Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2020/21

Alberto Peretti

Settembre 2021

PROVA online di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE

Vicenza, 12/01/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Per costituire un capitale di 50 000€ in 3 anni si versa un primo importo di 10 000€ tra 6 mesi e successive rate quadrimestrali R, la prima delle quali tra un anno e l'ultima alla fine del 3° anno. Il tasso di interesse annuo sul deposito è $i = 4\%$.

La corretta equazione del valore che permette di determinare l'ammontare della rata R è

(i) *
$$50\,000 = 10\,000(1+i)^{3-1/2} + R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^7$$

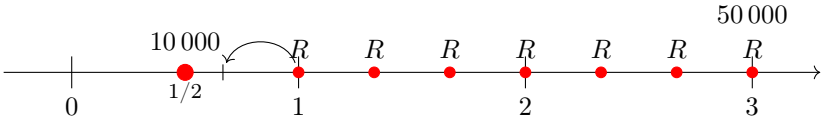
(ii)
$$50\,000 = 10\,000(1+i)^{-1/2} + R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^{-3}$$

(iii)
$$50\,000 = 10\,000(1+i)^{3-1/2} + R \cdot a_{\overline{8}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^8$$

(iv)
$$50\,000(1+i)^{-3} = 10\,000(1+i)^{-1/2} + R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i)^{-1}$$

✎

Può aiutare la seguente rappresentazione.



Possiamo arrivare all'equazione del valore corretta portando tutto alla fine, cioè alla scadenza del 3° anno. Il primo importo di 10 000 va capitalizzato di 2 anni e mezzo. Le rate (quadrimestrali) sono 7. Pertanto l'equazione è

$$50\,000 = 10\,000(1+i)^{1/2+2} + R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^7, \text{ che equivale alla prima risposta.}$$

Domanda 2. Il valore della rata R è compreso tra

(i) * 5 350 e 5 352€

(ii) 5 352 e 5 354€

(iii) 5 215 e 5 217€

(iv) 6 289 e 6 291€

✎

Dopo aver calcolato il tasso equivalente quadrimestrale $i_{1/3}$, con l'equazione trovata nella domanda precedente si calcola

$$R = \frac{50\,000 - 10\,000(1+i)^{2.5}}{a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^7} = 5\,351.17.$$

Domanda 3. Sia Y il capitale accumulato subito **prima** di versare la rata alla fine del 2° anno.

La corretta equazione che permette di determinare l'ammontare di Y è

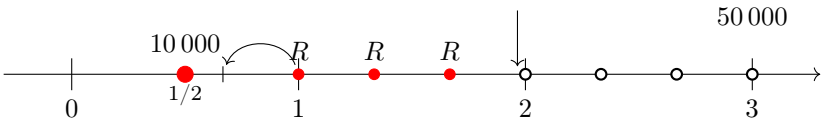
(i) *
$$Y = 10\,000(1+i)^{3/2} + R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^4$$

(ii)
$$Y = 10\,000(1+i_{1/2})^3 + R \cdot a_{\overline{4}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^4$$

(iii)
$$Y = 10\,000(1+i)^{3/2} + R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}}(1+i)$$

(iv)
$$Y = 10\,000 + 3R(1+i)$$

✎



Usando ancora la raffigurazione di prima modificata, se ci poniamo alla fine del 2° anno e supponiamo di non avere ancora versato la 2ª rata, abbiamo che Y è dato dai 10 000€ capitalizzati per un anno e mezzo e le prime 3 rate valutate alla fine del 2° anno. Pertanto

$$Y = 10\,000(1+i)^{1/2+1} + R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^4.$$

Domanda 4. Subito **prima** del versamento della rata alla fine del 2° anno si decide di versare in $t = 2$ (anni) un unico importo X che permetta di costituire i 50 000€ alla fine del 3° anno.
La formula corretta che permette di determinare il valore di X è

(i) * Detto Y il valore calcolato alla domanda precedente, si ha $X = \dfrac{50\,000}{1+i} - Y$

(ii) Detto Y il valore calcolato alla domanda precedente, si ha $X = \dfrac{50\,000}{1+i} - Y - R$

(iii) $10\,000(1+i)^{3/2} + 3R + X = 50\,000$

(iv) $10\,000(1+i)^{5/2} + R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^7 + X(1+i) = 50\,000$

✎

Ci sono vari modi per arrivare all'espressione corretta. Il più semplice è forse questo: alla fine del 2° anno, quanto già versato (Y) è stato trovato alla domanda precedente; se indichiamo con X quanto ancora da versare si ha che

$$Y + X = 50\,000(1+i)^{-1}, \text{ da cui } X = \frac{50\,000}{1+i} - Y.$$

Un altro modo poteva essere scrivendo l'equazione

$$10\,000(1+i)^{1/2+2} + R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^7 + X(1+i) = 50\,000$$

oppure

$$10\,000(1+i)^{1/2+1} + R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/3}}(1+i_{1/3})^4 + X = 50\,000(1+i)^{-1}.$$

Domanda 5. Per rimborsare in 2 anni un debito di 1 000€ si usa un piano di ammortamento francese a rate semestrali, con un tasso di interesse annuo dell'8%.
L'importo della rata semestrale, arrotondata alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 274.99

✎

Al momento non serve un prospetto, dato che nell'ammortamento francese la rata R è costante e la si può trovare direttamente dal fatto che il valore attuale delle rate deve uguagliare il debito iniziale. Pertanto l'equazione è

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i_{1/2}} = 1\,000, \text{ da cui } R = \frac{1\,000}{\mathrm{a}_{\overline{4}|i_{1/2}}} = 274.9906.$$

La risposta corretta, con arrotondamento alla seconda cifra decimale, è quindi appunto 274.99.

Domanda 6. La prima quota capitale (cioè alla fine del 1° semestre), arrotondata alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 235.76

✎

La prima quota capitale è data dalla differenza tra la rata (costante) e la prima quota interessi. Indicando quest'ultima con I_1 (ma sarebbe anche appropriato indicarla con $I_{1/2}$), si ha

$$I_1 = 1\,000 \cdot i_{1/2} = 39.23. \text{ Pertanto } C_1 = R - I_1 = 235.76.$$

Domanda 7. Il debito residuo alla fine del 1° anno, arrotondato alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 519.23

✎

Aiutandoci ora con un prospetto (in cui t sono i semestri), possiamo calcolare in sequenza

$$D_1 = D_0 - C_1 = 764.24,$$
$$I_2 = D_1 \cdot i_{1/2} = 29.98,$$
$$C_2 = R - I_2 = 245.01$$

e infine

$$D_2 = D_1 - C_2 = 519.23.$$

t	R	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	274.99	235.76	39.23	764.247
2	274.99	245.01	29.98	519.23
3	·	·	·	·
4	·	·	·	·

Non è richiesto il completamento del piano di ammortamento.

Domanda 8. Il B.T.P. denominato Btp-1st27 4,50%, con scadenza il 01/09/2027, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4.50\%$. Il 01/05/2020 era quotato (corso secco) a 130. Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale (mesi interi).

Quale delle seguenti formule fornisce il corretto legame tra il prezzo tel quel e il tasso di rendimento a scadenza (ytm) del titolo?

(i) * $P_{tq} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{2/12} + 100(1 + ytm)^{-7-4/12}$

(ii) $P_{tq} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{3/12} + 100(1 + ytm)^{-7-4/12}$

(iii) $P_{tq} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{2/12} + 100(1 + ytm)^{-7-4/12}$

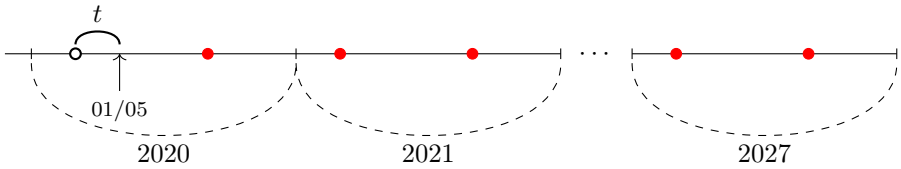
(iv) $P_{tq} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{14}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{2/6} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-15}$

✎

Non è difficile arrivare alla risposta corretta per esclusione.[1] Seguiamo però una via classica costruttiva.

Il titolo paga le cedole al 01/03 e al 01/09. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo rilevante.

[1] Le rate sono 15, quindi la risposta (iv) è da scartare. Il rateo è di due mesi, quindi la risposta (iii) è da scartare perché usa un tasso semestrale e misura il tempo in anni. Anche la risposta (ii) è da scartare perché conteggia tre mesi di rateo.



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.045}{2} \cdot 100 = 2.25.$$

Fino alla scadenza del 01/09/2027 il titolo paga $n = 15$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/03/2020) è $t = 2$ mesi.

La formula che fornisce il corretto legame tra il prezzo tel quel e il tasso di rendimento a scadenza del titolo è

$$P_{\text{tq}} = 2.25 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{2/12} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-15+2/6}$$

e per ovvi motivi l'unica risposta corretta è la prima.[2]

Domanda 9. Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/05/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%. Ora si consideri la tassazione.

Quale delle seguenti formule fornisce la corretta valutazione del rateo?

(i) * rateo $= 1.96875 \cdot \frac{2}{6}$

(ii) rateo $= 2.25 \cdot \frac{2}{6}$

(iii) rateo $= 1.96875 \cdot \frac{2}{12}$

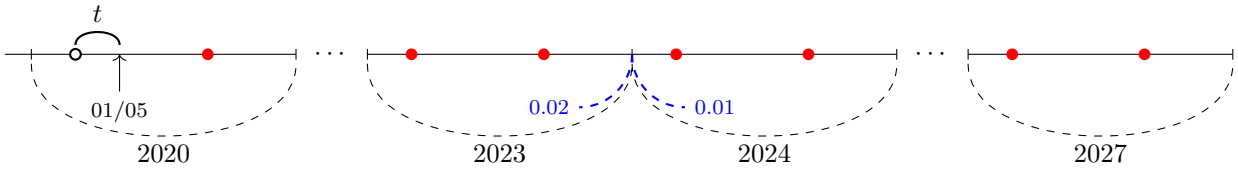
(iv) rateo $= 1.96875 \cdot \frac{3}{6}$

✎

Sono passati 2 mesi dalla cedola non incassata. La corretta valutazione del rateo, in presenza di tassazione, è

$$\text{rateo} = 2.25(1 - \gamma) \cdot \frac{2}{6} = 2.25(1 - 0.125) \cdot \frac{2}{6} = 1.96875 \cdot \frac{2}{6}.$$

Per le domande che seguono, in cui si considera il reinvestimento, può essere utile la rappresentazione che segue.



Domanda 10. Con i dati del BTP delle domande 8 e 9, quale delle seguenti formule fornisce il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate entro il 31/12/2023?

(i) * $M_1 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{7+4/6} (1 + 0.01)^{3+8/12}$

(ii) $M_1 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|0.02} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{7+4/6} (1 + 0.01)^{3+8/12}$

(iii) $M_1 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|0.02_{1/2}} (1 + 0.02)^{3+10/12} (1 + 0.01_{1/2})^{7}$

(iv) $M_1 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8} (1 + 0.01)^{4+8/12}$

[2] L'unica cosa da controllare è l'esponente del termine più a destra: dato che $-15 + \frac{2}{6} = -14 - 1 + \frac{2}{6} = -14 - \frac{4}{6}$, questi sono 14 semestri e 4 mesi, che misurati in anni sono 7 anni e 4 mesi.

✎

A causa del cambio di tasso dobbiamo conteggiare 7 cedole fino al 31/12/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino al 01/09/2027, al tasso dell'1%. Dal 01/03/2020 (ultima cedola non incassata) al 31/12/2023 sono 3 anni e 10 mesi (7 semestri e 4 mesi), dal 1/01/2024 al 01/09/2027 sono 3 anni e 8 mesi. Quindi

$$M_1 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{7+4/6} (1 + 0.01)^{3+8/12}.$$

Domanda 11. Quale delle seguenti formule fornisce il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate dopo il 31/12/2023?

(i) * $M_2 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{8}$

(ii) $M_2 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{7}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{7}$

(iii) $M_2 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01)^{3+1/2}$

(iv) $M_2 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{7}$

✎

Si tratta delle restanti 8 cedole, da capitalizzare fino alla scadenza (per 8 semestri). Il tasso da usare è il secondo.

$$M_2 = 1.96875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{8}.$$

Domanda 12. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

A.		-11		4		8		-3		3		B.		-12		5		6		-2		5
		0		1		2		3		4				0		1		2		3		4

Si ipotizzi un tasso esterno annuo del 10%.
Calcolati i REA dei due progetti, si fornisca la differenza tra i due, in particolare $REA_A - REA_B$, arrotondata alla seconda cifra decimale.

- risposta corretta -0.37

✎

Il tasso di valutazione è il del 10%. Il REA del progetto A è

$$\mathrm{REA}_A(0.1) = -11 + \frac{4}{1+0.1} + \frac{8}{(1+0.1)^2} - \frac{3}{(1+0.1)^3} + \frac{3}{(1+0.1)^4} = -0.95697.$$

Il REA del progetto B è

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -12 + \frac{5}{1+0.1} + \frac{6}{(1+0.1)^2} - \frac{2}{(1+0.1)^3} + \frac{5}{(1+0.1)^4} = -0.58343.$$

La differenza $REA_A - REA_B$, che risulta -0.37354, arrotondata alla seconda cifra decimale fornisce -0.37.

Domanda 13. In base al criterio del REA/VAN si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(i) * conviene il progetto B, ma nessuno conviene rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(ii) conviene il progetto A, ma nessuno conviene rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(iii) conviene il progetto B che, a differenza di A, conviene anche rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(iv) i progetti sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

✎

Dai REA trovati nella domanda precedente si vede che nessuno dei due progetti è conveniente rispetto all'investimento di denaro al tasso del 10% (REA entrambi negativi) e che tra i due è preferibile il progetto B.

Domanda 14. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta:

(i) * In base al flusso cumulato degli importi, per il progetto B il tasso interno di rendimento (TIR) esiste ed è unico, mentre per il progetto A non possiamo affermarlo

(ii) Il flusso degli importi cambia di segno 3 volte in entrambi, quindi il tasso interno di rendimento (TIR) non esiste per nessuno dei due progetti

(iii) In base al flusso cumulato degli importi, per entrambi i progetti possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento (TIR)

(iv) Il tasso interno di rendimento (TIR) non è utilizzabile finanziariamente a causa della presenza di importi negativi

✎

Consideriamo ora il flusso degli importi *cumulati* dei due progetti.

Per il progetto A abbiamo

$$-11\ ,\ -7\ ,\ +1\ ,\ -2\ ,\ +1$$

e per il progetto B

$$-12\ ,\ -7\ ,\ -1\ ,\ -3\ ,\ +2.$$

Pertanto per A gli importi cumulati cambiano di segno 3 volte, mentre per B una volta sola. L'affermazione corretta è quindi quella indicata.

Vediamo anche perché le altre sono errate. Nella (ii) non è vero che in entrambi i progetti gli importi cumulati cambiano di segno 3 volte; nella (iii): quando abbiamo più di un cambio di segno non è garantita l'esistenza e unicità del tasso interno; nella (iv): la presenza di valori negativi non è una condizione che mette in crisi il TIR, tutto dipende dall'andamento dei flussi cumulati.

Domanda 15. Relativamente al TIR del progetto B, si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(i) * Il TIR è compreso tra il 7 e l'8 percento

(ii) Il TIR è compreso tra il 6 e il 7 percento

(iii) Il TIR è compreso tra l'8 e il 9 percento

(iv) Il TIR non è unico

✎

Con qualche calcolo si trova che al tasso del 6% il REA di B è positivo, e questo significa che il TIR di B è maggiore del 6%. Si trova ancora che lo stesso succede con il tasso del 7%, mentre al tasso dell'8% il REA diventa negativo. Quindi il TIR del progetto B è compreso tra il 7% e l'8%.

PROVA online di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE

Vicenza, 26/01/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Attenzione. Tutte le risposte numeriche non intere vanno arrotondate alla 2ª cifra decimale.

Domanda 1. Per costituire un capitale di 100 000€ si versano rate trimestrali di 5 000€, la prima delle quali tra 6 mesi. Vogliamo trovare il **minimo** numero di rate che consente di costituire **almeno** 100 000€, con un tasso di interesse annuo $i = 5\%$.

La corretta (dis)equazione che permette di determinare questo numero è

(i) *

$$(1 + i_{1/4})^n \geq 1 + 20 i_{1/4}$$

(ii)

$$5\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} (1 + i_{1/4})^n \leq 100\,000$$

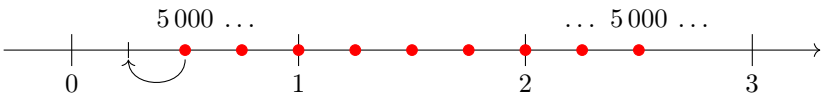
(iii)

$$5\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} \geq 100\,000$$

(iv)

$$n \geq \frac{\ln(1 + i_{1/4})}{\ln(1 + 20 i_{1/4})}$$

✎



Occorre che quanto versato con le n rate (non sappiamo ancora quante), valutato alla fine dei versamenti, sia maggiore o uguale di 100 000€. Quindi la disequazione è

$$5\,000 \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} (1 + i_{1/4})^n \geq 100\,000,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_{\overline{n}|i_{1/4}} (1 + i_{1/4})^n &\geq 20 \\ \frac{1 - (1 + i_{1/4})^{-n}}{i_{1/4}} (1 + i_{1/4})^n &\geq 20 \\ (1 + i_{1/4})^n - 1 &\geq 20 i_{1/4} \\ (1 + i_{1/4})^n &\geq 1 + 20 i_{1/4}. \end{aligned}$$

Domanda 2. Dopo quanti mesi da oggi viene raggiunto l'obiettivo?

- risposta corretta 57

✎

Partendo dalla disequazione trovata poco fa, applicando i logaritmi, ricaviamo

$$n \ln(1 + i_{1/4}) \geq \ln(1 + 20 i_{1/4}) \quad \text{da cui} \quad n \geq \frac{\ln(1 + 20 i_{1/4})}{\ln(1 + i_{1/4})} = 17.99 \text{ (trimestri)}.$$

Si tratta quindi di 18 trimestri interi, 19 da oggi.[3] Pertanto sono 57 mesi da oggi.

Domanda 3. Alla scadenza dei versamenti qual è la differenza tra il capitale voluto e quello effettivamente accumulato? Riportare solo gli euro interi.

[3] Attenzione, bisogna aggiungere un trimestre, non due!

- risposta corretta 32

✎

Quanto accumulato con le 18 rate trimestrali è

$$5\,000 \cdot a_{\overline{18}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{18} = 100\,032€.$$

Quindi si versano 32€ in più.

Domanda 4. Contestualmente al versamento della rata alla fine del 4° anno (da oggi) si decide di completare l'accumulo con un unico ulteriore versamento X, mantenendo lo stesso capitale costituito di 100 000€ e la stessa scadenza trovata in precedenza alla domanda 2. La corretta equazione che consente di trovare l'importo X da versare è

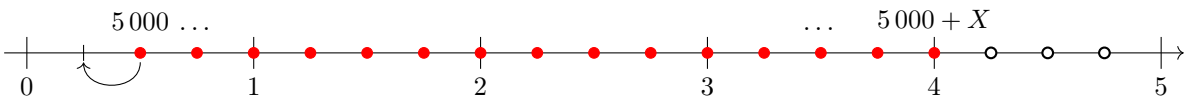
(i) * $5\,000 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{15} + X = 100\,000(1+i_{1/4})^{-3}$

(ii) $5\,000 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{15} + X \cdot (1+i_{1/4})^{3} = 100\,000$

(iii) $5\,000 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{15} \cdot (1+i)^{9/12} + X = 100\,000$

(iv) $5\,000 \cdot a_{\overline{16}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{16} + X = 100\,000$

✎



Alla fine del 4° anno si versa la 15ª rata e mancano quindi 3 trimestri per completare i versamenti. Valutando il tutto in quell'istante l'equazione del valore è quindi

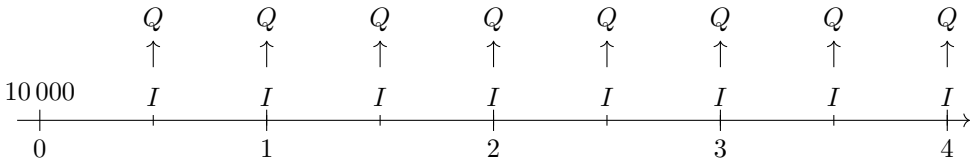
$$5\,000 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/4}}(1+i_{1/4})^{15} + X = 100\,000(1+i_{1/4})^{-3}.$$

Domanda 5. Per la restituzione di un prestito di 10 000€ si usa un piano di ammortamento americano a due tassi di 4 anni, con quote interessi $I = 400$€ e quote di accumulazione Q, entrambe semestrali posticipate. Indichiamo con i il tasso a debito su base annua e con $j = 2\%$, sempre su base annua, il tasso di accumulazione. Il tasso a debito i su base annua, espresso in percentuale, è

- risposta corretta 8.16

✎

Uno schema, anche se non immediatamente utile, può essere questo:



Dato che

$$I = 10\,000 \cdot i_{1/2} \quad \text{si ricava} \quad i_{1/2} = \frac{400}{10\,000} = 0.04 \quad \text{e quindi} \quad i = (1+i_{1/2})^2 - 1 = 0.0816 \quad (8.16\%).$$

Domanda 6. La corretta equazione per il calcolo di Q è

(i) * $Q \cdot a_{\overline{8}|j_{1/2}}(1+j)^4 = 10\,000$

(ii) $Q \cdot a_{\overline{8}|j}(1+j)^4 = 10\,000$

(iii) $Q \cdot a_{\overline{8}|j_{1/2}} = 10\,000$

(iv) $Q = \dfrac{10\,000}{a_{\overline{8}|j_{1/2}}(1+j_{1/2})^{-8}}$

✎

Indicando con $j_{1/2}$ il tasso di accumulazione su base semestrale, Q si determina in modo che il montante delle 8 quote sia uguale al capitale mutuato. Quindi l'equazione è

$$Q a_{\overline{8}|j_{1/2}}(1+j)^4 = 10\,000.$$

Domanda 7. La corretta equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo dell'ammortamento i^{eff} è

(i) * $(400+Q)a_{\overline{8}|i^{\text{eff}}_{1/2}} = 10\,000$

(ii) $(400+Q)a_{\overline{8}|i^{\text{eff}}_{1/2}}(1+i^{\text{eff}})^4 = 10\,000$

(iii) $(400+Q)\cdot(1+8\cdot i^{\text{eff}}_{1/2}) = 10\,000$

(iv) $8\cdot 400 + Q a_{\overline{8}|i^{\text{eff}}_{1/2}} = 10\,000$

✎

L'equazione del tasso effettivo di costo del piano si scrive uguagliando il valore attuale di quanto versato (interessi + accumulazione) al capitale preso a prestito. Quindi

$$(400+Q)a_{\overline{8}|i^{\text{eff}}_{1/2}} = 10\,000.$$

Domanda 8. La formula corretta per il calcolo del fondo di accumulazione dopo 2 anni e 9 mesi è

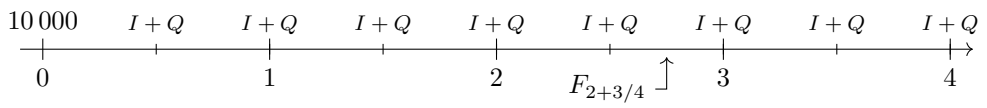
(i) * $Q \cdot a_{\overline{5}|j_{1/2}}(1+j_{1/2})^{5+1/2}$

(ii) $(400+Q)\cdot a_{\overline{5}|j_{1/2}}(1+j)^{2+9/12}$

(iii) $Q \cdot a_{\overline{5}|j_{1/2}}(1+j)^{2+9/6}$

(iv) $Q \cdot a_{\overline{5}|j_{1/2}}(1+j)^{2+6/12}$

✎



Il fondo di accumulazione F_t ($t = 2 + \frac{3}{4}$) è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 2 anni e 9 mesi. Si tratta di 5 quote di accumulazione e si ha (t è 5 semestri e mezzo)

$$F_t = Q \cdot a_{\overline{5}|j_{1/2}}(1+j_{1/2})^{5+1/2}.$$

Domanda 9. Un titolo obbligazionario quinquennale, con caratteristiche analoghe ad un BTP (cedole semestrali e rimborso alla pari), con tasso cedolare 4%, emesso il 01/05/2020, è stato acquistato il 01/09/2020 al corso secco 115. Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale (mesi interi).

Quale delle seguenti formule fornisce il corretto legame tra il prezzo tel quel e il tasso di rendimento a scadenza (ytm) del titolo?

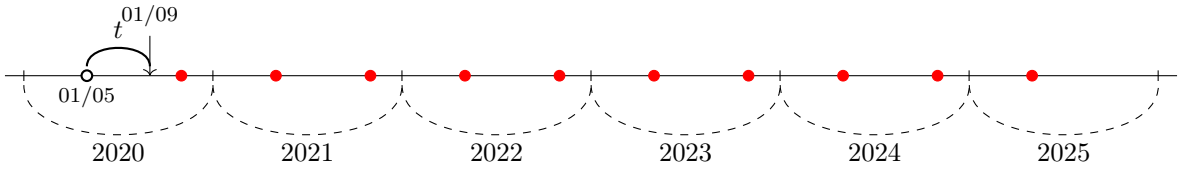
(i) * $115 + \frac{4}{3} = 2 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1+ytm)^{4/12} + 100(1+ytm)^{-5+4/12}$

(ii) $115 + \frac{4}{3} = 2 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{1/2} + 100(1+ytm)^{-5+4/12}$

(iii) $115 + \frac{4}{3} = 2 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1+ytm)^{4/12} + 100(1+ytm_{1/2})^{-10+4/12}$

(iv) $115 - \frac{4}{3} = 2 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1+ytm)^{4/12} + 100(1+ytm)^{-5}$

✎



Attenzione che abbiamo il corso secco (115) e quindi dobbiamo calcolare il prezzo tel quel P_{tq}. La cedola lorda è 2. Il rateo (4 mesi) è quindi $2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$. Pertanto $P_{\text{tq}} = 115 + \frac{4}{3}$. L'equazione è

$$115 + \frac{4}{3} = 2 \cdot a_{\overline{10}|ytm_{1/2}}(1+ytm)^{4/12} + 100(1+ytm)^{-5+4/12}.$$

Domanda 10. Ora si consideri la tassazione. Quale delle seguenti formule fornisce la corretta valutazione del rateo?

(i) * rateo $= 1.75 \cdot \frac{2}{3}$

(ii) rateo $= 1.75 \cdot \frac{4}{12}$

(iii) rateo $= 2 \cdot \frac{4}{6}$

(iv) rateo $= 1.75 \cdot \frac{1}{3}$

✎

La corretta valutazione del rateo in presenza di tassazione è

$$\text{rateo} = 2(1-\gamma) \cdot \frac{4}{6} = 1.75 \cdot \frac{2}{3}.$$

Domanda 11. Si ipotizzi di reinvestire le cedole fino al 30/06/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%. Quale delle seguenti formule fornisce il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate entro il 30/06/2023?

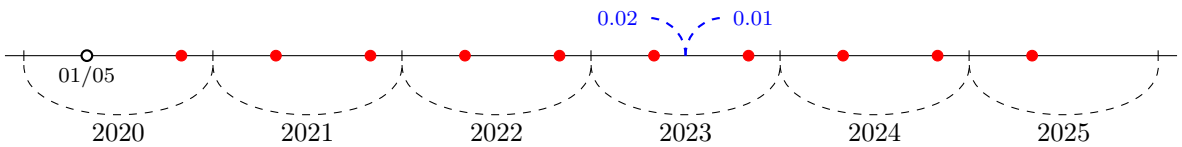
(i) * $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^{3+1/6}(1+0.01)^{2-1/6}$

(ii) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{5}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^{3+1/6}(1+0.01)^{2-1/6}$

(iii) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02)^{3+3/12}(1+0.01)^{1+4/12}$

(iv) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{6}|0.02_{1/2}}(1+0.02_{1/2})^{6+2/12}(1+0.01)^{2-2/12}$

✎



A causa del cambio di tasso dobbiamo conteggiare 6 cedole fino al 30/06/2023 al tasso del 2% e successivamente, fino al 01/05/2025, al tasso dell'1%. Dal 01/05/2020 (emissione) al 30/06/2023 sono 3 anni e 2 mesi, dal 1/07/2023 al 01/05/2025 sono 2 anni meno 2 mesi. Quindi

$$M_1 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|0.02_{1/2}} \, (1+0.02)^{3+2/12} \, (1+0.01)^{2-2/12}.$$

Domanda 12. Quale delle seguenti formule fornisce il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate dopo il 30/06/2023?

(i) * $M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} (1+0.01_{1/2})^4$

(ii) $M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} (1+0.01_{1/2})^3$

(iii) $M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} (1+0.02)^{2/12} (1+0.01)^{1+10/12}$

(iv) $M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} (1+0.01)^{1.5}$

✎

Si tratta delle restanti 4 cedole, da capitalizzare fino alla scadenza (per 4 semestri). Il tasso da usare è il secondo.

$$M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} \left(1+0.01_{1/2}\right)^4.$$

Domanda 13. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 8 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1% (modalità A), oppure con un finanziamento di 3 100€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 260€ (modalità B). Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 50€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10% e si dica quale delle seguenti alternative è corretta.

(i) * È preferibile la modalità B e lo scarto assoluto dei R.E.A. è minore di 6

(ii) È preferibile la modalità A e lo scarto assoluto dei R.E.A. è 5.87

(iii) È preferibile la modalità B e lo scarto assoluto dei R.E.A. è maggiore 6

(iv) È preferibile la modalità B e lo scarto assoluto dei R.E.A. è 55.87

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\mathrm{REA}_A(0.1) = -8\,000(1-0.01) = -7\,920.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 8 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 4 900€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 50€, e le 12 rate mensili posticipate di 260€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -4\,900 - 50 - 260 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -7\,914.13.$$

La modalità B è quindi preferibile alla modalità A. Lo scarto assoluto dei REA è $|\mathrm{REA}_A - \mathrm{REA}_B| = 5.87$, quindi minore di 6.

Domanda 14. Una prima approssimazione, con la formula studiata per questo tipo di situazioni, dei tassi T.A.N. e T.A.E.G. su base annua del finanziamento è (in percentuale, con arrotondamento alla 2ª cifra decimale)

(i) * $\mathrm{TAN}_0 \approx 1.20\%$ e $\mathrm{TAEG}_0 \approx 4.32\%$

(ii) $\mathrm{TAN}_0 \approx 1.19\%$ e $\mathrm{TAEG}_0 \approx 4.32\%$

(iii) $\text{TAN}_0 \approx 1.20\%$ e $\text{TAEG}_0 \approx 4.30\%$

(iv) $\text{TAN}_0 \approx 1.20\%$ e $\text{TAEG}_0 \approx 4.31\%$

✎

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$8\,000 = 4\,900 + 260 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 3\,100 = 260 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = Ra_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. Abbiamo studiato una formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione, ed è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 3\,100/260)}{13 \cdot 3\,100/260} = 0.000992556 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.011975$: in percentuale, con arrotondamento alla 2ª cifra decimale si ha quindi $\approx 1.20\%$.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$8\,000 = 4\,900 + 50 + 260 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 3\,050 = 260 \cdot a_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 3\,050/260)}{13 \cdot 3\,050/260} = 0.003530895 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAEG}_0 = 0.043203$: in percentuale, con arrotondamento alla 2ª cifra decimale si ha quindi $\approx 4.32\%$.

Domanda 15. Il tasso effettivo di costo i^{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento è

(i) * minore del 9.70%

(ii) maggiore del 9.70%

✎

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$7\,920 = 4\,900 + 50 + 260 \cdot a_{\overline{12}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 9.70% è

$$7\,918.45 < 7\,920$$

e quindi il tasso effettivo è minore del 9.70%.

PROVA online di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE

Vicenza, 10/06/2021

La risposta corretta (sempre la prima) è indicata dall'asterisco.

Domanda 1. Per costituire un capitale di 30 000€ in 4 anni si versano rate semestrali R, la prima delle quali tra un anno e l'ultima alla fine del 4° anno, e un importo aggiuntivo di 10 000€ alla fine del secondo anno. Il tasso di interesse annuo sul deposito è $i = 5\%$.

La corretta equazione del valore che permette di determinare l'ammontare della rata R è

(i) * $R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^7 + 10\,000(1+i)^2 = 30\,000$

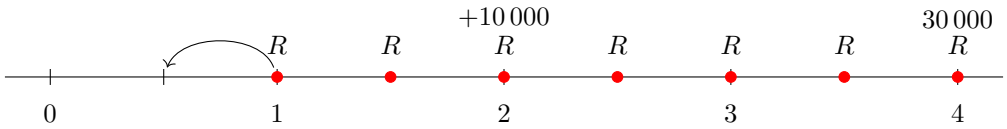
(ii) $R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i)^7 + 10\,000(1+i)^2 = 30\,000$

(iii) $R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^7 + 10\,000 = 30\,000$

(iv) $R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^6 + 10\,000(1+i)^2 = 30\,000$

✎

Una rappresentazione può aiutare.



Abbiamo 7 rate da capitalizzare alla fine del 4° anno e l'importo aggiuntivo di 10 000€ da capitalizzare di 2 anni. L'equazione del valore è

$$R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^7 + 10\,000(1+i)^2 = 30\,000.$$

Domanda 2. Il valore della rata R, arrotondata alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 2516.42

✎

Dall'equazione trovata poco fa si ricava

$$R = \frac{30\,000 - 10\,000(1+i)^2}{a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^7} = 2516.42€.$$

Domanda 3. Sia X il capitale accumulato subito **prima** di versare la rata a metà del 3° anno. La corretta equazione che permette di determinare l'ammontare di X è

(i) * $X = R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^4 + 10\,000(1+i_{1/2})$

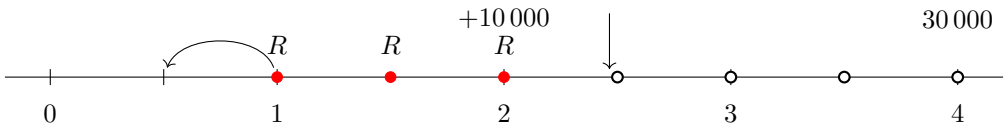
(ii) $X = R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^3 + 10\,000(1+i_{1/2})$

(iii) $X = R \cdot a_{\overline{4}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^4 + 10\,000(1+i_{1/2})$

(iv) $X = R \cdot (1+i_{1/2})^3 + R \cdot (1+i_{1/2})^2 + R \cdot (1+i_{1/2}) + R + 10\,000(1+i_{1/2})$

✎

Modifichiamo la rappresentazione per rendere meglio la situazione proposta dalla domanda.



Subito prima di versare la rata a metà del 3° anno sono state già versate 3 rate, che vanno capitalizzate per 4 semestri. L'importo aggiuntivo va capitalizzato per un solo semestre. Quindi l'equazione è

$$X = R \cdot a_{\overline{3}|i_{1/2}}(1+i_{1/2})^4 + 10\,000(1+i_{1/2}).$$

Domanda 4. Nell'ipotesi di non versare l'importo aggiuntivo di 10 000€, il montante del capitale accumulato alla fine del 4° anno è dato da

(i) * $30\,000 - 10\,000(1+i)^2$

(ii) $30\,000 - 10\,000$

(iii) $R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i)^6$

(iv) $30\,000 - 10\,000(1+i_{1/2})^5$

✎

Nell'ipotesi fatta, per trovare il montante del capitale accumulato alla fine del 4° anno si può procedere in più modi diversi. Ne propongo due. Il montante è dato dalle sole rate, quindi

$$R \cdot a_{\overline{7}|i_{1/2}}(1+i)^7 \text{ (quindi la risposta (iii) è errata).}$$

Oppure si può più semplicemente osservare che ai 30 000€ manca il valore dei 10 000€ "portati" al 4° anno. Quindi quanto accumulato con le sole rate è

$$30\,000 - 10\,000(1+i)^2.$$

Domanda 5. Per rimborsare in 2 anni un debito di 2 000€ si usa un piano di ammortamento francese a rate trimestrali, con un tasso di interesse annuo del 9%.

Attenzione. Per fornire le risposte numeriche si svolgano i calcoli mantenendo tutte le cifre decimali e si faccia l'arrotondamento solo per fornire la risposta.

L'importo della rata trimestrale, arrotondata alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 275.12

✎

Al momento non serve un prospetto, dato che nell'ammortamento francese la rata R è costante e la si può trovare direttamente dal fatto che il valore attuale delle rate deve uguagliare il debito iniziale. Pertanto l'equazione è

$$R \cdot a_{\overline{8}|i_{1/4}} = 2\,000 \quad \text{da cui} \quad R = \frac{2\,000}{a_{\overline{8}|i_{1/4}}} = 275.11597.$$

La risposta corretta, con arrotondamento alla seconda cifra decimale, è quindi appunto 275.12€.

Domanda 6. La prima quota capitale (cioè alla fine del 1° trimestre), arrotondata alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 231.56

✎

La prima quota capitale è data dalla differenza tra la rata (costante) e la prima quota interessi. Indicando quest'ultima con I_1 (ma sarebbe anche appropriato indicarla con $I_{1/4}$), si ha

$$I_1 = 2\,000 \cdot i_{1/4} = 43.55636. \text{ Pertanto } C_1 = R - I_1 = 231.55961 \text{ (arrotondato a 231.56€).}$$

Domanda 7. Il debito residuo alla fine del primo semestre (dopo due rate), arrotondato alla seconda cifra decimale, è

- risposta corretta 1531.84

✎

Aiutandoci ora con un prospetto (in cui t sono i trimestri), possiamo calcolare in sequenza

$$D_1 = D_0 - C_1 = 1768.44039,$$
$$I_2 = D_1 \cdot i_{1/4} = 38.51341,$$
$$C_2 = R - I_2 = 236.60256$$

t	R	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	2 000
1	275.12	231.56	43.56	1768.44
2	275.12	236.60	38.51	1531.84
...	...	...	...	...

e infine

$$D_2 = D_1 - C_2 = 1531.83784 \text{ (arrotondato a 1531.84€)}.$$

Non è richiesto il completamento del piano di ammortamento.

Domanda 8. Il B.T.P. denominato Btp-1ot26 4%, con scadenza il 01/10/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4\%$. Il 01/03/2021 era quotato (corso secco) a 120. Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale (mesi interi).

Quale delle seguenti formule fornisce il corretto legame tra il prezzo tel quel e il tasso di rendimento a scadenza (ytm) del titolo?

(i) * $P_{tq} = 2 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{5/12} + 100(1 + ytm)^{-6+5/12}$

(ii) $P_{tq} = 2 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{5/6} + 100(1 + ytm)^{-6+5/6}$

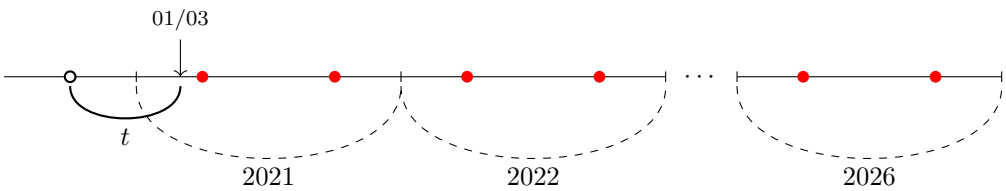
(iii) $P_{tq} = 2 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{5/12} + 100(1 + ytm)^{-6+5/12}$

(iv) $P_{tq} = 2 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{5/12} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-12+5/12}$

✎

Si può arrivare alla risposta corretta per esclusione osservando che il rateo è di 5 mesi e quindi scartando le risposte in cui il tasso e la misura del tempo del rateo non sono coerenti.

Una rappresentazione come sempre aiuta. Osserviamo che il titolo paga le cedole al 01/04 e al 01/10 e ogni anno porta 2 cedole (che sono quindi 12 in tutto).



Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F = \frac{0.04}{2} \cdot 100 = 2.$$

Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/10/2020) è $t = 5$ mesi.

La formula che fornisce il corretto legame tra il prezzo tel quel e il tasso di rendimento a scadenza del titolo è

$$P_{\mathrm{tq}} = 2 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/2}}(1 + ytm)^{5/12} + 100(1 + ytm)^{-6+5/6}.$$

Domanda 9. Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 01/03/2021. Ora si consideri la tassazione.

Quale delle seguenti formule fornisce la corretta valutazione del prezzo tel quel?

(i) * $P_{tq} = 120 + 1.75 \cdot \frac{5}{6}$

(ii) $P_{tq} = 120 + 2 \cdot \frac{5}{6}$

(iii) $P_{tq} = 120 + 1.75 \cdot \frac{5}{12}$

(iv) $P_{tq} = 120 + 2 \cdot 0.125 \cdot \frac{5}{6}$

✎

Sono passati 5 mesi dalla cedola non incassata.
La corretta valutazione del prezzo tel quel (corso secco + rateo) è

$$P_{\text{tq}} = 120 + 2(1-\gamma) \cdot \frac{5}{6} = 120 + 2(1-0.125) \cdot \frac{5}{6} = 120 + 1.75 \cdot \frac{5}{6}.$$

Domanda 10. Con i dati del BTP delle domande 8 e 9, ipotizzando di reinvestire le cedole fino al 31/12/2024 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%, quale delle seguenti formule fornisce M_1, il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate entro il 31/12/2024?

(i) * $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8+1/2} (1 + 0.01)^{1+9/12}$

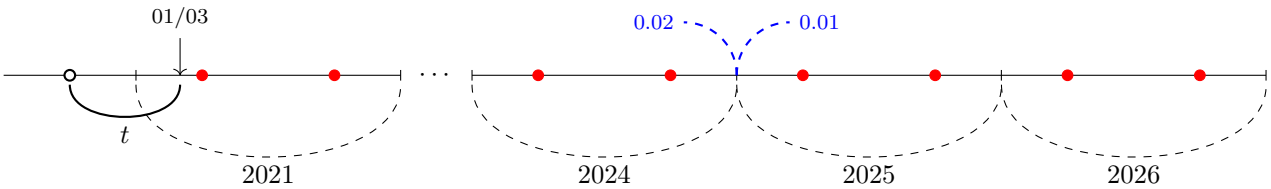
(ii) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{7+3/6} (1 + 0.01)^{1+9/12}$

(iii) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8+1/2} (1 + 0.01_{1/2})^{3}$

(iv) $M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{7+1/2} (1 + 0.01_{1/2})^{3+3/12}$

✎

Può essere utile una nuova rappresentazione.



A causa del cambio di tasso dobbiamo conteggiare le 8 cedole fino al 31/12/2024 al tasso del 2% e successivamente, fino al 01/10/2026, al tasso dell'1%.

$$M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{8}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{8+3/6} (1 + 0.01)^{2-3/12},$$

che equivale alla prima risposta.

Domanda 11. Quale delle seguenti formule fornisce M_2, il corretto montante alla scadenza delle cedole incassate dopo il 31/12/2024?

(i) * $M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01)^{2}$

(ii) $M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{3}$

(iii) $M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{3/6} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{3+3/6}$

(iv) $M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{4}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^{3+3/6}$

✎

Si tratta delle restanti 4 cedole, da capitalizzare fino alla scadenza (per 4 semestri). Il tasso da usare è il secondo.

$$M_2 = 1.75 \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01_{1/2}} \left(1 + 0.01_{1/2}\right)^4 .$$

Domanda 12. Si considerino i seguenti due progetti di investimento:

$A.$	-13	4	7	-1	4	
	0	1	2	3	4	
$B.$	-10	4	7	-2	2	
	0	1	2	3	4	

Si ipotizzi un tasso esterno annuo del 10%.

Calcolati i REA dei due progetti, si fornisca la differenza tra i due, in particolare $REA_A - REA_B$, arrotondata alla seconda cifra decimale.

- risposta corretta -0.88

✎

Il tasso di valutazione è il del 10%. Il REA del progetto A è

$$\mathrm{REA}_A(0.1) = -13 + \frac{4}{1+0.1} + \frac{7}{(1+0.1)^2} - \frac{1}{(1+0.1)^3} + \frac{4}{(1+0.1)^4} = -1.59777.$$

Il REA del progetto B è

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -10 + \frac{4}{1+0.1} + \frac{7}{(1+0.1)^2} - \frac{2}{(1+0.1)^3} + \frac{2}{(1+0.1)^4} = -0.71512.$$

La differenza $REA_A - REA_B$, che risulta -0.88266, arrotondata alla seconda cifra decimale fornisce -0.88.

Domanda 13. In base al criterio del REA/VAN si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(i) * conviene il progetto B, ma nessuno conviene rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(ii) conviene il progetto A, ma nessuno conviene rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(iii) conviene il progetto B che, a differenza di A, conviene anche rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

(iv) i progetti sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro a quel tasso

✎

Dai REA trovati nella domanda precedente si vede che nessuno dei due progetti è conveniente rispetto all'investimento di denaro al tasso del 10% (REA entrambi negativi) e che tra i due è preferibile il progetto B.

Domanda 14. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta:

(i) * In base al flusso cumulato degli importi, per il progetto A il tasso interno di rendimento (TIR) esiste ed è unico, mentre per il progetto B non possiamo affermarlo

(ii) Il flusso degli importi cambia di segno 3 volte in entrambi, quindi il tasso interno di rendimento (TIR) non esiste per nessuno dei due progetti

(iii) In base al flusso cumulato degli importi, per entrambi i progetti possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento (TIR)

(iv) Il tasso interno di rendimento (TIR) non è utilizzabile finanziariamente a causa della presenza di importi negativi

✎

Consideriamo ora il flusso degli importi *cumulati* dei due progetti.

Per il progetto A abbiamo

$$-13\ ,\ -9\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ +1$$

e per il progetto B

$$-10\ ,\ -6\ ,\ +1\ ,\ -1\ ,\ +1.$$

Pertanto gli importi cumulati di B cambiano di segno 3 volte, mentre quelli di A una volta sola. L'affermazione corretta è quindi quella indicata.

La risposta (iii) è errata dato che l'esistenza e unicità del tasso interno è garantita solo se abbiamo un solo cambio di segno; la (iv) è errata in quanto la presenza di valori negativi non è una condizione che mette in crisi il TIR, tutto dipende dall'andamento dei flussi cumulati.

Domanda 15. Relativamente al TIR del progetto A, si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(i) * Il TIR è minore del 5 percento

(ii) Sulla base del REA, il TIR è maggiore del 10 percento

(iii) Il TIR è compreso tra il 9 e il 10 percento

(iv) Per trovare un intervallo che comprende il TIR servono almeno 3 tentativi

✎

Se calcoliamo il REA di A al tasso del 5% otteniamo -0.41, quindi negativo. Questo significa che il TIR di A è minore del 5%.

Si può verificare che tutte le altre risposte sono errate. La (ii) e la (iii) banalmente; per la (iv), altrettanto banalmente, dato che non c'è alcuna richiesta sull'intervallo, possiamo osservare che con un solo tentativo (il tasso del 5%) abbiamo potuto dire che il TIR è nell'intervallo $[0, 0.05]$.

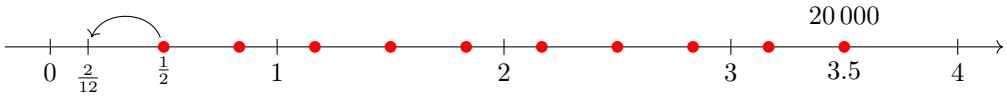
ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 03/09/2021

ESERCIZIO 1. Per costituire un capitale di 20 000€ in 3 anni e mezzo si versano rate quadrimestrali R, la prima delle quali tra 6 mesi (e l'ultima dopo 3 anni e mezzo). Il tasso di interesse annuo sul deposito è $i = 5\%$. Si determini l'ammontare della rata R.

Supponiamo poi, arrivati alla fine del terzo anno, di voler completare il piano di accumulo con un unico e ultimo versamento V. Si determini l'ammontare di tale versamento. (Attenzione, l'obiettivo è sempre quello di costituire 20 000€ dopo 3 anni e mezzo.)

✎

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



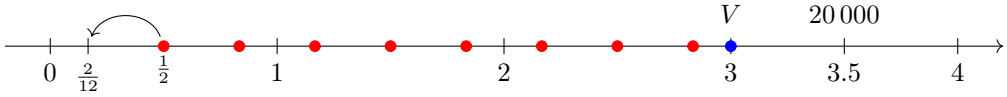
Le rate quadrimestrali sono 10. Indicando con R la rata, l'equazione del valore è quindi

$$R \cdot a_{\overline{10}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12}(1+i)^{3.5} = 20\,000, \quad \text{con } i = 0.05.$$

Dato che $i_{1/3} = (1+0.05)^{1/3} - 1 = 0.016396357$, si trova

$$R = \frac{20\,000}{a_{\overline{10}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12}(1+i)^{3.5}} = 1\,856.83€.$$

Passiamo alla seconda modalità di costituzione del capitale di 20 000€ tra 3 anni e mezzo. Arrivati alla fine del terzo anno sono state versate 8 rate. Dobbiamo trovare il valore di un unico versamento V (fra 3 anni) che permetta di completare il piano di accumulo. Lo schema può essere questo:



L'equazione del valore è ora

$$R \cdot a_{\overline{8}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12}(1+i)^{3.5} + V \cdot (1+i)^{1/2} = 20\,000.$$

Da questa si ricava

$$V = \frac{20\,000 - R \cdot a_{\overline{8}|i_{1/3}}(1+i)^{-2/12}(1+i)^{3.5}}{(1+i)^{1/2}} = 3\,653.88€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito D_0 di 1 000€, si usa un piano di ammortamento con quote interessi anticipate e le seguenti caratteristiche:

- una rata R_0 fatta della sola quota interessi anticipata I_0,
- una rata R_1 di quota capitale $C_1 = \frac{1}{4}D_0$ e quota interessi I_1,
- una rata R_2 di 400€, di quota capitale C_2 e quota interessi I_2,
- un'ultima rata R_3, di sola quota capitale C_3.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.

✎

Il prospetto iniziale potrebbe essere quello qui a fianco.

Le quote interessi sono anticipate. La prima quota interessi è (d è il tasso di sconto)

$$I_1 = d \cdot 1\,000 = 0.0\overline{90} \cdot 1\,000 = 90.91€.$$

k	$R_k = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	I_0	0	$I_0 \leftarrow$	$1\,000$
1	R_1	C_1	$I_1 \leftarrow$	D_1
2	400	C_2	$I_2 \leftarrow$	D_2
3	R_3	C_3	0	0

Per la prima quota capitale si ha

$$C_1 = \frac{1}{4} D_0 = 250€, \quad \text{da cui} \quad D_1 = 750€.$$

Possiamo ora ricavare la quota interessi

$$I_1 = d \cdot 750 = 68.18€.$$

Per completare il piano occorre impostare un sistema.

$$\begin{cases} C_2 + I_2 = 400 \\ D_2 = 750 - C_2 \\ I_2 = d \cdot D_2. \end{cases}$$

Ricavando C_2 e I_2 dalla seconda e terza equazione in funzione di D_2 si ha

$$C_2 = 750 - D_2 \quad \text{e} \quad I_2 = d \cdot D_2.$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$750 - D_2 + d \cdot D_2 = 400, \quad \text{da cui} \quad D_2(1-d) = 350 \quad \text{da cui} \quad D_2 = \frac{350}{1-d} = 385€.$$

Pertanto si ha di conseguenza $I_2 = d \cdot 385 = 35€$, $C_2 = 400 - I_2 = 365€$ e $C_3 = 385€$.

Le rate sono quindi $R_0 = I_0 = 90.91€$, $R_1 = C_1 + I_1 = 318.18€$, $R_2 = 400€$ e $R_3 = C_3 = 385€$.

Questo è il prospetto complessivo.

t	$R_k = C_k + I_k$	C_k	I_k	D_k
0	90.91	0	$90.91 \leftarrow$	$1\,000$
1	318.18	250	$68.18 \leftarrow$	750
2	400	365	$35 \leftarrow$	385
3	385	385	0	0

La verifica dell'equivalenza finanziaria del piano consiste nel verificare che

$$90.91 + 318.18 \cdot 1.1^{-1} + 400 \cdot 1.1^{-2} + 385 \cdot 1.1^{-3} = 1\,000.$$

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1nv26 7,25%`, con scadenza il 01/11/2026, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 7.25\%$. Il 29/01/2020 era quotato (corso secco) a 144.02. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. (Non si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

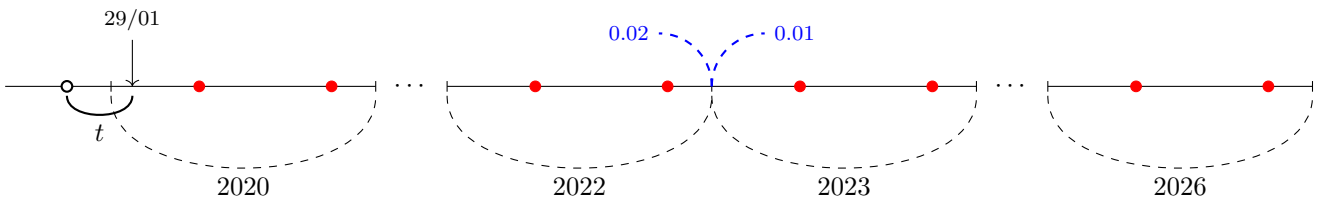
Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 29/01/2020, di reinvestire le cedole fino al 31/12/2022 al tasso del 2% e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P. (Qui si consideri la tassazione.)

✎

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. a partire dalla data del 29/01/2020.

Non consideriamo la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F = \frac{0.075}{2} \cdot 100 = 3.75.$$



Fino alla scadenza del 01/11/2026 il titolo paga $n = 14$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2019) è $t = 30 \cdot 2 + 29 = 89$ giorni. Calcoliamo il prezzo tel quel.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 3.75 \cdot \frac{89}{180} = 145.874.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 3.75 \cdot \text{a}_{\overline{14}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{89/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-14+89/180}.$$

Come si sa il calcolo della soluzione esatta è problematico. Viene chiesto solo di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore dell'1%. Basta calcolare il termine di destra al tasso dell'1% (il tasso semestrale equivalente è $0.01_{1/2} = 0.004987562$): si trova il valore $144.213 > P_{\text{tq}}$. Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era maggiore dell'1%.

Passiamo ora alla seconda domanda. L'ipotesi è di aver acquistato il titolo in data 29/01/2020. Dato che ora dobbiamo considerare la tassazione, la cedola netta è

$$\text{Ced} = 3.75(1 - 0.125) = 3.28125.$$

Occorre anche ricalcolare il prezzo di acquisto.

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 144.02 + 3.28125 \cdot \frac{89}{180} = 145.642.$$

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. I montanti vanno calcolati alla scadenza, cioè alla data del 01/11/2026. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2% fino a tutto il 2022 e successivamente, fino alla scadenza, al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-89/360+7}.$$

Faccio notare che il tasso usato è su base annua e quindi anche i tempi devono essere misurati in anni.

Ora i montanti degli importi a credito. Dato che il tasso a credito cambia il 31/12/2022, dividiamo il calcolo in due parti, osservando che ci sono 6 cedole da valutare al tasso $i^{(1)} = 2\%$ (montante M_1) e le restanti 8 cedole al tasso $i^{(2)} = 1\%$ (montante M_2).

Servono i tassi semestrali equivalenti

$$0.02_{1/2} = 0.009950494 \qquad \text{e} \qquad 0.01_{1/2} = 0.004987562.$$

Si ha (attenzione ai tassi e alla corrispondente misura dei tempi)

$$M_1 = \text{Ced} \cdot \text{a}_{\overline{6}|0.02_{1/2}} \left(1 + 0.02_{1/2}\right)^{6+2/6} \cdot (1 + 0.01)^{4-2/12} = 21.03785718$$

e

$$M_2 = \text{Ced} \cdot \text{a}_{\overline{8}|0.01_{1/2}} \cdot (1 + 0.01)^4 = 26.71283178.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{\text{eff}})^{-89/360+7} = M_1 + M_2 + 100.$$

Si trova

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M_1 + M_2 + 100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-89/360+7)} - 1 = 0.002130986.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 12 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1% (modalità A), oppure con un finanziamento di 8 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 680€ (modalità B). Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 30€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10% e si dica quale modalità è preferibile.

Si determini una prima approssimazione (con la formula studiata per questo tipo di situazioni) dei tassi T.A.N. e T.A.E.G. su base annua del finanziamento, indicando poi se l'approssimazione trovata è per difetto o per eccesso.

Si dica infine se il tasso effettivo di costo i^{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento è maggiore dell'8%.

✎

Indichiamo con A la prima modalità, cioè il pagamento immediato con lo sconto, e con B la seconda, cioè con il finanziamento.

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A(0.1) = -12\,000(1 - 0.01) = -11\,880.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 12 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 4 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 30€, e le 12 rate mensili posticipate di 680€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -4\,000 - 30 - 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -11\,782.33.$$

La modalità B è quindi preferibile alla modalità A.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, l'equazione da considerare è

$$12\,000 = 4\,000 + 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 8\,000 = 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\text{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. La formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 8\,000/680)}{13 \cdot 8\,000/680} = 0.00307692 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.03755438$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$8\,000 = 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $7\,999.12 < 8\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$12\,000 = 4\,000 + 30 + 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 7\,970 = 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 7\,970/680)}{13 \cdot 7\,970/680} = 0.0036676 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\text{TAEG}_0 = 0.04490993$.

Per valutare il tipo di approssimazione consideriamo l'equazione

$$7\,970 = 680 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $7\,968.75 < 7\,970$. Anche qui l'approssimazione è per eccesso.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$11\,880 = 4\,000 + 30 + 680 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova dell'8% ($0.08_{1/12} = 0.00643403$) è

$$11\,858.74 < 11\,880$$

e quindi il tasso effettivo è minore dell'8%.