Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2022/23

Alberto Peretti

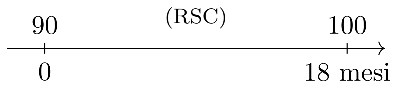
Settembre 2023

PROVA INTERMEDIA di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 07/11/2022

ESERCIZIO 1. Si supponga che nel RSC siano ritenuti equivalenti 90€ in $t = 0$ e 100€ in $t = 18$ mesi. Si determinino, nel RIS e nel RIC, con riferimento alla scadenza di 15 mesi, i montanti di 100€ e i valori attuali di 150€.

✎

Il semplice schema che esprime l'equivalenza dei due importi nel tempo (nel RSC) è il seguente:



L'equivalenza porta all'equazione del valore

$$90 = 100\left(1 - d \cdot \frac{18}{12}\right), \quad \text{da cui si ricava} \quad d = \frac{12}{18}\left(1 - \frac{90}{100}\right) = \frac{1}{15} = 0.0\overline{6}.$$

Questo è un tasso di sconto su base annua. Lo converto nell'equivalente tasso di interesse (su base annua)

$$i = \frac{d}{1-d} = 0.071428571.$$

Ora calcoliamo quanto richiesto, cioè, nel RIS e nel RIC, il montante di 100€ e il valore attuale di 150€ con un intervallo temporale di 15 mesi.

Nel RIS.

$$M_{15\text{mesi}} = 100\left(1 + i \cdot \frac{15}{12}\right) = 108.93€$$

e

$$V_0 = \frac{150}{1 + i \cdot \frac{15}{12}} = 137.70€.$$

Nel RIC.

$$M_{15\text{mesi}} = 100(1+i)^{15/12} = 109.01€$$

e

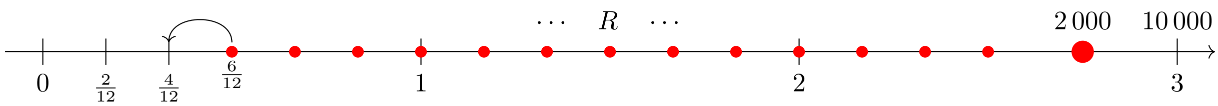
$$V_0 = 150(1+i)^{-15/12} = 137.61€.$$

ESERCIZIO 2. Si vuole costituire un capitale di 10 000€ alla fine del terzo anno versando rate bimestrali, la prima tra 6 mesi e l'ultima 6 mesi prima della scadenza, e un ulteriore versamento aggiuntivo di 2 000€ 3 mesi prima della scadenza. Si determini la rata bimestrale ipotizzando un tasso di interesse annuo del 10%.

Con rate bimestrali di 600€, la prima fra 3 mesi, in quale istante di tempo quanto già versato supera per la prima volta il valore di 10 000€?

✎

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti.



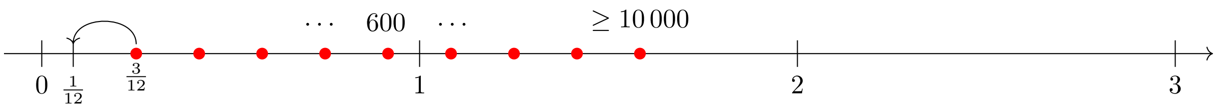
L'equazione del valore che consente di determinare la rata mensile R è

$$R \cdot a_{\overline{13}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3 + 2\,000(1+i)^{3/12} = 10\,000.$$

Serve ovviamente il tasso bimestrale equivalente al tasso annuo del $i = 10\%$. Si ha $i_{1/6} = (1+i)^{1/6} - 1 = 0.016011867$. La rata è quindi

$$R = \frac{10\,000 - 2\,000(1+i)^{3/12}}{a_{\overline{13}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3} = 529.25€.$$

Ora uno schema per la seconda domanda.



Dobbiamo trovare il numero n di rate bimestrali di 600€ che fa superare per la prima volta il valore di 10 000€. Attenzione, i 10 000€ non sono più riferiti all'istante di tempo $t = 3$, cioè la fine del terzo anno, ma alla fine dell'n-esimo bimestre. Nella rappresentazione qui sopra ipotizzo che le rate siano 9.

L'equazione è

$$600 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^n \geq 10\,000,$$ [1]

che si può scrivere come

$$\frac{1-(1+i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}}(1+i_{1/6})^n \geq \frac{10\,000}{600}.$$

Indicando per comodità con A la frazione a destra si ottiene

$$(1+i_{1/6})^n - 1 \geq i_{1/6}A \quad ; \quad (1+i_{1/6})^n \geq 1 + i_{1/6}A \quad ; \quad n\ln(1+i_{1/6}) \geq \ln(1+i_{1/6}A) \quad ; \quad n \geq \frac{\ln(1+i_{1/6}A)}{\ln(1+i_{1/6})} = 14.89.$$

Quindi per superare i 10 000€ servono 15 versamenti. Per rispondere esattamente alla domanda (in quale istante di tempo questo avviene?), i mesi da oggi sono $1 + 15 \cdot 2 = 31$, cioè 5 mesi prima della scadenza dei 3 anni.

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 12\,000$€, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 2 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 24 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 5% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo dell'8%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 7%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

✎

Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 12\,000$€, l'anticipo $A = P \cdot 0.1 = 1\,200$€ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 600$€.

La società finanziaria spende $12\,000 \cdot (1 - 0.05) = 11\,400$€ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 8\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.08^{1/12} - 1 = 0.00643403$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$11\,400 = 1\,200 + R \cdot a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 600(1+i)^{-2}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{11\,400 - 1\,200 - 600(1+i)^{-2}}{a_{\overline{24}|i_{1/12}}} = 436.82€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 1 200€, un riscatto finale di 600€ e un canone di 24 rate trimestrali di 436.82€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi 12 000€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

[1] Si osservi che non conviene portare a $t = 0$ il valore complessivo delle rate ma conviene portare il tutto avanti di n bimestri, dato che i 10 000€ sono riferiti appunto alla fine di questi.

La sua equazione del valore è quindi

$$12\,000 = 1\,200 + 436.82\mathrm{a}_{\overline{24}|i_{1/12}} + 600(1+i)^{-2},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 7% proposto dalla banca per un prestito di 12 000€. Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 7\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i^{(B)}_{1/12} = 0.00565414$, si trova

$$1\,200 + 436.82\mathrm{a}_{\overline{24}|i^{(B)}_{1/12}} + 600(1+i^{(B)})^{-2} = 11\,501.76€.$$

Dato che $11\,501.76 < 12\,000$, il tasso della banca sconta maggiormente gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è maggiore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il contratto di leasing.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€, si usa un piano di ammortamento a rate posticipate che ogni anno aumentano di 100€.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Si dica infine, in caso di mancato pagamento dell'intera rata alla fine del quarto anno e di rinvio di questa alla fine del quinto, quale quota interessi, quota capitale e rata questo comporta.

✎

Possiamo determinare la prima rata, che indico con R, che poi cresce in progressione aritmetica. O scriviamo per esteso il valore attuale oppure usiamo la formula del valore attuale di rate in progressione aritmetica.

Nel primo caso abbiamo l'equazione

$$1\,000 = R(1+i)^{-1} + (R+100)(1+i)^{-2} + (R+200)(1+i)^{-3} + (R+300)(1+i)^{-4},$$

che porta a

$$R\Big((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4}\Big) = 1\,000 - 100(1+i)^{-2} - 200(1+i)^{-3} - 300(1+i)^{-4}$$

e quindi

$$R = \frac{1\,000 - 100(1+i)^{-2} - 200(1+i)^{-3} - 300(1+i)^{-4}}{(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4}}.$$

Oppure, nel secondo caso, con la formula,

$$1\,000 = R\cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|i} + 100\cdot\frac{\mathrm{a}_{\overline{4}|i} - 4(1+i)^{-4}}{i} = 177.35€.$$

Ora che abbiamo la prima rata il piano si completa facilmente. I primi passaggi sono:

$$I_1 = 0.1\cdot 1\,000 = 100€.$$

Possiamo quindi ricavare la prima quota capitale

$$C_1 = R_1 - I_1 = 77.35€.$$

Ora il nuovo debito residuo

$$D_1 = 1\,000 - C_1 = 922.65€.$$

La nuova quota interessi

$$I_2 = 0.1\cdot 922.65 = 92.26€, \quad \text{e così via.}$$

Ecco il prospetto completo.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	177.35	77.35	100	922.65
2	277.35	185.09	92.26	737.56
3	377.35	303.60	73.76	433.96
4	477.35	433.96	43.40	0

Veniamo ora all'ultima domanda, che prospetta l'eventualità che salti il pagamento dell'intera rata alla fine del quarto anno, con rinvio della stessa di un anno.

Propongo due modi di procedere.

Alla fine del 4° anno dovevo $D_3 + I_4 = D_3 + iD_3$. Devo portare questo importo avanti di un anno: diventa quindi

$$R_5 = (D_3 + iD_3)(1 + i) = D_3(1 + i)^2 = 525.09€.$$

La parte di quota capitale C_5 si mantiene uguale a $D_3 = 433.96€$, quello che era il debito residuo.[2] Quindi si può ricavare la quota interessi $I_5 = R_5 - C_5 = 91.13€$.

Alternativamente, una volta osservato che, per quanto riguarda la quota capitale, si ha $C_5 = D_3$, si poteva calcolare la quota interessi con $I_5 = D_3 \cdot i_2$, dove i_2 è il tasso su base biennale.

Possiamo verificare che le due strade sono equivalenti osservando che nel primo modo

$$R_5 = D_3(1 + i)^2 = D_3(1 + 2i + i^2) = \underbrace{D_3}_{C_5} + \underbrace{D_3(2i + i^2)}_{I_5}$$

e nel secondo modo

$$I_5 = D_3 \cdot i_2 = D_3 \cdot \big[(1 + i)^2 - 1\big] = D_3(1 + 2i + i^2 - 1) = D_3(2i + i^2).$$

[2] Ricordare che la somma delle quote capitale deve dare il debito iniziale.

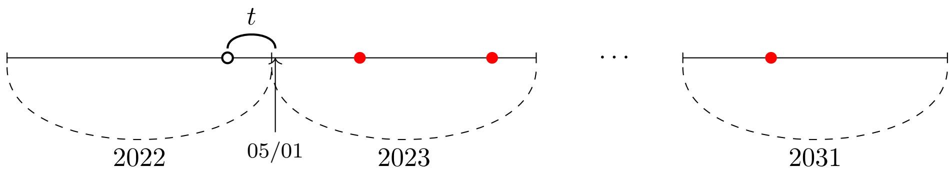
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 20/01/2023

ESERCIZIO 1. Il B.T.P. denominato `Btp-1mg31 6%`, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 05/01/2023 era quotato (corso secco) a 112.10. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore del 3%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 05/01/2023, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.06}{2}\cdot 100(1-0.125) = 2.625.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 17$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2022) è $t = 30\cdot 2 + 5 = 65$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625\cdot\frac{65}{180} = 0.948.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 112.10 + 0.948 = 113.048.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625\cdot \mathrm{a}_{\overline{17}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{65/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-17+65/180}.$$

Per dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore del 3% basta calcolare il termine di destra al tasso del 3% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.625\cdot \mathrm{a}_{\overline{17}|0.03_{1/2}}(1+0.03_{1/2})^{65/180} + 100(1+0.03_{1/2})^{-17+65/180} = 117.58 > P_{\text{tq}}.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era maggiore del 3%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/05/2031. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1+i_{1/2}^{\text{eff}})^{-65/180+17}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \textsc{Ced}\cdot \mathrm{a}_{\overline{17}|0.01_{1/2}}\left(1+0.01_{1/2}\right)^{17} = 46.451.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1+i_{1/2}^{\text{eff}})^{-65/180+17} = M + 100.$$

Si trova

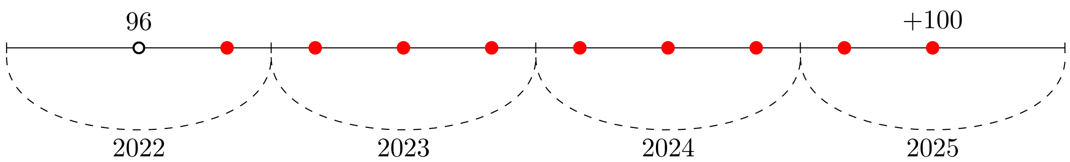
$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M+100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-65/180+17)} - 1 = 0.01568024 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1+i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.03160635.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/07/2022 con le seguenti caratteristiche:
- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 96$.

Si consideri la tassazione. Si dica se il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era maggiore o minore del 4%. Utilizzando la duration al tasso del 4%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2023 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5% (si usi l'anno commerciale).

✎



La cedola netta quadrimestrale è

$$\textsc{Ced} = \frac{r}{3}F(1-\gamma) = \frac{0.03}{3}\cdot 100(1-0.125) = 0.875.$$

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\textsc{Cn} = 100 - (100-96)\gamma = 99.5.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$96 = \textsc{Ced}\cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|ytm_{1/3}} + \textsc{Cn}(1+ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4% annuo si ottiene

$$\textsc{Ced}\cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|0.04_{1/3}} + \textsc{Cn}(1+0.04)^{-3} = 95.83 < 96.$$

Pertanto il vero tasso di rendimento a scadenza è minore del 4%.

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 9 e dobbiamo usare il tasso quadrimestrale).

$$I\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}}(1+i_{1/3}) - 9(1+i)^{-3}}{i_{1/3}} = 41.44.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in quadrimestri):

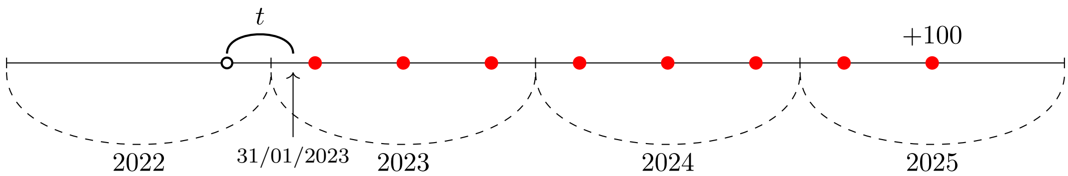
$$D_{1/3}(0.04) = \frac{\textsc{Ced}\cdot I\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + 9\cdot\textsc{Cn}(1+i)^{-3}}{\textsc{Ced}\cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + \textsc{Cn}(1+i)^{-3}} = 8.685 \quad \text{(quadrimestri)}.$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (95.83). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.04) = \frac{D_{1/3}}{3} = 2.895.$$

La duration modifcata è
$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.04)}{1+0.04} = 2.784.$$
Ora il calcolo della variazione del prezzo.
$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$
Attenzione che abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.04 \cdot 0.1 = -0.004$. Pertanto
$$\Delta P \simeq -2.784 \cdot (-0.004) \cdot 95.83 = +1.067.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2023 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5%. Le cedole da considerare ora sono 8.



C'è un rateo relativo a $t = 90$ giorni, cioè $\frac{3}{4}$ di un quadrimestre. Essendoci la tassazione, non sappiamo se questa è anche sul valore di rimborso, dato che questo dipende dal corso secco, che non conosciamo. Allora si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso ($\text{C}\textsc{n} = 100$) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari.
Si ha
$$P_{\text{tq}} = \text{C}\textsc{ed} \cdot a_{\overline{8}|0.025_{1/3}} \left(1+0.025_{1/3}\right)^{3/4} + 100 \left(1+0.025_{1/3}\right)^{-8+3/4} = 100.996.$$
Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest'ultimo. Il rateo è $\text{C}\textsc{ed} \cdot \frac{3}{4} = 0.65625$ e quindi il corso secco è $P_s = 100.996 - 0.65625 = 100.34 > 100$: l'ipotesi della non tassazione del rimborso è corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 100.996.

ESERCIZIO 3. Si considerino i due progetti di investimento
$$A.\ \begin{array}{cccc} -10 & 6 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad\qquad B.\ \begin{array}{cccc} -12 & 5 & 7 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$
con la struttura (piatta) dei tassi data da un tasso annuo del 5%.
Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.
Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.
Si dica poi se il valore del TIR del progetto A è maggiore del 15% e si trovi infine un intervallo che contenga questo TIR.

Calcoliamo i REA al tasso del 5%.
$$\text{REA}_A(0.05) = -10 + 6 \cdot 1.05^{-1} + 4 \cdot 1.05^{-2} + 3 \cdot 1.05^{-3} = 1.934$$
e
$$\text{REA}_B(0.05) = -12 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 7 \cdot 1.05^{-2} + 3 \cdot 1.05^{-3} = 1.703.$$
Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto A.
Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:
$$\text{Progetto } A\text{:} \quad -10\,,\ -4\,,\ 0\,,\ +3 \qquad \text{e} \qquad \text{Progetto } B\text{:} \quad -12\,,\ -7\,,\ 0\,,\ +3.$$
Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti.

Con una struttura piatta dei tassi ($i = 15\%$) il REA di A è

$$\mathrm{REA}_A(0.15) = -10 + 4 \cdot 1.15^{-1} + 4 \cdot 1.15^{-2} + 3 \cdot 1.15^{-3} = 0.215 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 15%.

Veniamo all'ultima domanda: trovare un intervallo che contenga il TIR di A. Si tratta di trovare un valore del tasso che sia maggiore del TIR, e cioè per cui il REA è negativo. Si trova (ad esempio)

$$\mathrm{REA}_A(0.16) = -10 + 6 \cdot 1.16^{-1} + 4 \cdot 1.16^{-2} + 3 \cdot 1.16^{-3} = 0.067$$

e

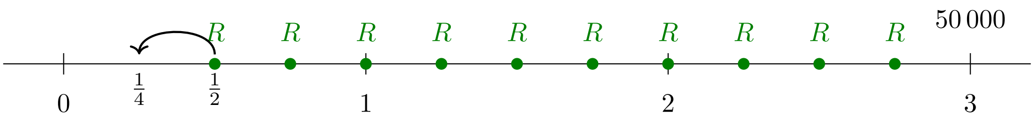
$$\mathrm{REA}_A(0.17) = -10 + 6 \cdot 1.17^{-1} + 4 \cdot 1.17^{-2} + 3 \cdot 1.17^{-3} = -0.077.$$

Quindi possiamo affermare che il TIR di A appartiene all'intervallo $[0.15, 0.17]$, cioè sta tra il 16 e il 17%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 20/01/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 50 000€ fra 3 anni versando 10 rate trimestrali, la prima tra 6 mesi. Si determini la rata trimestrale necessaria. Arrivati al versamento della 7ª rata, si ha una disponibilità di un versamento aggiuntivo (contestuale alla rata stessa) di 5 000€. Si determini il valore delle rimanenti nuove rate per raggiungere lo stesso obiettivo. Il tasso di interesse annuo da applicare è $i = 5\%$.

✎



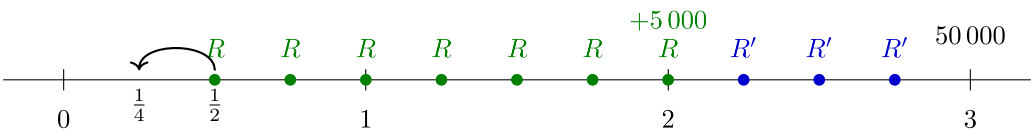
L'equazione che esprime la costituzione del capitale di 50 000€ fra 3 anni mediante le 10 rate trimestrali è

$$R \cdot a_{\overline{10}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05_{1/4})^{11} = 50\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{10}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05_{1/4})^{11}} = 4\,672.70€.$$

Passiamo alla seconda domanda. Alla fine del 2º anno (istante della 7ª rata) oltre alla rata possiamo versare 5 000€ in più. La rappresentazione può diventare questa:



L'equazione è ora (R è la rata trovata in precedenza, cioè $R = 4\,672.70€$) mentre R' è la nuova rata (ne mancano 3):

$$R \cdot a_{\overline{7}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05_{1/4})^{11} + 5\,000(1 + 0.05) + R' \cdot a_{\overline{3}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05) = 50\,000,$$

da cui ricavo

$$R' = \frac{50\,000 - R \cdot a_{\overline{7}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05_{1/4})^{11} - 5\,000(1 + 0.05)}{a_{\overline{3}|0.05_{1/4}}(1 + 0.05)} = 2\,964.96€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito D_0 di 1 000€, si usa un piano di ammortamento con rate posticipate e

- una quota interessi $I_2 = 70€$
- una rata $R_3 = 440€$

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.

✎

Possiamo ricavare subito, nell'ordine, la prima quota interessi I_1, il debito residuo D_1, la prima quota capitale C_1 e la prima rata R_1:

$$I_1 = i \cdot 1\,000 = 100€$$
$$I_2 = i \cdot D_1 \quad \text{e quindi} \quad D_1 = 70/i = 700€$$
$$D_1 = D_0 - C_1 \quad \text{e quindi} \quad C_1 = 1\,000 - 700 = 300€$$
$$R_1 = C_1 + I_1 = 300 + 100 = 400€.$$

La situazione è al momento rappresentata nel prospetto qui a fianco.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	400	300	100	700
2	R_2	C_2	70	D_2
3	440	C_3	I_3	0

Ci sono ancora 5 quantità incognite, ma si può osservare che $D_2 = C_3$.

Ora ci sono più strade possibili equivalenti. Ne propongo due.

Solo una rata è incognita e quindi possiamo usare la condizione di equivalenza finanziaria per determinare R_2.

$$400(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + 440(1+i)^{-3} = 1\,000$$

da cui

$$R_2 = \frac{1\,000 - 400(1+i)^{-1} - 440(1+i)^{-3}}{(1+i)^{-2}} = 370.$$

Da questa si ricavano le altre quantità mancanti:

$$\begin{gathered} C_2 + I_2 = R_2 \quad \text{e quindi} \quad C_2 = 370 - 70 = 300€ \\ D_2 = D_1 - C_2 = 700 - 300 = 400€ \\ C_3 = D_2 = 400€ \\ I_3 = i \cdot D_2 = 40€. \end{gathered}$$

Una possibile modalità alternativa è impostare un sistema di equazioni che metta in relazione le incognite. Ad esempio (considerando, come già osservato, che $D_2 = C_3$)

$$\begin{cases} 700 - C_2 = D_2 \\ I_3 = i \cdot D_2 \\ D_2 + I_3 = 440. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella terza si ha

$$D_2 + i \cdot D_2 = 440, \quad \text{da cui} \quad D_2 = \frac{440}{1+i} = 400€.$$

Pertanto $I_3 = 40$ e $C_2 = 300$, e quindi infine $R_2 = 370$.

Il prospetto complessivo è pertanto questo:

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	400	300	100	700
2	370	300	70	400
3	440	400	40	0

Con la prima modalità la verifica dell'equivalenza finanziaria è già implicita, in quanto è stata usata per trovare la soluzione. Nella seconda modalità è immediata.

ESERCIZIO 3. Un'obbligazione emessa il 01/07/2022 ha le seguenti caratteristiche:
- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole quadrimestrali con tasso cedolare $r = 3\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 96$.

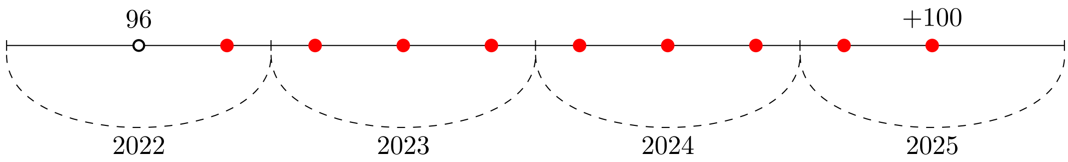
Si consideri la tassazione. Si dica se il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era maggiore o minore del 4%. Utilizzando la duration al tasso del 4%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di una diminuzione relativa del tasso del 10%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2023 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5% (si usi l'anno commerciale).

✎

La cedola netta quadrimestrale è

$$\text{Ced} = \frac{r}{3}F(1-\gamma) = \frac{0.03}{3} \cdot 100(1 - 0.125) = 0.875.$$



Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\mathrm{C\scriptstyle N} = 100 - (100 - 96)\gamma = 99.5.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$96 = \mathrm{C\scriptstyle ED} \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|ytm_{1/3}} + \mathrm{C\scriptstyle N}(1 + ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4% annuo si ottiene

$$\mathrm{C\scriptstyle ED} \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|0.04_{1/3}} + \mathrm{C\scriptstyle N}(1 + 0.04)^{-3} = 95.83 < 96.$$

Pertanto il vero tasso di rendimento a scadenza è minore del 4%.

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 9 e dobbiamo usare il tasso quadrimestrale).

$$I\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}}(1 + i_{1/3}) - 9(1 + i)^{-3}}{i_{1/3}} = 41.44.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in quadrimestri):

$$D_{1/3}(0.04) = \frac{\mathrm{C\scriptstyle ED} \cdot I\mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + 9 \cdot \mathrm{C\scriptstyle N}(1 + i)^{-3}}{\mathrm{C\scriptstyle ED} \cdot \mathrm{a}_{\overline{9}|i_{1/3}} + \mathrm{C\scriptstyle N}(1 + i)^{-3}} = 8.685 \quad \text{(quadrimestri)}.$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (95.83). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.04) = \frac{D_{1/3}}{3} = 2.895.$$

La duration modifcata è

$$D_{\mathrm{mod}} = \frac{D(0.04)}{1 + 0.04} = 2.784.$$

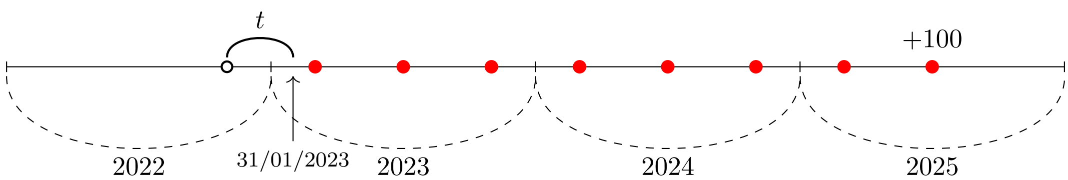
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\mathrm{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo una diminuzione *relativa* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = -0.04 \cdot 0.1 = -0.004$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.784 \cdot (-0.004) \cdot 95.83 = +1.067.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 31/01/2023 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 2.5%. Le cedole da considerare ora sono 8.



C'è un rateo relativo a $t = 90$ giorni, cioè $\frac{3}{4}$ di un quadrimestre. Essendoci la tassazione, non sappiamo se questa è anche sul valore di rimborso, dato che questo dipende dal corso secco, che non conosciamo. Allora si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso ($\text{C}_{\text{N}} = 100$) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari.

Si ha

$$P_{\text{tq}} = \text{C}_{\text{ED}} \cdot a_{\overline{8}|0.025_{1/3}} \left(1 + 0.025_{1/3}\right)^{3/4} + 100 \left(1 + 0.025_{1/3}\right)^{-8+3/4} = 100.996.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest'ultimo. Il rateo è $\text{C}_{\text{ED}} \cdot \frac{3}{4} = 0.65625$ e quindi il corso secco è $P_{\text{s}} = 100.996 - 0.65625 = 100.34 > 100$: l'ipotesi della non tassazione del rimborso è corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 100.996.

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

$$A.\quad \begin{array}{cccc} -10 & 6 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad\qquad B.\quad \begin{array}{cccc} -12 & 5 & 7 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

con la struttura (piatta) dei tassi data da un tasso annuo del 5%.

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.

Si dica se per entrambi i progetti i flussi consentono di affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento.

Si dica poi se il valore del TIR del progetto A è maggiore del 15% e si trovi infine un intervallo che contenga questo TIR.

✎

Calcoliamo i REA al tasso del 5%.

$$\text{REA}_A(0.05) = -10 + 6 \cdot 1.05^{-1} + 4 \cdot 1.05^{-2} + 3 \cdot 1.05^{-3} = 1.934$$

e

$$\text{REA}_B(0.05) = -12 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 7 \cdot 1.05^{-2} + 3 \cdot 1.05^{-3} = 1.703.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto A.

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento calcoliamo i flussi cumulati:

$$\text{Progetto } A\text{:} \quad -10\ ,\ -4\ ,\ 0\ ,\ +3 \qquad \text{e} \qquad \text{Progetto } B\text{:} \quad -12\ ,\ -7\ ,\ 0\ ,\ +3.$$

Entrambi i flussi cumulati cambiano segno una sola volta e quindi possiamo affermare che il TIR esiste unico per entrambi i progetti.

Con una struttura piatta dei tassi ($i = 15\%$) il REA di A è

$$\text{REA}_A(0.15) = -10 + 4 \cdot 1.15^{-1} + 4 \cdot 1.15^{-2} + 3 \cdot 1.15^{-3} = 0.215 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 15%.

Veniamo all'ultima domanda: trovare un intervallo che contenga il TIR di A. Si tratta di trovare un valore del tasso che sia maggiore del TIR, e cioè per cui il REA è negativo. Si trova (ad esempio)

$$\text{REA}_A(0.16) = -10 + 6 \cdot 1.16^{-1} + 4 \cdot 1.16^{-2} + 3 \cdot 1.16^{-3} = 0.067$$

e

$$\text{REA}_A(0.17) = -10 + 6 \cdot 1.17^{-1} + 4 \cdot 1.17^{-2} + 3 \cdot 1.17^{-3} = -0.077.$$

Quindi possiamo affermare che il TIR di A appartiene all'intervallo $[0.15, 0.17]$, cioè sta tra il 16 e il 17%.

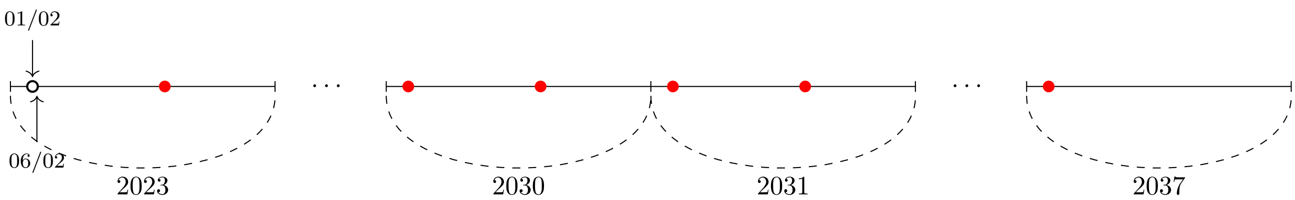
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 09/02/2023

ESERCIZIO 1. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb37 4%`, con scadenza il 01/02/2037, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4\%$. Il 06/02/2023 era quotato (corso secco) a 98.53. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore del 3.70%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 06/02/2023 e di reinvestire le cedole versandole in un conto bancario con un tasso dell'1% fino al 31/12/2030 e del 2% successivamente. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. Alla data del 06/02/2023 è dato un corso secco $P_s = 98.53$. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.04}{2} \cdot 100(1-0.125) = 1.75.$$

C'è tassazione anche sul valore di rimborso, dato che la quotazione è sotto la pari. Il rimborso netto è

$$\mathrm{C_N} = 100 - (100 - P_s)\gamma = 99.81625.$$

Fino alla scadenza del 01/02/2037 il titolo paga $n = 1 + 2 \cdot 13 + 1 = 28$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/02/2023) è $t = 6$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{6}{180} = 0.0583.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{tq} = P_s + \text{rateo} = 98.53 + 0.0583 = 98.588.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{tq} = 1.75 \cdot a_{\overline{28}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{6/180} + \mathrm{C_N}(1+ytm_{1/2})^{-6/180+28}.$$

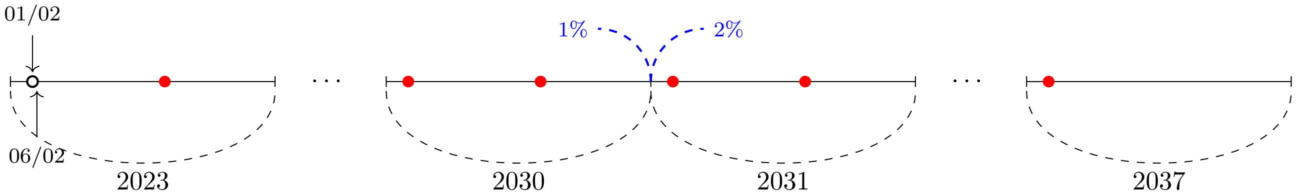
Per dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore o minore del 3.70% basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.70% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$1.75 \cdot a_{\overline{28}|0.037_{1/2}}(1+0.037_{1/2})^{6/180} + \mathrm{C_N}(1+0.037_{1/2})^{-6/180+28} = 98.14 < P_{tq}.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era minore del 3.70%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole (con cambio di tasso). Può essere utile aggiornare la rappresentazione grafica, riportata nella pagina che segue.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. I montanti vanno calcolati alla scadenza, cioè alla data del 01/02/2037. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1% fino al 31/12/2030 e del 2% successivamente.



Indicando con $i^{\text{eff}}_{1/2}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, l'equazione che permette di calcolare il tasso è

$$P_{\text{tq}}(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{-6/180+28} = M_1 + M_2 + \text{C}\textsc{n},$$

dove M_1 e M_2 sono i montanti delle cedole (ci sono 15 cedole entro il 31/12/2030 e 13 cedole successivamente). Per quanto riguarda le 15 cedole entro il 31/12/2030 abbiamo

$$M_1 = 1.75 \cdot a_{\overline{15}|0.01_{1/2}} \left(1+0.01_{1/2}\right)^{15+5/6} (1+0.02)^{6+1/12} = 30.794469$$

e per le 13 cedole successive

$$M_2 = 1.75 \cdot a_{\overline{13}|0.02_{1/2}} \left(1+0.02_{1/2}\right)^{13} = 24.159053.$$

Dall'equazione si ricava pertanto

$$i^{\text{eff}}_{1/2} = \left(\frac{M_1 + M_2 + \text{C}\textsc{n}}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-6/180+28)} - 1 = 0.0162566$$

e quindi

$$i^{\text{eff}} = 0.0327774.$$

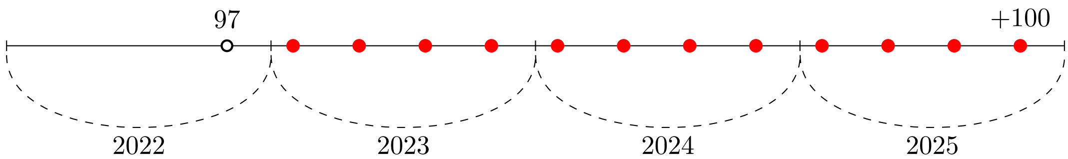
ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/11/2022 con le caratteristiche:
- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$.

Si consideri la tassazione. Ipotizzando un prezzo di emissione $P_E = 97$, si dia un'approssimazione del tasso annuo di rendimento a scadenza il 01/11/2022 (con la formula studiata).

Utilizzando la duration al tasso appena trovato, si dia un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 10%.

Sapendo infine che il 01/01/2023 il tasso di rendimento a scadenza era del 3.50%, si determini il prezzo tel quel in quella data.

✎



La cedola netta trimestrale è

$$\text{C}\textsc{ed} = \frac{r}{4}F(1-\gamma) = \frac{0.04}{4} \cdot 100(1-0.125) = 0.875.$$

e vi sono 12 cedole.

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\text{C}\textsc{n} = 100 - (100-97)\gamma = 99.625.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = \text{C}\textsc{ed} \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}} + \text{C}\textsc{n}(1+ytm)^{-4}.$$

Per l'approssimazione richiesta, nel formulario si trova

Prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza di un'obbligazione

$$\textit{Dall'equazione}\quad P_0 = rF\mathrm{a}_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n} \qquad \textit{si ha} \qquad i_0 = \frac{rF + \frac{C-P_0}{n}}{\frac{C+2P_0}{3}}$$

dove (con cedole annue) P_0 è il prezzo di emissione, r il tasso cedolare, F il valore nominale, C il valore di rimborso, n il numero di cedole e i il tasso annuo di rendimento a scadenza.
Se si considera la tassazione (con aliquota γ) rF va sostituito con la cedola netta $\textsc{Ced} = rF(1-\gamma)$ e C va sostituito con il valore di rimborso netto $\textsc{Cn} = C - \max(0, C-P_0)\gamma$

La formula da usare nel nostro caso è quindi

$$ytm^0_{1/4} = \frac{\textsc{Ced} + \frac{\textsc{Cn}-97}{12}}{\frac{\textsc{Cn}+2\cdot 97}{3}} = 0.011175 \quad \text{(trimestrale)}.$$

Da questo si ricava l'approssimazione del tasso annuo $ytm^0 = 0.0454547$.
Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$I\mathrm{a}_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}}(1+ytm^0_{1/4}) - 12(1+ytm^0)^{-3}}{ytm^0_{1/4}} = 71.138744.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(i) = \frac{\textsc{Ced}\cdot I\mathrm{a}_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} + 12\cdot\textsc{Cn}(1+ytm^0)^{-3}}{\textsc{Ced}\cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} + \textsc{Cn}(1+ytm^0)^{-3}} = 11.43215988 \quad \text{(trimestri)}.$$

Il denominatore è il prezzo calcolato al tasso ytm^0 e risulta $P = 96.96265$. Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(ytm^0) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.85803997.$$

La duration modificata è

$$D_{\mathrm{mod}} = \frac{D(ytm^0)}{1+ytm^0} = 2.7337768.$$

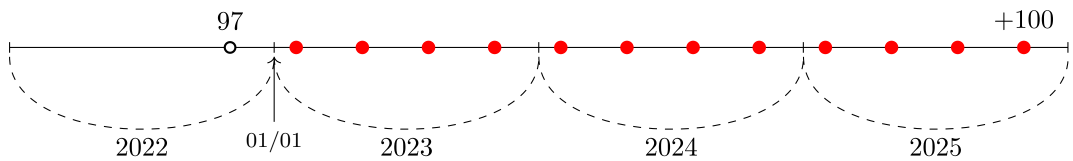
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\mathrm{mod}}\cdot\Delta i\cdot P.$$

Abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = +0.0454547\cdot 0.1 = +0.00454547$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.7337768\cdot(+0.00454547)\cdot 96.96265 = -1.205.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/01/2023 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3.50%. Le cedole da considerare sono ancora tutte e 12. La data di valutazione cade due mesi dopo l'emissione.



L'equazione per il prezzo tel quel è

$$P_{\mathrm{tq}} = \textsc{Ced}\cdot\mathrm{a}_{\overline{12}|ytm_{1/4}}(1+ytm_{1/4})^{2/3} + \textsc{Cn}(1+ytm_{1/4})^{-12+2/3}.$$

È il solito problema di determinare il prezzo, noto il tasso, in presenza di tassazione. Il prezzo dipende dal valore di rimborso, che però a sua volta dipende dal prezzo. Si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso ($C_N = 100$) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari. Nell'ipotesi fatta abbiamo

$$P_{tq} = C_{ED} \cdot a_{\overline{12}|0.035_{1/4}}(1 + 0.035_{1/4})^{2/3} + 100(1 + 0.035_{1/4})^{-12+2/3} = 100.704.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest'ultimo. Il rateo è $C_{ED} \cdot \frac{2}{3} = 0.583$ ($t = 60$ giorni, cioè $\frac{2}{3}$ di un trimestre) e quindi il corso secco è $P_s = 100.704 - 0.583 = 100.121 > 100$: l'ipotesi della non tassazione del rimborso è quindi corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 100.704.

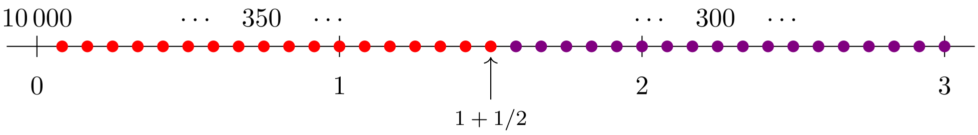
ESERCIZIO 3. Si consideri un progetto di investimento triennale che prevede un esborso iniziale di 10 000€ e successivi incassi così distribuiti: 18 rate mensili da 350€ e altre 18 rate mensili da 300€.

Si stabilisca se il progetto è conveniente nel criterio del REA/VAN al tasso del 11% e perché possiamo affermare che il TIR esiste ed è unico. Si dica poi se il valore del TIR del progetto è maggiore o minore del 11%.

Si determini infine il tempo di recupero del progetto.

✎

Può aiutare come sempre una rappresentazione grafica.



Calcoliamo il REA:

$$\text{REA} = -10\,000 + 350 \cdot a_{\overline{18}|0.11_{1/12}} + 300 \cdot a_{\overline{18}|0.11_{1/12}}(1 + 0.01_{1/12})^{-18} = 62.027 > 0.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente.

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento possiamo dire che, trattandosi di un progetto di investimento (esborso iniziale e incassi successivi), certamente il TIR esiste unico (si noti anche che la somma degli incassi, 11 700€, è maggiore dell'esborso iniziale).

Per rispondere alla domanda successiva non servono ulteriori calcoli: poco fa abbiamo visto che il REA, valutato al tasso dell'11%, è positivo e quindi questo significa che il TIR è maggiore dell'11%.

Veniamo all'ultima domanda: il tempo di recupero è la scadenza in cui per la prima volta il valore cumulato degli importi passa da negativo a positivo. Dopo aver osservato che le prime 18 rate da 350€ non sono sufficienti ($350 \cdot 18 = 6\,300$), la disequazione che permette di individuare il tempo di recupero k è

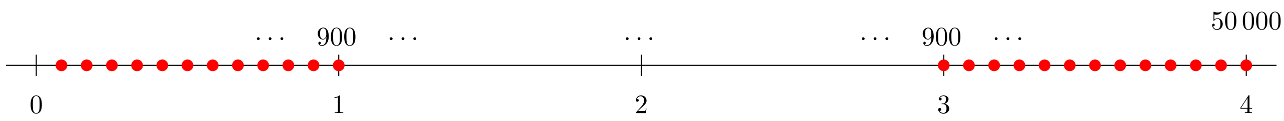
$$-10\,000 + 350 \cdot 18 + 300 \cdot k > 0, \text{ che fornisce } k > \frac{10\,000 - 350 \cdot 18}{300} = 12.3.$$

Pertanto il tempo di recupero, che è un valore intero, è $18 + 13 = 31$ mesi, cioè 2 anni e 7 mesi.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 09/02/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 50 000€ fra 4 anni. Si provi che versando 48 rate mensili positicipate di 900€ al tasso del 7% l'obiettivo non è raggiungibile. Si trovi la rata minima che lo renderebbe possibile. Con rate da 900€ e ipotizzando un versamento aggiuntivo V alla fine del 1º, 2º e 3º anno, si determini il V necessario.

✎



Il montante di 48 rate mensili posticipate di 900€ al tasso del 7% è

$$900 \cdot \mathrm{a}_{\overline{48}|0.07_{1/12}}(1+0.07)^4 = 49\,471.03€,$$

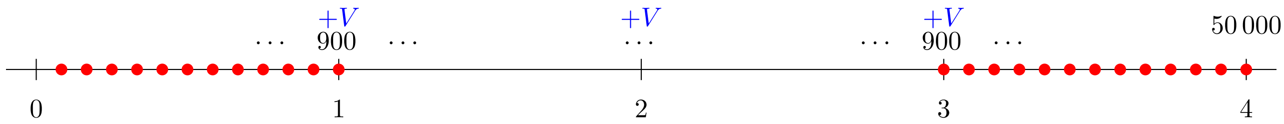
insufficienti per l'obiettivo.
La rata minima necessaria R deve soddisfare l'equazione

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{48}|0.07_{1/12}}(1+0.07)^4 = 50\,000€,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{50\,000}{\mathrm{a}_{\overline{48}|0.07_{1/12}}(1+0.07)^4} = 909.62€.$$

Passiamo alla terza domanda: raggiungere l'obiettivo con rate da 900€ e versamenti aggiuntivi V alla fine del 1º, 2º e 3º anno. La rappresentazione diventa questa:



L'equazione è ora

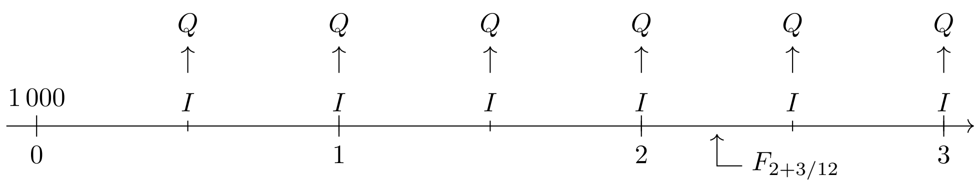
$$900 \cdot \mathrm{a}_{\overline{48}|0.07_{1/12}}(1+0.07)^4 + V \cdot \mathrm{a}_{\overline{3}|0.07}(1+0.07)^4 = 50\,000,$$

da cui ricavo

$$V = \frac{50\,000 - 49\,471.03}{\mathrm{a}_{\overline{3}|0.07}(1+0.07)^4} = 153.77€.$$

ESERCIZIO 2. Per la restituzione di un prestito di 1 000€ si usa un piano di ammortamento americano a due tassi di 3 anni, con quote interessi e quote di accumulazione semestrali posticipate. Per gli interessi il tasso a debito è del 7.50% annuo, mentre per la restituzione del capitale le quote di accumulazione sono valutate al tasso del 3% annuo. Si determini l'ammontare della quota interessi I e della quota di accumulazione Q. Si calcoli il fondo di accumulazione dopo 2 anni e 3 mesi. Si trovi un'approssimazione del tasso di costo effettivo annuo dell'ammortamento con una delle formule studiate e si dica se l'approssimazione è per difetto o per eccesso.

✎



Indicati rispettivamente con i e $i^\star$ i tassi a debito e di accumulazione, dobbiamo anzitutto calcolare, per entrambi, i corrispondenti semestrali. Si ha

$$i_{1/2} = (1+0.075)^{1/2} - 1 = 0.03682207 \quad \text{e} \quad i^\star_{1/2} = (1+0.03)^{1/2} - 1 = 0.01488916.$$

La quota interessi I (semestrale) è uguale agli interessi semestrali sull'intero debito, cioè

$$I = 1\,000 \cdot i_{1/2} = 36.82€.$$

Indicando con Q la quota di accumulazione, anch'essa semestrale, questa deve soddisfare l'equazione

$$Q \mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star_{1/2}} (1+i^\star)^3 = 1\,000, \quad \text{da cui si ricava} \quad Q = \frac{1\,000}{\mathrm{a}_{\overline{6}|i^\star_{1/2}} (1+i^\star)^3} = 160.57€.$$

Abbiamo quindi una rata complessiva semestrale $R = I + Q = 197.39€$.

Il fondo di accumulazione F_t dopo 2 anni e 3 mesi è il valore delle quote di accumulazione già versate dopo 2 anni e 3 mesi. Dato che a quell'epoca sono state versate 4 quote di accumulazione, si ha

$$F_t = Q \mathrm{a}_{\overline{4}|i^\star_{1/2}} (1+i^\star)^{2+3/12} = 661.64€.$$

L'equazione che, risolta, consente di determinare il tasso di costo effettivo (semestrale) $i^{\text{eff}}_{1/2}$ dell'ammortamento è

$$(I+Q) \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i^{\text{eff}}_{1/2}} = 1\,000.$$

È richiesta un'approssimazione del tasso di costo effettivo annuo dell'ammortamento con una delle formule studiate. Nel formulario si trova

---

Prima approssimazione del tasso tecnico di una rendita (T.I.R.)

Data una rendita posticipata *di rata R, durata n, con valore attuale V_0, una prima approssimazione del tasso tecnico della rendita si ha con*

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R}$$

Nel nostro caso la formula è quindi

$$i^{\text{eff}}_{1/2} = \frac{2(6 - 1\,000/R)}{7 \cdot 1\,000/R} = 0.05267179, \quad \text{da cui il tasso effettivo annuo} \quad i^{\text{eff}} = 0.10811789.$$

Vediamo infine se l'approssimazione è per difetto o per eccesso. Calcoliamo il termine di sinistra dell'equazione:

$$197.39 \cdot \mathrm{a}_{\overline{6}|i^{\text{eff}}_{1/2}} = 993 < 1\,000$$

e pertanto l'approssimazione è per eccesso.

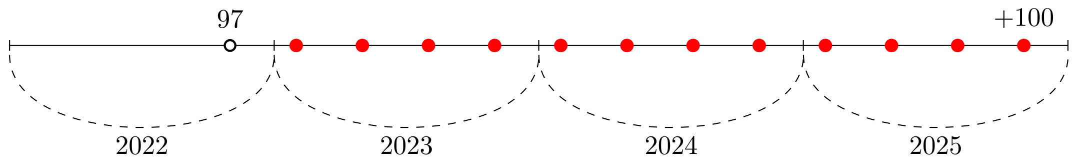
ESERCIZIO 3. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/11/2022 con le caratteristiche:
- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$.

Si consideri la tassazione. Ipotizzando un prezzo di emissione $P_E = 97$, si dia un'approssimazione del tasso annuo di rendimento a scadenza il 01/11/2022 (con la formula studiata).

Utilizzando la duration al tasso appena trovato, si dia un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 10%.

Sapendo infine che il 01/01/2023 il tasso di rendimento a scadenza era del 3.50%, si determini il prezzo tel quel in quella data.

✎



La cedola netta trimestrale è

$$\text{CED} = \frac{r}{4}F(1-\gamma) = \frac{0.04}{4}\cdot 100(1-0.125) = 0.875.$$

e vi sono 12 cedole.

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\text{CN} = 100 - (100-97)\gamma = 99.625.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = \text{CED}\cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}} + \text{CN}(1+ytm)^{-4}.$$

Per l'approssimazione richiesta, nel formulario si trova

Prima approssimazione del tasso di rendimento a scadenza di un'obbligazione

$$\textit{Dall'equazione}\quad P_0 = rFa_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n} \qquad \textit{si ha} \qquad i_0 = \frac{rF + \frac{C-P_0}{n}}{\frac{C+2P_0}{3}}$$

dove (con cedole annue) P_0 è il prezzo di emissione, r il tasso cedolare, F il valore nominale, C il valore di rimborso, n il numero di cedole e i il tasso annuo di rendimento a scadenza.

Se si considera la tassazione (con aliquota γ) rF va sostituito con la cedola netta $\text{CED} = rF(1-\gamma)$ e C va sostituito con il valore di rimborso netto $\text{CN} = C - \max(0, C-P_0)\gamma$

La formula da usare nel nostro caso è quindi

$$ytm^0_{1/4} = \frac{\text{CED} + \frac{\text{CN}-97}{12}}{\frac{\text{CN}+2\cdot 97}{3}} = 0.011175 \quad \text{(trimestrale)}.$$

Da questo si ricava l'approssimazione del tasso annuo $ytm^0 = 0.0454547$.

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}}(1+ytm^0_{1/4}) - 12(1+ytm^0)^{-3}}{ytm^0_{1/4}} = 71.138744.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(i) = \frac{\text{CED}\cdot Ia_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} + 12\cdot\text{CN}(1+ytm^0)^{-3}}{\text{CED}\cdot a_{\overline{12}|ytm^0_{1/4}} + \text{CN}(1+ytm^0)^{-3}} = 11.43215988 \quad \text{(trimestri)}.$$

Il denominatore è il prezzo calcolato al tasso ytm^0 e risulta $P = 96.96265$. Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(ytm^0) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.85803997.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(ytm^0)}{1+ytm^0} = 2.7337768.$$

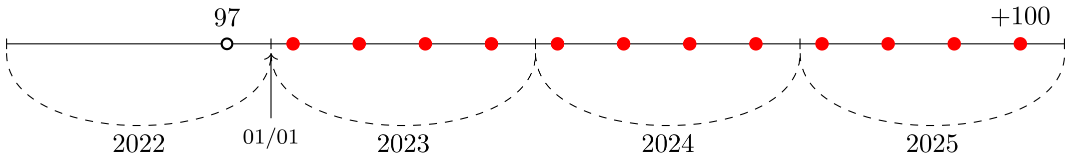
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P.$$

Abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 10%, e quindi $\Delta i = +0.0454547 \cdot 0.1 = +0.00454547$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.7337768 \cdot (+0.00454547) \cdot 96.96265 = -1.205.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/01/2023 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3.50%. Le cedole da considerare sono ancora tutte e 12. La data di valutazione cade due mesi dopo l'emissione.



L'equazione per il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = \text{C}\textsc{ed} \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}}(1 + ytm_{1/4})^{2/3} + \text{C}\textsc{n}(1 + ytm_{1/4})^{-12+2/3}.$$

È il solito problema di determinare il prezzo, noto il tasso, in presenza di tassazione. Il prezzo dipende dal valore di rimborso, che però a sua volta dipende dal prezzo. Si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso ($\text{C}\textsc{n} = 100$) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari. Nell'ipotesi fatta abbiamo

$$P_{\text{tq}} = \text{C}\textsc{ed} \cdot a_{\overline{12}|0.035_{1/4}}(1 + 0.035_{1/4})^{2/3} + 100(1 + 0.035_{1/4})^{-12+2/3} = 100.704.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest'ultimo. Il rateo è $\text{C}\textsc{ed} \cdot \frac{2}{3} = 0.583$ ($t = 60$ giorni, cioè $\frac{2}{3}$ di un trimestre) e quindi il corso secco è $P_{\text{s}} = 100.704 - 0.583 = 100.121 > 100$: l'ipotesi della non tassazione del rimborso è quindi corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 100.704.

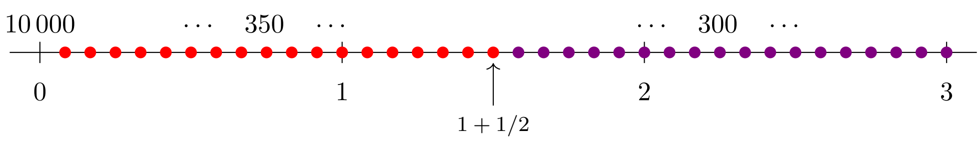
ESERCIZIO 4. Si consideri un progetto di investimento triennale che prevede un esborso iniziale di 10 000€ e successivi incassi così distribuiti: 18 rate mensili da 350€ e altre 18 rate mensili da 300€.

Si stabilisca se il progetto è conveniente nel criterio del REA/VAN al tasso del 11% e perché possiamo affermare che il TIR esiste ed è unico. Si dica poi se il valore del TIR del progetto è maggiore o minore del 11%.

Si determini infine il tempo di recupero del progetto.

✎

Può aiutare come sempre una rappresentazione grafica.



Calcoliamo il REA:

$$\text{REA} = -10\,000 + 350 \cdot a_{\overline{18}|0.11_{1/12}} + 300 \cdot a_{\overline{18}|0.11_{1/12}}(1 + 0.01_{1/12})^{-18} = 62.027 > 0.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente.

Sull'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento possiamo dire che, trattandosi di un progetto di investimento (esborso iniziale e incassi successivi), certamente il TIR esiste unico (si noti anche che la somma degli incassi, 11 700€, è maggiore dell'esborso iniziale).

Per rispondere alla domanda successiva non servono ulteriori calcoli: poco fa abbiamo visto che il REA, valutato al tasso dell'11%, è positivo e quindi questo significa che il TIR è maggiore dell'11%.

Veniamo all'ultima domanda: il tempo di recupero è la scadenza in cui per la prima volta il valore cumulato degli importi passa da negativo a positivo. Dopo aver osservato che le prime 18 rate da 350€ non sono sufficienti ($350 \cdot 18 = 6\,300$), la disequazione che permette di individuare il tempo di recupero k è

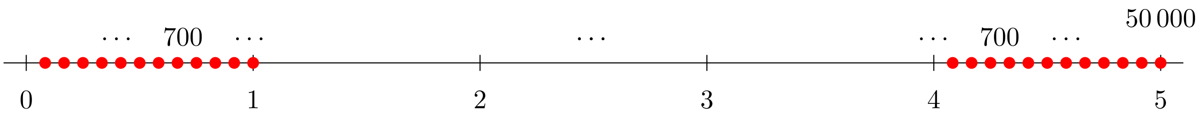
$$-10\,000 + 350 \cdot 18 + 300 \cdot k > 0, \text{ che fornisce } k > \frac{10\,000 - 350 \cdot 18}{300} = 12.3.$$

Pertanto il tempo di recupero, che è un valore intero, è $18 + 13 = 31$ mesi, cioè 2 anni e 7 mesi.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 10/07/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 50 000€ fra 5 anni. Si dica se è possibile versando 60 rate mensili posticipate di 700€ al tasso del 6% annuo. Si trovi la rata minima che lo rende possibile. Scegliendo una modalità di accumulazione che prevede rate mensili (posticipate) in progressione aritmetica, la prima delle quali di 100€, si determini la ragione della progressione che rende possibile la costituzione del capitale voluto.

✎



Si potrebbe rispondere alla prima domanda rispondendo prima alla seconda. Procedo comunque nell'ordine.

Il montante di 60 rate mensili posticipate di 700€ al tasso del 6% annuo è

$$700 \cdot a_{\overline{60}|0.06_{1/12}}(1+0.06)^5 = 48\,640.05€,$$

insufficienti per l'obiettivo di ottenere 50 000€ fra 5 anni.

La rata minima necessaria R deve soddisfare l'equazione

$$R \cdot a_{\overline{60}|0.06_{1/12}}(1+0.06)^5 = 50\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{60}|0.06_{1/12}}(1+0.06)^5} = 719.57€.$$

Passiamo alla terza domanda: raggiungere l'obiettivo con rate mensili posticipate in progressione aritmetica, con prima rata di 100€.

La formula che dà il valore attuale di una rendita con rate in progressione aritmetica è

$$V_0 = R \cdot a_{\overline{n}|i} + z \cdot \frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}$$

dove R è la prima rata e z è la ragione della progressione. Nel nostro caso l'equazione del valore è (si ricordi che il valore attuale delle rate va uguagliato al valore attuale dei 50 000€)

$$100 \cdot a_{\overline{60}|0.06_{1/12}} + z \cdot \frac{a_{\overline{60}|0.06_{1/12}} - 60(1+0.06)^{-5}}{0.06_{1/12}} = 50\,000(1+0.06)^{-5}.$$

Da questa ricaviamo z:

$$z = \left(50\,000(1+0.06)^{-5} - 100 a_{\overline{60}|0.06_{1/12}}\right) \cdot \frac{0.06_{1/12}}{a_{\overline{60}|0.06_{1/12}} - 60(1+0.06)^{-5}} = 22.09€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€ si usa un piano di ammortamento a rate posticipate che ogni anno diminuiscono di 100€.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

✎

Possiamo determinare subito la prima rata, che indico con R, che poi diminuisce ogni anno di 100€. Ci deve essere equivalenza finanziaria tra il debito contratto e il valore attuale di tutte le rate versate. L'equazione che rappresenta questa equivalenza è pertanto

$$R \cdot 1.1^{-1} + (R-100) \cdot 1.1^{-2} + (R-200) \cdot 1.1^{-3} + (R-300) \cdot 1.1^{-4} = 1\,000,$$

da cui si ricava

$$R \cdot \left(1.1^{-1} + 1.1^{-2} + 1.1^{-3} + 1.1^{-4}\right) = 1\,000 + 100 \cdot 1.1^{-2} + 200 \cdot 1.1^{-3} + 300 \cdot 1.1^{-4}$$

e quindi

$$R = \frac{1\,000 + 100 \cdot 1.1^{-2} + 200 \cdot 1.1^{-3} + 300 \cdot 1.1^{-4}}{a_{\overline{4}|0.1}} = 453.59€.$$

Ora che abbiamo la prima rata il piano si completa facilmente. I primi passaggi sono:

$$I_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100€.$$

Possiamo quindi ricavare la prima quota capitale

$$C_1 = R_1 - I_1 = 453.59 - 100 = 353.59€.$$

Ora il nuovo debito residuo

$$D_1 = 1\,000 - C_1 = 646.41€.$$

La nuova quota interessi

$$I_2 = 0.1 \cdot 646.41 = 64.64€, \quad \text{e così via.}$$

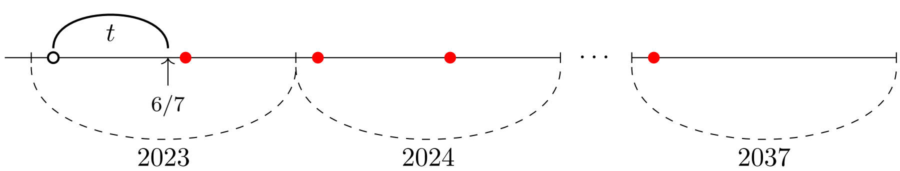
Ecco il prospetto completo.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	453.59	353.59	100	646.41
2	353.59	288.95	64.64	357.47
3	253.59	217.84	35.75	139.63
4	153.59	139.63	13.96	0

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb37 4%`, con scadenza il 01/02/2037, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4\%$. Il 06/07/2023 era quotato (corso secco) a 96.15. Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore del 3.5%.

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 06/07/2023 e di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/02/2037 il titolo paga $n = 28$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi (il tasso cedolare è $r = 0.04$) la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F(1-\gamma) = \frac{0.04}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 1.75.$$

Alla data di valutazione (06/07/2023) il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/02/2023) è

$$t = 30 \cdot 5 + 6 = 156 \text{ giorni.} \quad \text{Quindi} \quad \text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{156}{180} = 1.517.$$

Il prezzo tel quel è allora

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 96.15 + 1.517 = 97.667.$$

Dato che abbiamo una plusvalenza, il valore di rimborso netto è

$$\mathrm{C_N} = 100 - (100 - 96.15)\cdot\gamma = 99.519.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\mathrm{tq}} = 1.75\cdot \mathrm{a}_{\overline{28}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{156/180} + \mathrm{C_N}(1+ytm_{1/2})^{-28+156/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore del 3.5%.

Basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.5%. Si ha

$$1.75\cdot \mathrm{a}_{\overline{28}|0.035_{1/2}}(1+0.035_{1/2})^{156/180} + \mathrm{C_N}(1+0.035_{1/2})^{-28+156/180} = 101.54 > 97.667.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era maggiore del 3.5%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/02/2037. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\mathrm{tq}}(1+i_{\mathrm{eff}})^{-156/360+14} = M + \mathrm{C_N}.$$

Troviamo M.

$$M = 1.75\cdot \mathrm{a}_{\overline{28}|0.01_{1/2}}(1+0.01)^{14} = 52.446. \quad \text{Ricordo che } \mathrm{C_N} = 99.519 \quad \text{e} \quad P_{\mathrm{tq}} = 97.667.$$

Pertanto possiamo ricavare

$$i_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{M+\mathrm{C_N}}{P_{\mathrm{tq}}}\right)^{1/(-156/360+14)} - 1 = \left(\frac{52.446+99.519}{97.667}\right)^{1/(-156/360+14)} - 1 = 0.0331233 \sim 3.31\%.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 10 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1% (modalità A), oppure con un finanziamento di 6 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 520€ (modalità B). Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 30€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10% e si dica quale modalità è preferibile.

Si determini una prima approssimazione (con la formula studiata per questo tipo di situazioni) dei tassi T.A.N. e T.A.E.G. su base annua del finanziamento, indicando poi se l'approssimazione trovata è per difetto o per eccesso.

Si dica infine se il tasso effettivo di costo i^{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento è molto lontano dal 9%.

✎

Il REA della modalità A è

$$\mathrm{REA}_A = -10\,000(1-0.01) = -9\,900.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 10 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 4 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 30€, e le 12 rate mensili posticipate di 520€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\mathrm{REA}_B(0.1) = -4\,000 - 30 - 520\cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -9\,958.25.$$

La modalità A è quindi preferibile alla modalità B.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, senza considerare le spese accessorie, l'equazione è

$$10\,000 = 4\,000 + 520\cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 6\,000 = 520\cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. La formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 6\,000/520)}{13 \cdot 6\,000/520} = 0.00615385 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\mathrm{TAN}_0 = 0.07639755$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$6\,000 = 520 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $5\,997.41 < 6\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$10\,000 = 4\,000 + 30 + 520 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 5\,970 = 520 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 5\,970/520)}{13 \cdot 5\,970/520} = 0.00695787 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0,08676486$.

Per valutare il tipo di approssimazione consideriamo l'equazione

$$5\,970 = 520 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $5\,966.72 < 5\,970$. Anche qui l'approssimazione è per eccesso.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$10\,000(1 - 0.01) = 4\,000 + 30 + 520 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 9% ($0.09_{1/12} = 0.00720732$) è

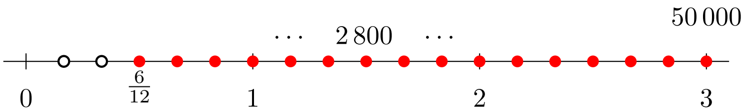
$$9\,987.24 > 9\,900$$

e questo porta a dire che il tasso effettivo è molto vicino al 9% (minore del 9%).

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 18/09/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 50 000€ fra 3 anni. Si provi che non è possibile versando rate bimestrali di 2 800€, la prima tra 6 mesi, al tasso del 6% annuo. Si trovi la rata minima che lo rende possibile con queste modalità. Scegliendo invece una modalità di accumulo che prevede rate bimestrali in progressione geometrica, la prima delle quali di 1 800€ tra 6 mesi e la seconda di 1 890€, si determini il versamento aggiuntivo finale (alla fine del 3° anno) necessario per costituire il capitale voluto.

✎



Serve ovviamente anzitutto il tasso bimestrale equivalente al 6% annuo. Si ha $i_{1/6} = (1+0.06)^{1/6} - 1 = 0.00975879$.
Il montante di 16 rate mensili di 2 800€, la prima tra 6 mesi, al tasso $i = 0.06$ annuo è

$$2\,800 \cdot a_{\overline{16}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3 = 48\,233.13€,$$

insufficienti per l'obiettivo di ottenere 50 000€ fra 3 anni.
La rata minima necessaria R deve soddisfare l'equazione

$$R \cdot a_{\overline{16}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3 = 50\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{50\,000}{a_{\overline{16}|i_{1/6}}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3} = 2\,902.57€.$$

Passiamo alla terza domanda: raggiungere l'obiettivo con rate bimestrali in progressione geometrica. Per applicare la formula che dà il valore attuale di rate in progressione geometrica[3] ci servono il fattore di sconto v e la ragione q della progressione geometrica. Per quanto riguarda il fattore si ha

$$v = \frac{1}{1+i_{1/6}} = 0.99033552$$

e la ragione si trova dal quoziente tra la seconda e la prima rata, cioè

$$q = \frac{1\,890}{1\,800} = 1.05.$$

Quindi il montante delle 16 rate in progressione geometrica è

$$1\,800\, v\, \frac{1-(qv)^{16}}{1-qv}(1+i_{1/6})^{-2}(1+i)^3 = 45\,390.87€.$$

Il versamento aggiuntivo finale è pertanto dato dalla differenza

$$50\,000 - 45\,390.87 = 4\,609.13€.$$

---

[3] Dal formulario si ricava la formula

$$V_0 = R\, v\, \frac{1-(qv)^n}{1-qv},$$

dove v è il fattore di sconto relativo al periodo delle rate e q è la ragione della progressione geometrica, cioè il rapporto (costante) tra una rata e la precedente (R_{k+1}/R_k).

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€ si usa un piano di ammortamento a rate posticipate che ogni anno diminuiscono del 15%.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

✎

Possiamo determinare subito la prima rata, che indico con R_1, in base all'equivalenza finanziaria tra il debito iniziale e il valore complessivo attualizzato delle rate versate. Le rate decrescono in progressione geometrica, con la ragione $q = 0.85$. Serve anche il fattore di sconto $v = 1/(1+i) = 1/(1+0.1) = 0,\overline{90}$.

L'equazione che rappresenta questa equivalenza è pertanto

$$R_1 \; v \, \frac{1-(qv)^4}{1-qv} = 1\,000,$$

da cui si ricava

$$R_1 = \frac{1\,000}{v \, \frac{1-(qv)^4}{1-qv}} = 388.52€.$$

Abbiamo ora tutte le rate: basta applicare una decrescita del 15% ogni anno.

$$R_2 = 0.85 \cdot R_1 = 330.24€ \quad , \quad R_3 = 0.85 \cdot R_2 = 280.71€ \quad , \quad R_4 = 0.85 \cdot R_3 = 238.60€.$$

Il resto del piano si completa facilmente. I primi passaggi sono:

$$I_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100€.$$

Possiamo quindi ricavare la prima quota capitale

$$C_1 = R_1 - I_1 = 388.52 - 100 = 288.52€.$$

Ora il nuovo debito residuo

$$D_1 = 1\,000 - C_1 = 711.48€.$$

La nuova quota interessi

$$I_2 = 0.1 \cdot 711.48 = 71.15€, \quad \text{e così via.}$$

Ecco il prospetto completo.

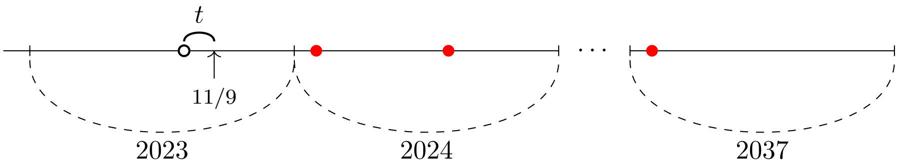
t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	388.52	288.52	100	711.48
2	330.24	259.10	71.15	452.38
3	280.71	235.47	45.24	216.91
4	238.60	216.91	21.69	0

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb37 4%`, con scadenza il 01/02/2037, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4\%$. Il giorno 11/09/2023 era quotato (corso secco) a 96.16. Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale. Si dica se il suo tasso di rendimento a scadenza era maggiore del tasso cedolare.

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 11/09/2023 e di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/02/2037 il titolo paga $n = 2 \times 13 + 1 = 27$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi (il tasso cedolare è $r = 0.04$) la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2} F(1-\gamma) = \frac{0.04}{2} \cdot 100(1-0.125) = 1.75.$$

Alla data di valutazione (11/09/2023) il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/08/2023) è

$$t = 30 + 11 = 41 \text{ giorni.} \quad \text{Quindi} \quad \text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{41}{180} = 0.399.$$

Il prezzo tel quel è allora

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 96.16 + 0.399 = 96.559.$$

Dato che abbiamo una plusvalenza, il valore di rimborso netto è

$$\mathrm{C_N} = 100 - (100 - 96.16) \cdot \gamma = 99.52.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 1.75 \cdot a_{\overline{27}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{41/180} + \mathrm{C_N}(1 + ytm_{1/2})^{-27+41/180}.$$

Viene chiesto di dire se il tasso di rendimento a scadenza era maggiore del tasso cedolare, cioè il 4%.
Basta calcolare il termine di destra al tasso del 4%. Si ha

$$1.75 \cdot a_{\overline{27}|0.04_{1/2}} (1 + 0.04_{1/2})^{41/180} + \mathrm{C_N}(1 + 0.04_{1/2})^{-27+41/180} = 95.36 < P_{\text{tq}}.$$

Ricordando che il termine di destra è una quantità decrescente al crescere del tasso, possiamo affermare che il vero tasso di rendimento a scadenza era minore del 4%.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/02/2037. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con ${i_{\text{eff}}}^{1/2}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\text{tq}}(1 + {i_{\text{eff}}}^{1/2})^{-41/180+27} = M + \mathrm{C_N}.$$

Troviamo M.

$$M = 1.75 \cdot a_{\overline{27}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01)^{27} = 50.445. \quad \text{Ricordo che} \quad P_{\text{tq}} = 96.559 \quad \text{e} \quad \mathrm{C_N} = 99.52.$$

Pertanto possiamo ricavare

$${i_{\text{eff}}}^{1/2} = \left(\frac{M + \mathrm{C_N}}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-41/180+27)} - 1 = \left(\frac{50.445 + 99.52}{96.559}\right)^{1/(-41/180+27)} - 1 = 0.0164532.$$

Da questo ricaviamo il tasso effettivo annuo, che è

$$i_{\text{eff}} = (1 + {i_{\text{eff}}}^{1/2})^2 - 1 = 0.0331772 \sim 3.32\%.$$

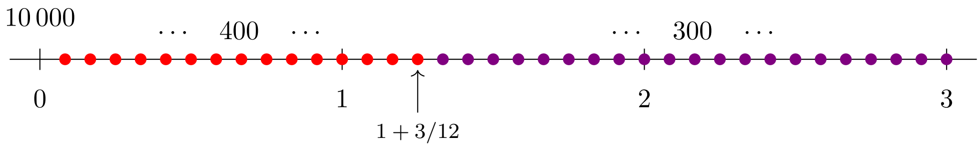
ESERCIZIO 4. Si consideri un progetto di investimento triennale che prevede un esborso iniziale di 10 000€ e successivi incassi così distribuiti: 15 rate mensili da 400€ e altre 21 rate mensili da 300€.

Si stabilisca se il progetto è conveniente nel criterio del REA/VAN al tasso del 10% e perché possiamo affermare che il TIR esiste ed è unico. Si dica poi se il valore del TIR del progetto è maggiore o minore del 9.5%.

Si determini infine il tempo di recupero del progetto.

✎

Può aiutare come sempre una rappresentazione grafica.



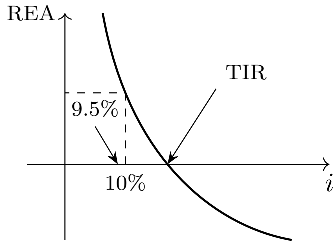
Calcoliamo il REA:

$$\mathrm{REA} = -10\,000 + 400 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|0.1_{1/12}} + 300 \cdot \mathrm{a}_{\overline{21}|0.1_{1/12}}(1 + 0.01_{1/12})^{-15} = 764.42 > 0.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente.

Possiamo affermare che il tasso interno di rendimento esiste ed è unico in quanto si tratta di un progetto di investimento (esborso iniziale e incassi successivi), notando anche che la somma degli incassi, 12 300€, è maggiore dell'esborso iniziale.

Rispondere alla domanda successiva è banale, dato che la positività del REA al tasso del 10% porta a dire che il TIR è maggiore del 10%, e quindi anche maggiore del 9.5%.



Veniamo all'ultima domanda: il tempo di recupero è la scadenza in cui per la prima volta il valore cumulato degli importi passa da negativo a positivo.

Indichiamo con SC_m il saldo cumulato al mese m. Dopo le prime 15 rate abbiamo

$$\mathrm{SC}_{15} = -10\,000 + 400 \cdot 15 = -4\,000.$$

Successivamente si ha

$$\mathrm{SC}_m = -4\,000 + 300 \cdot m$$

e ci serve il primo m per cui risulta $\mathrm{SC}_m > 0$, cioè

$$-4\,000 + 300 \cdot m > 0, \quad \text{cioè} \quad m > \frac{4\,000}{300} = 13.3.$$

Pertanto il tempo di recupero, che è un valore intero, è $15 + 14 = 29$ mesi, cioè 2 anni e 5 mesi.