suggerisco di non considerare la tassazione per evitare il caso più laborioso.)

La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.03}{2} \cdot 100 = 1.5.$$

Il calcolo del numero di cedole: in tutto sono $n = 8$. Il tempo t tra la cedola precedente e l'acquisto: sono 4 mesi interi.

Serve anche convertire il tasso di rendimento a scadenza nell'equivalente tasso semestrale. Si ha

$$ytm_{1/2} = (1 + ytm)^{1/2} - 1 = 1.035^{1/2} - 1 = 0.017349497.$$

Il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = 1.5\mathrm{a}_{\overline{8}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{4/6} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-8+4/6} = 99.39.$$

Il rateo è dato da

$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{4}{6} = 1$$

e quindi il corso secco P_s è

$$P_s = P_{\text{tq}} - \text{rateo} = 99.39 - 1 = 98.39.$$

Passiamo al calcolo del rendimento effettivo a seguito del reinvestimento delle cedole. Dobbiamo uguagliare il valore dell'importo investito per l'acquisto del titolo con il valore cumulato degli importi incassati (e reinvestiti) dalle cedole e dal rimborso finale. Riportiamo gli importi all'istante finale, cioè alla data del 01/09/2019, data di scadenza del titolo.

Se tenessimo conto della tassazione ci troveremmo nella situazione molto laboriosa che si presenta quando si deve trovare un prezzo tel quel sotto la pari. In questo caso infatti il prezzo tel quel dipende dal valore netto di rimborso (c'è tassazione sul capitale) e questo dipende a sua volta dal prezzo tel quel. C'è una formula, ma la vogliamo evitare.

Quindi non consideriamo nemmeno ora la tassazione, come suggerito.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{3+8/12}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 30/06/2017, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 3 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 5 cedole al tasso $i^{(2)} = 1.5\%$ (montante M_2). Scelgo di operare per le prime 3 cedole con il calcolo diretto e per le altre 5 con "a figurato".

Serve il tasso semestrale equivalente

$$i^{(2)}_{1/2} = 0.007472083.$$

Si ha

$$M_1 = 1.5 \cdot \big(1.02 + 1.02^{1/2} + 1\big) \cdot 1.02^{4/12} \cdot 1.015^{2+2/12} = 4.725015895$$

e

$$M_2 = 1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|i^{(2)}_{1/2}} \cdot (1 + i^{(2)}_{1/2})^5 = 7.612921873.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{3+8/12} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(3+8/12)} - 1 = 0.033962197.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri il progetto di investimento rappresentato da

$$\begin{array}{cccc} -100 & 50 & & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Si determinino gli importi R che assicurano un TIR del progetto maggiore del 5%. Si dica se con un importo $R = 70$ e un tasso del 5% il progetto

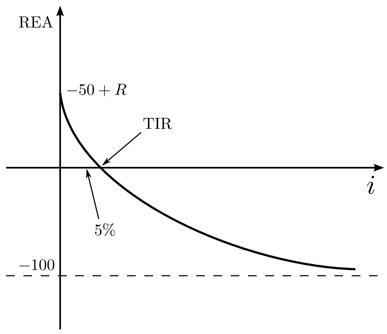
$$\begin{array}{cccc} -100 & R & & 50 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

è preferibile al progetto iniziale in base al REA. Il risultato trovato vale per ogni R e per qualunque tasso?

✎

Il REA del progetto è, in funzione del tasso i,

$$\text{REA}(i) = -100 + \frac{50}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^3}.$$



Si tratta di una funzione decrescente al crescere del tasso. La figura a fianco illustra la situazione. Il tasso per cui il REA si annulla è il TIR. Dalla figura risulta evidente che la condizione necessaria e sufficiente affinché il TIR sia maggiore del 5% è che sia $\text{REA}(0.05) > 0$. Dobbiamo allora risolvere la disequazione

$$-100 + \frac{50}{1.05} + \frac{R}{1.05^3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad R > \left(100 - \frac{50}{1.05}\right) \cdot 1.05^3 \quad \Leftrightarrow \quad R > 60.6375.$$

La seconda domanda chiede di confrontare, in base al REA al tasso del 5%, i due progetti (chiamiamoli A e B)

$$A: \begin{array}{cccc} -100 & 50 & & 70 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad B: \begin{array}{cccc} -100 & 70 & & 50 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Si ha

$$\text{REA}_A(0.05) = -100 + \frac{50}{1.05} + \frac{70}{1.05^3} = 8.0876$$

e

$$\text{REA}_B(0.05) = -100 + \frac{70}{1.05} + \frac{50}{1.05^3} = 9.8587.$$

Trattandosi di progetti di investimento è preferibile B.

L'ultima domanda chiede se B è preferibile ad A per ogni R e per qualunque tasso. Questo si traduce nella disequazione

$$-100 + \frac{R}{1+i} + \frac{50}{(1+i)^3} > -100 + \frac{50}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^3}.$$

Questa equivale a

$$\frac{R-50}{1+i} > \frac{R-50}{(1+i)^3} \quad \Leftrightarrow \quad (R-50)(1+i)^2 > R-50.$$

Ora, se $R > 50$ la disequazione equivale a $(1+i)^2 > 1$, che è vera.

Se $R < 50$ la disequazione equivale a $(1+i)^2 < 1$, che è falsa.

Se $R = 50$ i due REA sono ovviamente uguali.

Quindi B è preferibile ad A se e solo se $R > 50$, qualunque sia il tasso.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/02/2017

ESERCIZIO 1. Si consideri un'obbligazione con le seguenti caratteristiche:
- valore facciale $F = 100$;
- scadenza tra 5 anni;
- rimborso alla pari $C = 100$;
- cedole annue con tasso cedolare $r = 4\%$;
- corso $P = 97$.

Si determini una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm. Si effettui il calcolo senza la tassazione e successivamente considerando la tassazione. Nel secondo caso si dica infine se l'approssimazione trovata stima per eccesso o per difetto il vero tasso di rendimento a scadenza.

✎

L'equazione del valore, senza considerare la tassazione, è

$$97 = 4 \cdot a_{\overline{5}|ytm} + 100(1 + ytm)^{-5}.$$

Viene chiesta una prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza ytm. Ricordo che la formula che fornisce tale prima approssimazione è

$$ytm_0^{\text{NOTAX}} = \frac{rF + (C - P)/n}{(C + 2P)/3} = \frac{4 + (100 - 97)/5}{(100 + 2 \cdot 97)/3} = 0.046938775.$$

Se consideriamo la tassazione bisogna osservare che vengono tassati sia le cedole sia il capitale. Si ha

$$rF(1 - \gamma) = 3.5 \quad \text{e} \quad \mathrm{C_N} = C - (C - P)\gamma = 100 - (100 - 97)\gamma = 99.625.$$

Pertanto con questi nuovi valori la stima del tasso diventa

$$ytm_0^{\text{TAX}} = \frac{3.5 + (99.625 - 97)/5}{(99.625 + 2 \cdot 97)/3} = 0.041123882.$$

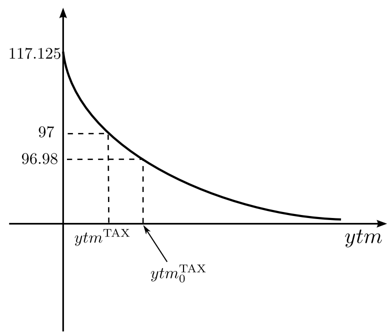
Dobbiamo stabilire ora se l'approssimazione appena trovata stima per eccesso o per difetto il vero tasso di rendimento a scadenza. L'equazione del valore da considerare è

$$97 = 3.5 \cdot a_{\overline{5}|ytm} + 99.625(1 + ytm)^{-5}.$$

Possiamo valutare il termine di destra al tasso ytm_0^{TAX}. Si ha

$$3.5 \cdot a_{\overline{5}|ytm_0^{\text{TAX}}} + 99.625(1 + ytm_0^{\text{TAX}})^{-5} = 96.98 < 97.$$

Dato che l'espressione di destra è una quantità che decresce al crescere del tasso (vedi grafico a destra), e dato che il valore trovato è minore dell'effettivo prezzo pagato, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza ytm è minore di ytm_0^{TAX}, cioè che l'approssimazione è per eccesso.



ESERCIZIO 2. Il 01/08/2016 ho acquistato un B.T.P. decennale emesso il 01/06/2015, con tasso cedolare $r = 3\%$, al corso secco $P_s = 100.50$. Il titolo verrà rimborsato alla pari alla scadenza. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di ricavare il valore esatto del tasso di rendimento a scadenza del titolo alla data di acquisto e si stabilisca se tale tasso era maggiore del 2% oppure no (non si consideri la tassazione).

Supponiamo ora di poter reinvestire le cedole al tasso del 3%, di detenere il titolo fino al 31/12/2018 e di rivenderlo al prezzo $P = 100$.

Si scriva l'equazione che, risolta, consente di ricavare il valore esatto del tasso di rendimento effettivo dell'investimento e si stabilisca se tale tasso è maggiore del 3% oppure no (non si consideri la tassazione).

Il titolo, emesso il 01/06/2015, paga cedole il 01/12 e il 01/06. Avendolo acquistato il 01/08/2016, non ho incassato le cedole del 01/12/2015 e del 01/06/2016. Quindi, al momento dell'acquisto, la vita residua del titolo prevedeva 18 cedole. La cedola è $\frac{r}{2} \cdot 100 = 1.5$. Per calcolare il rateo serve il numero di giorni dallo stacco dell'ultima cedola alla data di acquisto: sono due mesi interi. Il rateo è quindi

$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{2}{6} = 0.5.$$

Pertanto, dato il corso secco $P_s = 100.50$, il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 100.50 + 0.5 = 101.$$

L'equazione la cui soluzione è il tasso di rendimento a scadenza del titolo alla data di acquisto è

$$101 = 1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{2/6} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-18+2/6}.$$

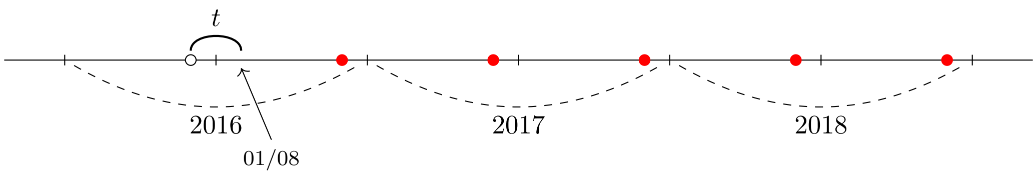
Per stabilire se tale tasso era maggiore del 2% oppure no basta calcolare il valore del termine di destra per questo tasso e confrontare tale valore con il termine di sinistra. Serve il tasso semestrale $0.02_{1/2} = 0.009950494$. Si ottiene

$$1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|0.02_{1/2}} (1 + 0.02_{1/2})^{2/6} + 100(1 + 0.02_{1/2})^{-18+2/6} = 108.64.$$

Dato che il tasso di rendimento a scadenza sconta più del 2%, possiamo dire che il tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 2%.

Passiamo alla seconda parte. L'ipotesi è ora di vendere il titolo il 31/12/2018 al prezzo $P = 100$ e di reinvestire le cedole incassate dal momento dell'acquisto al tasso del 3%.

Ecco la rappresentazione del B.T.P. nel periodo di tempo ora rilevante.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale continua ad essere 1.5, il prezzo di acquisto è $P_{\text{tq}} = 101$, il prezzo di vendita è $P = 100$. Le cedole di cui tenere conto sono 5.

L'equazione che ha per soluzione il tasso di rendimento effettivo i_{eff} dell'investimento è

$$101(1 + i_{\text{eff}})^{2+5/12} = 1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|0.03_{1/2}} (1 + 0.03_{1/2})^{5+1/6} + 100.$$

La richiesta è ora di stabilire se tale tasso effettivo è maggiore del 3% oppure no. In realtà si potrebbe trovare in modo esatto questo tasso, dato che l'equazione è risolvibile esattamente.[3]

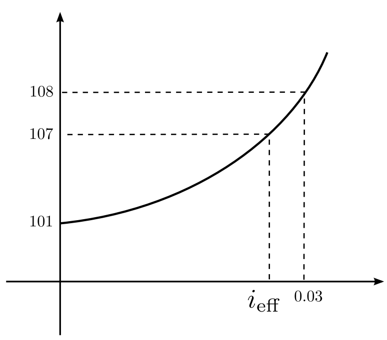
Ma si può rispondere alla domanda anche senza calcolare esattamente il tasso effettivo, considerando che la funzione a primo membro è crescente in termini del tasso. Anzitutto si trova che il temine di destra ($0.03_{1/2} = 0.014889157$) vale

$$1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{5}|0.03_{1/2}} (1 + 0.03_{1/2})^{5+1/6} + 100 = 7.746 + 100 = 107.746.$$

Poi, calcolando il termine di sinistra in 0.03 si ottiene

$$101(1 + 0.03)^{2+5/12} = 108.479 > 107.746$$

e quindi si può dire che $i_{\text{eff}} < 3\%$ (vedi figura a fianco).



[3] Dato che il termine di destra vale 107.746 (calcolato tra breve), la soluzione dell'equazione è

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{107.746}{101}\right)^{\frac{1}{2+5/12}} - 1 = 0.027115351.$$

ESERCIZIO 3. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

$$A. \quad \begin{array}{ccccc} -200 & -50 & 150 & -30 & 190 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \qquad\qquad B. \quad \begin{array}{ccccc} -150 & 50 & -30 & 70 & 100 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 6%, quale dei due progetti conviene in base al criterio del REA/VAN? Si dica anche se i due progetti sono convenienti, in base allo stesso criterio, rispetto all'investimento di denaro.

Successivamente si valutino i due progetti con il criterio T.R.M., nell'ipotesi che il tasso a debito sia $i_- = 8\%$ e il tasso a credito sia $i_+ = 4\%$ e si dica se in base a tale criterio sono convenienti e quale dei due è preferibile.

✎

Al tasso di valutazione del 6% si ha

$$\text{REA}_A(0.06) = -200 - \frac{50}{1.06} + \frac{150}{1.06^2} - \frac{30}{1.06^3} + \frac{190}{1.06^4} = 11.639$$

e

$$\text{REA}_B(0.06) = -150 + \frac{50}{1.06} - \frac{30}{1.06^2} + \frac{70}{1.06^3} + \frac{100}{1.06^4} = 8.453.$$

Entrambi i progetti sono convenienti rispetto all'investimento di denaro e tra i due conviene il progetto A.

Ora valutiamo i due progetti con il criterio T.R.M., con un tasso a debito $i_- = 8\%$ e un tasso a credito $i_+ = 4\%$. Il criterio prevede di calcolare la sequenza dei valori cumulati, considerando il tasso a debito per valori precedenti negativi e il tasso a credito per valori precedenti positivi.

Costruiamo lo schema previsto con i valori cumulati.

Per il progetto A abbiamo

$$\begin{aligned} M_0 &= -200 \\ M_1 &= -200 \cdot 1.08 - 50 = -266 \\ M_2 &= -266 \cdot 1.08 + 150 = -137.28 \\ M_3 &= -137.28 \cdot 1.08 - 30 = -178.26 \\ M_4 &= -178.26 \cdot 1.08 + 190 = -2.52. \end{aligned}$$

Per il progetto B abbiamo

$$\begin{aligned} M_0 &= -150 \\ M_1 &= -150 \cdot 1.08 + 50 = -112 \\ M_2 &= -112 \cdot 1.08 - 30 = -150.96 \\ M_3 &= -150.96 \cdot 1.08 + 70 = -93.04 \\ M_4 &= -93.04 \cdot 1.08 + 100 = -0.48. \end{aligned}$$

Con il criterio T.R.M. hanno entrambi un valore finale negativo e tra i due è preferibile B.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/02/2017

ESERCIZIO 1. Dato il tasso di sconto annuo $d = 5\%$, determinare nel RIS, nel RIC e nel RSC i tassi di sconto semestrali equivalenti $d_{1/2}$ e i tassi di interesse trimestrali equivalenti $i_{1/4}$.

✎

Anzitutto il tasso di interesse annuo equivalente al tasso di sconto annuo del 5% è

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{1-0.05} = 0.052631578.$$

Calcoliamo i tassi di sconto semestrali equivalenti $d_{1/2}$ e i tassi di interesse trimestrali equivalenti $i_{1/4}$ nei vari regimi:

(RIS)

$$i_{1/2} = \frac{i}{2} = 0.026315789 \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{i_{1/2}}{1+i_{1/2}} = 0.025641025.$$

$$i_{1/4} = \frac{i_{1/2}}{2} = \frac{i}{4} = 0.013157894.$$

(RIC)

$$i_{1/2} = (1+i)^{1/2} - 1 = 0.025978352 \quad ; \quad d_{1/2} = \frac{i_{1/2}}{1+i_{1/2}} = 0.025320565.$$

$$i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1 = (1+i_{1/2})^{1/2} - 1 = 0.012905894.$$

(RSC)

$$d_{1/2} = \frac{d}{2} = 0.025$$

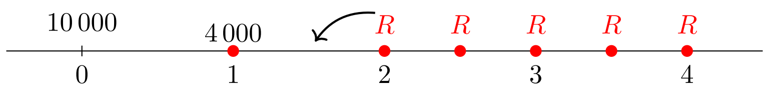
$$d_{1/4} = \frac{d}{4} = \frac{d_{1/2}}{2} = 0.0125 \quad ; \quad i_{1/4} = \frac{d_{1/4}}{1-d_{1/4}} = 0.012658227.$$

ESERCIZIO 2. Un prestito di 10 000€ può essere restituito versando 4 000€ tra un anno e la rimanenza mediante 5 rate costanti semestrali, la prima delle quali tra due anni. Si determini l'ammontare della rata, nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 12\%$.

Scegliendo invece di provvedere alla restituzione attraverso 8 rate semestrali posticipate di 1 500€ ciascuna, si ottenga anzitutto un'approssimazione del corrispondente tasso di interesse annuo e si stabilisca poi con certezza se tale tasso è maggiore o minore del 9%.

✎

Ecco lo schema relativo alla prima modalità di restituzione.

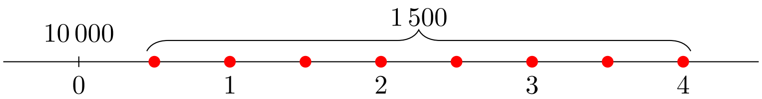


Dato che le rate sono semestrali serve il tasso di interesse semestrale equivalente a $i = 0.12$.

$$i_{1/2} = (1+0.12)^{1/2} - 1 = 0.058300524.$$

L'ammontare della rata R deve soddisfare l'equazione seguente:

$$10\,000 = 4\,000(1+i)^{-1} + R \cdot a_{\overline{5}|i_{1/2}} \cdot (1+i)^{-1.5},$$



dalla quale si ricava

$$R = \frac{10\,000 - 4\,000(1+i)^{-1}}{\mathrm{a}_{\overline{5}|i_{1/2}} \cdot (1+i)^{-1.5}} = 1\,800.55€.$$

Passiamo alla seconda domanda. La rappresentazione della nuova modalità è qui sopra.

L'equazione del valore è ora

$$10\,000 = 1\,500 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|i_{1/2}},$$

dove ora il tasso è incognito. Dato che si tratta del caso di una rendita immediata posticipata, abbiamo una formula per dare una prima approssimazione del tasso, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}$$

dove nel nostro caso $n = 8$, $V_0 = 10\,000$ e $R = 1\,500$. Si trova

$$i^0_{1/2} = \frac{2(8 - 10\,000/1\,500)}{9 \cdot 10\,000/1\,500} = 0.0\overline{4}.$$

Questo è un tasso semestrale che, convertito nell'equivalente tasso annuo richiesto, fornisce $i^0 = 0.090864197$.

Da ultimo, per dire se il tasso che è soluzione dell'equazione del valore indicata sopra è maggiore o minore del 9% basta sostituire tale tasso nell'equazione e trovare il valore attuale corrispondente. Con $i = 0.09$ si ha $i_{1/2} = 0.04403065$ e

$$1\,500 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.09_{1/2}} \approx 9933 < 10\,000.$$

Ricordando che la funzione (valore attuale in funzione del tasso) è decrescente, possiamo affermare che il tasso è minore del 9%. Attenzione che l'approssimazione trovata i^0, maggiore del 9%, non ci permette di dire che il valore esatto è anch'esso maggiore del 9%, cosa che infatti è falsa.

ESERCIZIO 3. Il 01/08/2016 ho acquistato un B.T.P. decennale emesso il 01/06/2015, con tasso cedolare $r = 3\%$, al corso secco $P_s = 100.50$. Il titolo verrà rimborsato alla pari alla scadenza. Si scriva l'equazione che, risolta, consente di ricavare il valore esatto del tasso di rendimento a scadenza del titolo alla data di acquisto e si stabilisca se tale tasso era maggiore del 2% oppure no (non si consideri la tassazione).

Supponiamo ora di poter reinvestire le cedole al tasso del 3%, di detenere il titolo fino al 31/12/2018 e di rivenderlo al prezzo $P = 100$.

Si scriva l'equazione che, risolta, consente di ricavare il valore esatto del tasso di rendimento effettivo dell'investimento e si stabilisca se tale tasso è maggiore del 3% oppure no (non si consideri la tassazione).

✎

Il titolo, emesso il 01/06/2015, paga cedole il 01/12 e il 01/06. Avendolo acquistato il 01/08/2016, non ho incassato le cedole del 01/12/2015 e del 01/06/2016. Quindi, al momento dell'acquisto, la vita residua del titolo prevedeva 18 cedole. La cedola è $\frac{r}{2} \cdot 100 = 1.5$. Per calcolare il rateo serve il numero di giorni dallo stacco dell'ultima cedola alla data di acquisto: sono due mesi interi. Il rateo è quindi

$$\text{rateo} = 1.5 \cdot \frac{2}{6} = 0.5.$$

Pertanto, dato il corso secco $P_s = 100.50$, il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 100.50 + 0.5 = 101.$$

L'equazione la cui soluzione è il tasso di rendimento a scadenza del titolo alla data di acquisto è

$$101 = 1.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{18}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{2/6} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-18+2/6}.$$

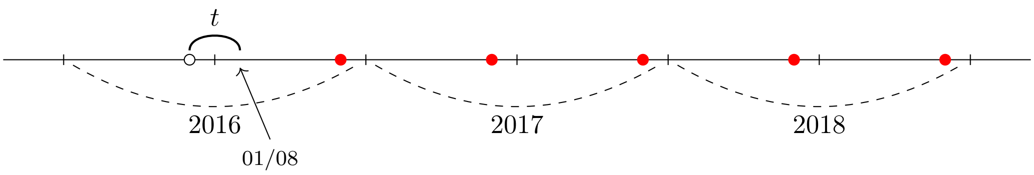
Per stabilire se tale tasso era maggiore del 2% oppure no basta calcolare il valore del termine di destra per questo tasso e confrontare tale valore con il termine di sinistra. Serve il tasso semestrale $0.02_{1/2} = 0.009950494$. Si ottiene

$$1.5 \cdot a_{\overline{18}|0.02_{1/2}}(1+0.02_{1/2})^{2/6} + 100(1+0.02_{1/2})^{-18+2/6} = 108.64.$$

Dato che il tasso di rendimento a scadenza sconta più del 2%, possiamo dire che il tasso di rendimento a scadenza è maggiore del 2%.

Passiamo alla seconda parte. L'ipotesi è ora di vendere il titolo il 31/12/2018 al prezzo $P = 100$ e di reinvestire le cedole incassate dal momento dell'acquisto al tasso del 3%.

Ecco la rappresentazione del B.T.P. nel periodo di tempo ora rilevante.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale continua ad essere 1.5, il prezzo di acquisto è $P_{\text{tq}} = 101$, il prezzo di vendita è $P = 100$. Le cedole di cui tenere conto sono 5.

L'equazione che ha per soluzione il tasso di rendimento effettivo i_{eff} dell'investimento è

$$101(1+i_{\text{eff}})^{2+5/12} = 1.5 \cdot a_{\overline{5}|0.03_{1/2}}(1+0.03_{1/2})^{5+1/6} + 100.$$

La richiesta è ora di stabilire se tale tasso effettivo è maggiore del 3% oppure no. In realtà si potrebbe trovare in modo esatto questo tasso, dato che l'equazione è risolvibile esattamente.[4]

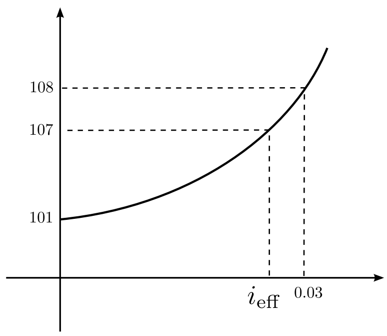
Ma si può rispondere alla domanda anche senza calcolare esattamente il tasso effettivo, considerando che la funzione a primo membro è crescente in termini del tasso. Anzitutto si trova che il temine di destra ($0.03_{1/2} = 0.014889157$) vale

$$1.5 \cdot a_{\overline{5}|0.03_{1/2}}(1+0.03_{1/2})^{5+1/6} + 100 = 7.746 + 100 = 107.746.$$

Poi, calcolando il termine di sinistra in 0.03 si ottiene

$$101(1+0.03)^{2+5/12} = 108.479 > 107.746$$

e quindi si può dire che $i_{\text{eff}} < 3\%$ (vedi figura a fianco).



ESERCIZIO 4. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

A.

−200	−50	150	−30	190
0	1	2	3	4

B.

−150	50	−30	70	100
0	1	2	3	4

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 6%, quale dei due progetti conviene in base al criterio del REA/VAN? Si dica anche se i due progetti sono convenienti, in base allo stesso criterio, rispetto all'investimento di denaro.

Successivamente si valutino i due progetti con il criterio T.R.M., nell'ipotesi che il tasso a debito sia $i_- = 8\%$ e il tasso a credito sia $i_+ = 4\%$ e si dica se in base a tale criterio sono convenienti e quale dei due è preferibile.

✎

Al tasso di valutazione del 6% si ha

$$\text{REA}_A(0.06) = -200 - \frac{50}{1.06} + \frac{150}{1.06^2} - \frac{30}{1.06^3} + \frac{190}{1.06^4} = 11.639$$

e

$$\text{REA}_B(0.06) = -150 + \frac{50}{1.06} - \frac{30}{1.06^2} + \frac{70}{1.06^3} + \frac{100}{1.06^4} = 8.453.$$

Entrambi i progetti sono convenienti rispetto all'investimento di denaro e tra i due conviene il progetto A.

[4] Dato che il termine di destra vale 107.746 (calcolato tra breve), la soluzione dell'equazione è

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{107.746}{101}\right)^{\frac{1}{2+5/12}} - 1 = 0.027115351.$$

Ora valutiamo i due progetti con il criterio T.R.M., con un tasso a debito $i_- = 8\%$ e un tasso a credito $i_+ = 4\%$. Il criterio prevede di calcolare la sequenza dei valori cumulati, considerando il tasso a debito per valori precedenti negativi e il tasso a credito per valori precedenti positivi.

Costruiamo lo schema previsto con i valori cumulati.

Per il progetto A abbiamo

$$\begin{aligned} M_0 &= -200 \\ M_1 &= -200 \cdot 1.08 - 50 = -266 \\ M_2 &= -266 \cdot 1.08 + 150 = -137.28 \\ M_3 &= -137.28 \cdot 1.08 - 30 = -178.26 \\ M_4 &= -178.26 \cdot 1.08 + 190 = -2.52. \end{aligned}$$

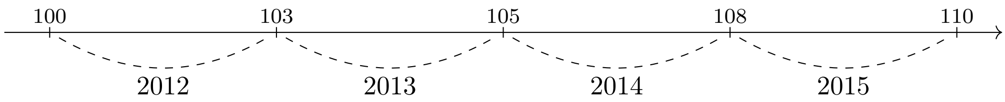
Per il progetto B abbiamo

$$\begin{aligned} M_0 &= -150 \\ M_1 &= -150 \cdot 1.08 + 50 = -112 \\ M_2 &= -112 \cdot 1.08 - 30 = -150.96 \\ M_3 &= -150.96 \cdot 1.08 + 70 = -93.04 \\ M_4 &= -93.04 \cdot 1.08 + 100 = -0.48. \end{aligned}$$

Con il criterio T.R.M. hanno entrambi un valore finale negativo e tra i due è preferibile B.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/06/2017

ESERCIZIO 1. Il 01/01/2012 sono stati investiti 20 000€ per 4 anni al tasso di interesse $i = 3\%$ in RIC. Sapendo che gli indici dei prezzi (ponendo convenzionalmente a 100 l'indice a inizio 2012) sono stati 103 a fine 2012, 105 a fine 2013, 108 a fine 2014 e 110 a fine 2015, determinare:
(a) i tassi di inflazione nei 4 anni e il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 4 anni (su base annua);
(b) l'importo che dopo 4 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento iniziale;
(c) gli interessi nominali e quelli reali prodotti dall'investimento;
(d) il tasso di interesse reale annuo dell'investimento.



(a) I tassi di inflazione nei 4 anni (tutti su base annua) sono dati da

$$g_{2012} = \frac{103-100}{100} = 0.03 \quad , \quad g_{2013} = \frac{105-103}{103} = 0.019417476$$

$$g_{2014} = \frac{108-105}{105} = 0.028571429 \quad , \quad g_{2015} = \frac{110-108}{108} = 0.018518519.$$

Il tasso medio $\overline{g}$ di aumento dei prezzi nei 4 anni su base annua si può calcolare semplicemente con

$$\overline{g}_4 = \frac{110-100}{100} = 0.1 \text{ (su base quadriennale)}$$

da cui

$$\overline{g} = (1+\overline{g}_4)^{1/4} - 1 = 0.024113689 \text{ (su base annua)}.$$

Il tasso medio $\overline{g}$ di inflazione si può trovare anche come media geometrica dei tassi di inflazione nei 4 anni, ma quando sono forniti gli indici dei prezzi conviene fare come indicato.

(b) L'importo che dopo 4 anni ha lo stesso potere d'acquisto dell'investimento iniziale è dato da

$$C_t = 20\,000(1+\overline{g}_4) = 20\,000 \cdot 1.1 = 22\,000€.$$

(c) Gli interessi nominali (I_{nom}) prodotti dall'investimento sono dati dalla differenza tra il montante dell'investimento e l'investimento iniziale, senza tenere conto dell'inflazione. Quindi

$$I_{\text{nom}} = 20\,000 \cdot 1.03^4 - 20\,000 = 22\,510.18 - 20\,000 = 2\,510.18€.$$

Gli interessi reali (I_{reali}) prodotti dall'investimento sono invece dati dalla differenza tra il montante dell'investimento iniziale e l'importo C_t trovato al punto precedente. Quindi

$$I_{\text{reali}} = 20\,000 \cdot 1.03^4 - 22\,000 = 510.18€.$$

(d) Il tasso di interesse reale annuo dell'investimento (i^{reale}) si può ottenere come quoziente tra gli interessi reali appena calcolati e l'importo C_t.

$$i_4^{\text{reale}} = \frac{I_{\text{reali}}}{C_t} = \frac{510.18}{22\,000} = 0.02319 \text{ (su base quadriennale)}$$

e

$$i^{\text{reale}} = (1+i_4^{\text{reale}})^{1/4} - 1 = 0.005747755 \text{ (su base annua)}.$$

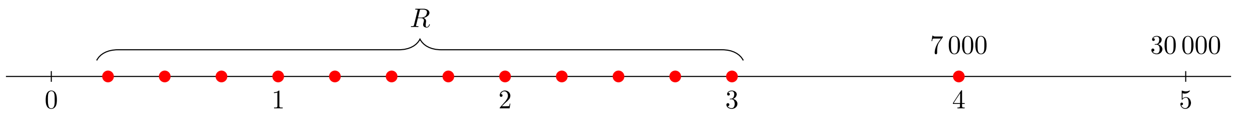
ESERCIZIO 2. Voglio poter disporre tra 5 anni di un capitale di 30 000€ e voglio costituirlo mediante rate trimestrali costanti posticipate di importo R per 3 anni e successivamente con un unico ulteriore versamento alla fine del quarto anno.

Nell'ipotesi che il tasso di interesse annuo applicato sia $i = 4\%$ e che l'ultimo versamento non debba superare i 7 000€, quale deve essere l'ammontare minimo delle rate?

Volendo invece costituire lo stesso capitale con rate semestrali (posticipate) di 5 000€ qual è il numero minimo di rate (intere) che consentono di accumulare dopo 5 anni un capitale sufficiente? Valutare anche la differenza in eccesso.

✎

Ecco lo schema dei pagamenti. L'ultimo importo (30 000€) è quanto voglio costituire al quinto anno.



Serve il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo i del 4%. Si ha

$$i_{1/4} = 1.04^{1/4} - 1 = 0.009853406.$$

L'equazione che esprime l'equivalenza degli importi è

$$R \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1+i)^5 + 7\,000 \cdot (1+i) = 30\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000 - 7\,000 \cdot (1+i)}{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1+i)^5} = 1\,657.64€.$$

Passiamo alla seconda modalità, in cui l'incognita è il numero di rate. Ecco lo schema.

Ora serve il tasso semestrale equivalente al tasso annuo i del 4%. Si ha

$$i_{1/2} = 1.04^{1/2} - 1 = 0.019803902.$$

L'equazione che esprime la condizione per la costituzione del capitale è

$$5\,000 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/2}}(1+i)^5 \geq 30\,000.$$

Si noti che il primo valore di n che soddisfa la disequazione garantisce di costituire un capitale maggiore o uguale a 30 000€. La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/2}}(1+i)^5 \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1+i_{1/2})^{-n} \geq \frac{6i_{1/2}}{(1+i)^5}.$$

Indicando per comodità con A la quantità a destra, la disequazione diventa

$$(1+i_{1/2})^{-n} \leq 1 - A \quad \Leftrightarrow \quad -n\ln(1+i_{1/2}) \leq \ln(1-A) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{\ln(1-A)}{\ln(1+i_{1/2})} = 5.24.$$

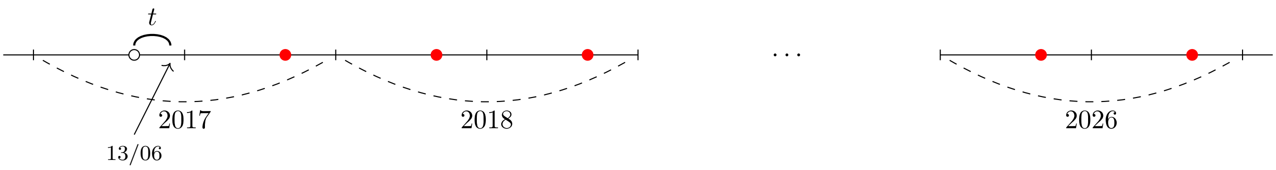
Questo dice che 5 rate intere non bastano e 6 costituiscono un capitale maggiore di 30 000€. Quindi la risposta alla domanda è 6 rate e la differenza in eccesso è data da

$$5\,000 \cdot a_{\overline{6}|i_{1/2}}(1+i)^5 - 30\,000 = 34\,097.55 - 30\,000 = 4\,097.55€.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. ventennale `Btp-1nv26 7,25%`, con scadenza il 01/11/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7.25\%$. Verrà rimborsato alla pari. Il 13/06/2017 era quotato (corso secco) per l'acquisto a 147.02. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza ytm era in quella data maggiore del 2% oppure no. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato il titolo in data 13/06/2017, di rivenderlo il 31/12/2020 al prezzo $P_V = 130$, reinvestendo le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà del 2%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando la tassazione.

Ecco la rappresentazione che mostra le caratteristiche del B.T.P.



Non c'è tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.075}{2} \cdot 100 = 3.625.$$

Il calcolo del numero di cedole: una nel 2017 e poi due dal 2018 al 2026: in tutto sono $n = 19$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola: si ha $t = 30 + 13 = 43$ giorni.

Calcoliamo il prezzo tel quel. Serve il rateo:

$$\text{rateo} = 3.625 \cdot \frac{43}{180} = 0.866.$$

Quindi il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 147.02 + 0.866 = 147.866.$$

L'equazione per il tasso di rendimento a scadenza ytm è

$$147.866 = 3.625 \cdot \text{a}_{\overline{19}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{43/180} + 100 \cdot (1 + ytm_{1/2})^{-19+43/180}.$$

Per rispondere alla domanda se il tasso di rendimento a scadenza ytm era il 13/06/2017 maggiore del 2% oppure no possiamo calcolare il termine di destra dell'equazione assegnando al tasso il valore $0.02_{1/2} = 1.02^{1/2} - 1 = 0.009950493$. Si ottiene

$$P_{\text{tq}}(0.009950493) = 145.67 < 147.8766.$$

Quindi, dato che il tasso di rendimento a scadenza sconta meno di quanto fa il 2%, possiamo affermare che $ytm < 2\%$.

Ora passiamo alla seconda domanda, considerando la tassazione. Anzitutto osserviamo che il prezzo di vendita del titolo è minore del prezzo di acquisto e quindi non c'è tassazione sul capitale. La tassazione c'è solo sulle cedole: la cedola netta è $3.625(1 - 0.125) = 3.171875$. Cambia il rateo, che ora diventa

$$\text{rateo} = 3.171875 \cdot \frac{43}{180} = 0.758.$$

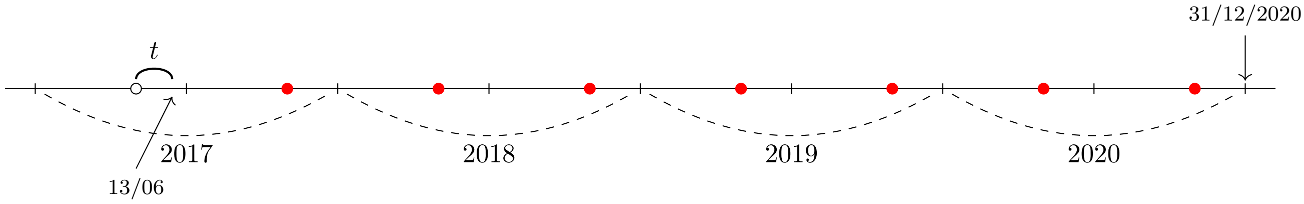
Il prezzo tel quel diventa

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 147.02 + 0.758 = 147.778.$$

Il titolo viene venduto il 31/12/2020 e il nuovo schema limitato al periodo ora rilevante è riportato nella pagina seguente.

Per il calcolo del rendimento effettivo i_{eff} a seguito del reinvestimento delle cedole occorre uguagliare il montante del valore investito per l'acquisto del titolo al montante che proviene dal reinvestimento delle cedole e dal valore di vendita del titolo stesso. Il montante del valore investito è (i tempi sono ora misurati in anni)

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-43/360+3+8/12}.$$



Indicando con $i^B = 0.02$ il tasso di interesse a credito e con $i^B_{1/2} = 0.009950493$ il corrispondente tasso semestrale, il montante degli importi a credito è dato da

$$M = 3.171875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|i^B_{1/2}} (1 + i^B)^{3+8/12} + 130 = 152.953.$$

Quindi l'equazione è

$$P_{\mathrm{tq}}(1 + i_{\mathrm{eff}})^{-43/360+3+8/12} = M \quad \Leftrightarrow \quad i_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{M}{P_{\mathrm{tq}}}\right)^{1/(-43/360+3+8/12)} - 1 = 0.009750466.$$

ESERCIZIO 4. Relativamente all'acquisto di un macchinario abbiamo queste due alternative di pagamento:

A. pagare subito 40 000€ e un saldo tra due anni di 70 000€;

B. pagare subito 60 000€ e successivamente 4 rate semestrali (posticipate) di 10 000€.

Ipotizzando un tasso esterno annuo del 10%, quale delle due modalità conviene in base al criterio del REA/VAN? Si commenti l'affermazione "possiamo affermare a priori che è sempre conveniente la modalità B". Siamo nelle condizioni per poter affermare che esiste un unico tasso di valutazione per cui le due alternative sono indifferenti? Si cerchi di dare una prima grossolana stima di questo tasso.

✎

Ecco uno schema delle due modalità. Uso come unità le migliaia.

Calcoliamo i REA dei due progetti, al tasso di valutazione del 10%.

$$\mathrm{REA}_A(0.1) = -40 - 70 \cdot 1.1^{-2} = -97.85$$

e

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -60 - 10 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.1_{1/2}} = -95.56.$$

Quindi in base al criterio del REA conviene il progetto B.

Veniamo all'affermazione proposta: "possiamo affermare a priori che è sempre conveniente la modalità B". Anzitutto una possibile motivazione di questa: si potrebbe osservare che sommando semplicemente gli importi relativi ai pagamenti, A costa 110, mentre B costa 100. Da questo non si può però dedurre che B sia sempre conveniente, indipendentemente dal tasso. Infatti, se scriviamo i REA in funzione del tasso di valutazione i, abbiamo

$$\mathrm{REA}_A(i) = -40 - 70 \cdot (1 + i)^{-2} \quad \text{e} \quad \mathrm{REA}_B(i) = -60 - 10 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i_{1/2}}.$$

Ora, con un tasso nullo $i = 0$ si ha

$$\mathrm{REA}_A(0) = -40 - 70 = -110 \quad \text{e} \quad \mathrm{REA}_B(0) = -60 - 10 \cdot 4 = -100,$$

ed è quanto appena osservato, che porterebbe a dire che B è preferibile. Ma con un "tasso infinito" (limite per $i \to +\infty$)

$$\mathrm{REA}_A(\infty) = -40 \quad \text{e} \quad \mathrm{REA}_B(\infty) = -60,$$

che porta a dire che A è preferibile. Quindi possiamo affermare che esiste almeno un tasso per cui le due alternative sono equivalenti in base al criterio del REA e che in prossimità di questo tasso la preferenza si inverte.

Ora veniamo all'ultima domanda, se siamo nelle condizioni per poter affermare che esiste un unico tasso di valutazione per cui le due alternative sono indifferenti. La condizione di indifferenza è espressa dall'equazione

$$-40 - 70 \cdot (1+i)^{-2} = -60 - 10 \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}}.$$

Conviene sostituire "a figurato" con la sua scrittura "estesa" ed esprimere il tutto in funzione del tasso semestrale, che indico per comodità con x. L'equazione diventa

$$40 + \frac{70}{(1+x)^4} = 60 + \frac{10}{1+x} + \frac{10}{(1+x)^2} + \frac{10}{(1+x)^3} + \frac{10}{(1+x)^4}$$

cioè

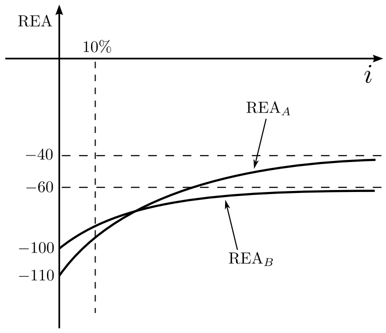
$$20 + \frac{10}{1+x} + \frac{10}{(1+x)^2} + \frac{10}{(1+x)^3} - \frac{60}{(1+x)^4} = 0.$$

Abbiamo visto una condizione sufficiente per poter affermare che un'equazione intera[5] ha una sola soluzione positiva, ed è che i "coefficienti cumulati" dell'equazione cambino di segno una sola volta. Nel nostro caso i coefficienti cumulati sono:

$$20 \quad , \quad 30 \quad , \quad 40 \quad , \quad 50 \quad , \quad -10$$

e quindi la condizione è soddisfatta. Possiamo affermare che esiste un unico tasso di valutazione per cui le due alternative sono indifferenti.

Cerchiamo di dare una prima grossolana stima di questo tasso. Si può andare anche per tentativi, ma può essere utile il grafico qui sotto, che illustra la situazione. Il grafico si può ottenere facilmente ricordando i "valori limite" (a zero e all'infinito) dei due REA, trovati prima, e considerando che entrambe le funzioni sono crescenti al crescere del tasso (sono funzioni opposte di funzioni decrescenti).



Con il tasso del 10% avevamo visto all'inizio che era preferibile B. Per ottenere una stima possiamo allora considerare un tasso maggiore del 10%, e facciamo il 15%. Si ottiene

$$\text{REA}_A(0.15) = -40 - 70 \cdot 1.15^{-2} = -92.93$$

e

$$\text{REA}_B(0.15) = -60 - 10 \cdot a_{\overline{4}|0.15_{1/2}} = -93.69.$$

Con il tasso del 15% è preferibile A, Allora il tasso di indifferenza è certamente compreso tra il 10% e il 15%. Un metodo di bisezione permetterebbe di approssimarlo molto meglio.

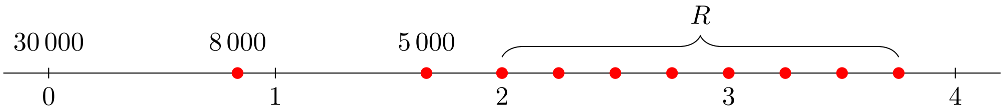
[5] L'equazione diventa intera se usiamo il cambio di variabile "tasso di interesse ↔ fattore di sconto" $\frac{1}{1+i} = v$.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 06/09/2017

ESERCIZIO 1. Devo restituire un prestito di 30 000€ versando un primo importo di 8 000€ tra 10 mesi ed un secondo di 5 000€ dopo altri 10 mesi. Successivamente restituirò il rimanente in 8 rate trimestrali, la prima delle quali tra 2 anni. Si determini l'ammontare della rata nell'ipotesi che il tasso applicato sia del 7%.

Di quanto in percentuale devo aumentare l'importo della rata trimestrale se voglio ridurre a 7 il numero di rate?

✎



L'equazione del valore, che uguaglia l'importo del prestito iniziale (in $t = 0$) al valore attualizzato di tutti gli importi successivi relativi alla restituzione, è (indico con R l'importo della rata)

$$30\,000 = 8\,000 \cdot 1.07^{-10/12} + 5\,000 \cdot 1.07^{-20/12} + R \cdot a_{\overline{8}|0.07_{1/4}} \cdot 1.07^{-21/12}.$$

Dato che il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del 7% è

$$0.07_{1/4} = 1.07^{1/4} - 1 = 0.017058525$$

si trova

$$R = 2\,726.80€.$$

Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo trovare la nuova rata nell'ipotesi che il pagamento periodico si riduca a 7 rate. L'equazione è ovviamente

$$30\,000 = 8\,000 \cdot 1.07^{-10/12} + 5\,000 \cdot 1.07^{-20/12} + R \cdot a_{\overline{7}|0.07_{1/4}} \cdot 1.07^{-21/12},$$

che ha per soluzione

$$R' = 3\,090.65€$$

e quindi l'aumento percentuale è dato da

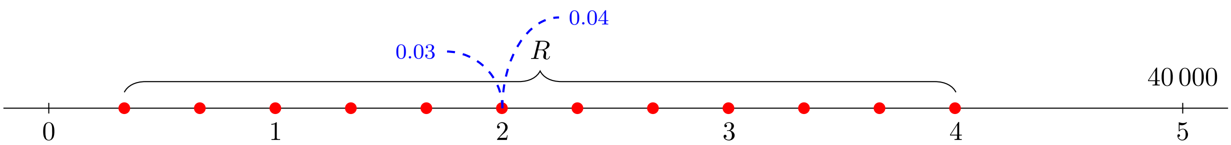
$$\frac{R' - R}{R} = \frac{3\,090.65 - 2\,726.80}{2\,697.41} = 0.1334 \quad \text{(circa 13.34\%)}.$$

ESERCIZIO 2. Voglio poter disporre tra 5 anni di un capitale di 40 000€ e voglio costituirlo mediante 12 rate quadrimestrali costanti posticipate (immediate) di importo R.

Nell'ipotesi che i tassi di interesse annui applicati siano $i^{(a)} = 3\%$ fino alla fine del secondo anno e successivamente $i^{(b)} = 4\%$, quale deve essere l'ammontare della rata?

Senza ripetere i calcoli si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa l'affermazione: accontentandosi di un capitale finale ridotto di un quinto, la rata viene ridotta di un quinto.

✎



Lo schema qui sopra mostra che la prima rata è fra 4 mesi[6] e l'ultima alla fine del 4° anno.

[6]Ricordo che, parlando di una rendita, *immediata* significa che il primo periodo inizia subito e *posticipata* significa che la prima rata è alla fine del primo periodo.

L'equazione del valore, che uguaglia alla fine del 5° anno il capitale che si vuole costituire al valore capitalizzato delle rate, è (indico con R l'importo della rata)

$$40\,000 = R \cdot a_{\overline{6}|0.03_{1/3}} \cdot 1.03^2 \cdot 1.04^3 + R \cdot a_{\overline{6}|0.04_{1/3}} \cdot 1.04^3. \tag{1}$$

Dato che i tassi quadrimestrali equivalenti ai tassi annui del 3% e del 4% sono

$$0.03_{1/3} = 1.03^{1/3} - 1 = 0.009901634 \quad \text{e} \quad 0.04_{1/3} = 1.04^{1/3} - 1 = 0.013159403$$

si trova

$$R = 2\,992.35€.$$

Ora la seconda domanda: senza fare nuovi calcoli dire se è vero o falso che con un capitale finale ridotto di un quinto la rata viene ridotta di un quinto.

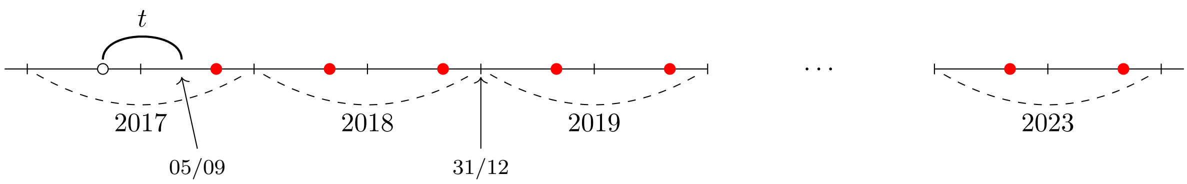
L'affermazione è vera e la motivazione è che l'equazione (1) è lineare in R: tutte le quantità presenti nell'equazione, a parte l'incognita R, sono quantità numeriche note e quindi l'equazione è di primo grado in R.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. `Btp-1nv23 9%`, con scadenza il 01/11/2023, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 9\%$. Verrà rimborsato alla pari. Ieri (05/09/2017) era quotato (corso secco) a 146.17. Si stabilisca se il suo tasso di rendimento a scadenza ytm era maggiore dell'1% oppure no. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Ipotizzando di aver acquistato ieri il titolo, di rivenderlo il 31/12/2018 al prezzo $P_V = 150$, reinvestendo le cedole su un conto corrente dove il tasso di interesse a credito sarà dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P., considerando la tassazione.

Si determini infine quanto incide in percentuale la tassazione sul tasso di rendimento.

Ecco la rappresentazione che mostra le caratteristiche del B.T.P.



Calcoliamo le quantità rilevanti. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F \cdot (1 - 0.125) = \frac{0.09}{2} \cdot 100 \cdot (1 - 0.125) = 3.9375.$$

Il numero di cedole: una nel 2017 e poi due dal 2018 al 2023: in tutto sono $n = 13$.

Il tempo t trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/05/2017): si ha $t = 30 + 30 + 30 + 30 + 5 = 125$ giorni.

Calcoliamo il prezzo tel quel. Serve il rateo:

$$\text{rateo} = 3.9375 \cdot \frac{125}{180} = 2.734.$$

Quindi il prezzo tel quel del titolo è dato da

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 146.17 + 2.734 = 148.904.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso, dato che il valore nominale è minore del prezzo di acquisto.

L'equazione per il tasso di rendimento a scadenza ytm è

$$148.904 = 3.9375 \cdot a_{\overline{13}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{125/180} + 100 \cdot (1 + ytm_{1/2})^{-13+125/180}.$$

Per rispondere alla domanda se il tasso di rendimento a scadenza ytm era il 05/09/2017 maggiore dell'1% oppure no possiamo calcolare il termine di destra dell'equazione assegnando al tasso il valore $0.01_{1/2} = 1.01^{1/2} - 1 = 0.004987562$. Si ottiene

$$P_{\text{tq}}(0.01_{1/2}) = 143.68 < 148.904.$$

Quindi, dato che il tasso di rendimento a scadenza sconta meno di quanto fa l'1%, possiamo affermare che $ytm < 1\%$.

Ora passiamo alla seconda domanda. Anzitutto osserviamo che il prezzo di vendita del titolo è maggiore del prezzo di acquisto e quindi c'è tassazione anche sul capitale. Il valore netto di rimborso è

$$150 - (150 - 146.17) \cdot 0.125 = 149.52.$$

Il titolo viene rivenduto il 31/12/2018, dopo che sono state incassate 3 cedole.

Per il calcolo del rendimento effettivo i_{eff} a seguito del reinvestimento delle cedole occorre uguagliare il montante del valore investito per l'acquisto del titolo al montante che proviene dal reinvestimento delle cedole e dal valore di vendita del titolo stesso. Il montante del valore investito è (i tempi sono ora misurati in anni)

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-125/360+1.5+2/12}.$$

Tenendo conto che il tasso di interesse a credito è dell'1% e il corrispondente tasso semestrale calcolato poco fa ($0.01_{1/2} = 0.004987562$), il montante degli importi a credito è dato da

$$M = 3.9375 \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.01_{1/2}}(1 + 0.01)^{1.5+2/12} + 149.52 = 161.411.$$

Quindi l'equazione è

$$148.904(1 + i_{\text{eff}})^{-125/360+1.5+2/12} = 161.411 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = \left(\frac{161.754}{148.904}\right)^{1/(-125/360+1.5+2/12)} - 1 = 0.06303264.$$

Per dire quanto incide esattamente la tassazione sul tasso di rendimento dobbiamo anzitutto calcolare il rendimento senza la tassazione. L'equazione è la stessa di prima, ma dobbiamo ricalcolare tre quantità (il prezzo tel quel, la cedola e il valore di rimborso) togliendo la tassazione. La cedola lorda è 4.5, il valore di rimborso lordo è 150 e il prezzo tel quel è

$$146.17 + 4.5 \cdot \frac{125}{180} = 146.17 + 3.125 = 149.295.$$

Il nuovo montante delle cedole è

$$M^{\text{notax}} = 4.5 \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.01_{1/2}}(1 + 0.01)^{1.5+2/12} + 150 = 163.590.$$

Pertanto

$$i_{\text{eff}}^{\text{notax}} = \left(\frac{163.590}{149.295}\right)^{1/(-125/360+1.5+2/12)} - 1 = 0.071758974.$$

La differenza in percentuale è data da

$$\frac{i_{\text{eff}} - i_{\text{eff}}^{\text{notax}}}{i_{\text{eff}}^{\text{notax}}} = \frac{0.06303264 - 0.071758974}{0.071758974} = -0.12160617 \quad (\text{circa } -12.16\%).$$

ESERCIZIO 4. Si consideri il progetto di investimento rappresentato da

$$\begin{array}{cccc} -100 & R & 50 & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Nell'ipotesi che sia $R = 30$ si dica se è matematicamente agevole oppure no la determinazione esatta del TIR del progetto, motivando la risposta.

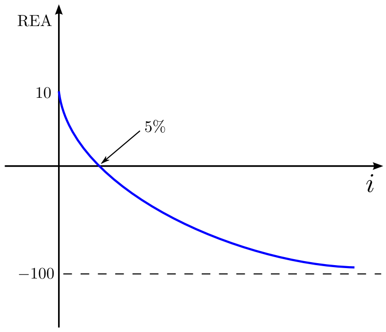
Si determinino poi gli importi R che assicurano un TIR del progetto maggiore del 5%.

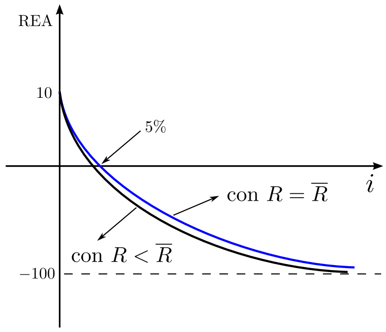
Si dica infine se con un importo $R = 30$ e un tasso del 5% il progetto

$$\begin{array}{cccc} -100 & 50 & R & R \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

è preferibile oppure no al progetto iniziale in base al REA.

✎





Il TIR è la soluzione dell'equazione che si ottiene azzerando il valore del REA. Nel nostro caso il REA del progetto, con $R = 30$ e indicando con i il tasso applicato, è

$$\text{REA}(i) = -100 + \frac{30}{1+i} + \frac{50}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3}.$$

L'equazione in questione è pertanto

$$-100 + \frac{30}{1+i} + \frac{50}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3} = 0,$$

che è un'equazione fratta equivalente, moltiplicando ambo i membri per $(1+i)^3$, all'equazione intera

$$100(1+i)^3 - 30(1+i)^2 - 50(1+i) - 30 = 0,$$

di terzo grado. Non è agevole la risoluzione di equazioni di questo tipo.
Determino ora l'importo R che assicura un TIR del progetto del 5% (figura sopra a sinistra). L'equazione è

$$\text{REA}(0.05) = -100 + \frac{R}{1.05} + \frac{50}{1.05^2} + \frac{R}{1.05^3} = 0.$$

Si trova

$$\overline{R} = 30.08918.$$

Quindi gli importi R che assicurano un TIR del progetto maggiore del 5% si hanno per $R > \overline{R}$.
Ora, indicando con A il primo progetto e con B il secondo, possiamo osservare subito che con $R = 30$ si ha

$$\text{REA}_A(0.05) < 0,$$

dato che $30 < \overline{R}$ (vedi figura sopra a destra). Invece

$$\text{REA}_B(0.05) = -100 + \frac{50}{1.05} + \frac{30}{1.05^2} + \frac{30}{1.05^3} = 0.74 > 0.$$

Pertanto con i valori di R e del tasso considerati il progetto B è preferibile al progetto A.