Svolgimento dei temi d'esame di MDEF
Anno Accademico 2023/24

Alberto Peretti

Settembre 2024

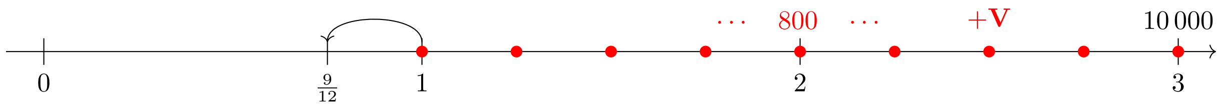
ESAME DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
ESAME DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
PROVA INTERMEDIA
Vicenza, 14/11/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole costituire un capitale di 10 000€ alla fine del terzo anno versando rate trimestrali di 800€, la prima tra un anno. Per raggiungere l'obiettivo occorre integrare con un ulteriore versamento 6 mesi prima della scadenza. Si determini tale versamento aggiuntivo, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 10%.

Volendo evitare il versamento aggiuntivo, di quanto deve aumentare la rata?

✎

Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti. Indico con V il versamento aggiuntivo.



Serve il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del $i = 10\%$. Si ha $i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1 = 0.02411369$.

L'equazione del valore che consente di determinare il versamento aggiuntivo V è

$$800 \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}} (1+i_{1/4})^9 + V(1+i_{1/4})^2 = 10\,000.$$

Si ottiene quindi

$$V = \frac{10\,000 - 800 \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}} (1+i_{1/4})^9}{(1+i_{1/4})^2} = 1\,968.90€.$$

Volendo evitare il versamento aggiuntivo, l'equazione diventa

$$R \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}} (1+i_{1/4})^9 = 10\,000,$$

da cui

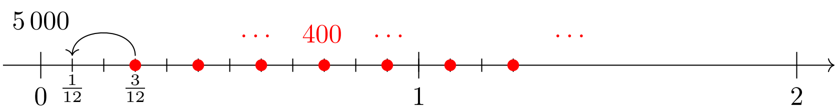
$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{9}|i_{1/4}} (1+i_{1/4})^9} = 1\,008.19€.$$

La rata quindi deve aumentare di $R - 800 = 208.19€$.

ESERCIZIO 2. Contraggo oggi un debito di 5 000€ e lo devo restituire in rate bimestrali di 400€, la prima fra 3 mesi, al tasso del 10%. Supponendo di versare al creditore solo rate intere, dopo quanti mesi da oggi avrò coperto interamente il debito? Quanto avrò versato in più al creditore?

✎

Può essere utile come sempre una rappresentazione grafica.



Con rate intere intendo rate di 400€. Essendo specificato che vengono versate solo rate intere, significa che per coprire interamente il debito verrà versato più del dovuto, da cui la seconda domanda.

La disequazione che rispecchia questa modalità è

$$400 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}} (1+i)^{-1/12} \geq 5\,000,$$

da cui dobbiamo trovare il numero n di rate. La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/6}} \geq \frac{5\,000}{400}(1+i)^{1/12}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1-(1+i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq \frac{5\,000}{400}(1+i)^{1/12}.$$

Indicando per comodità con A la quantità a destra si ottiene

$$1-(1+i_{1/6})^{-n} \geq i_{1/6}A \quad ; \quad (1+i_{1/6})^{-n} \leq 1-i_{1/6}A \quad ; \quad -n\ln(1+i_{1/6}) \leq \ln(1-i_{1/6}A)$$

e infine

$$n \geq -\frac{\ln(1-i_{1/6}A)}{\ln(1+i_{1/6})} = 14.18.$$

Quindi per coprire interamente il debito servono 15 versamenti. Per rispondere esattamente alla domanda (dopo quanti mesi da oggi avrò fatto questo), tenendo conto che le rate sono bimestrali, i mesi da oggi sono $1+15\cdot 2 = 31$.

Passiamo all'ultima domanda: quanto avrò versato in più al creditore? Basta calcolare la differenza tra quanto versato e quanto dovevo restituire. Attenzione però, i due importi vanno valutati nel momento dell'ultima rata, cioè tra 31 mesi.

Posso fare la valutazione della differenza nell'istante iniziale e fare il montante di questa. Nell'istante iniziale si ha

$$\Delta_0 = 400 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/6}}(1+i)^{-1/12} - 5\,000 = 254.53€,$$

il cui montante è

$$\Delta_{31/12} = \Delta_0 \cdot (1+i)^{31/12} = 325.59€.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 8\,000€$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 2 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 24 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 3% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 7%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 3%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.

Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 8\,000€$, l'anticipo $A = P \cdot 0.1 = 800€$ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 400€$.

La società finanziaria spende $8\,000 \cdot (1-0.03) = 7\,760€$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 7\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.07^{1/12} - 1 = 0.00565415$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$7\,760 = 800 + R \cdot a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1+i)^{-2}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{7\,760 - 800 - 400(1+i)^{-2}}{a_{\overline{24}|i_{1/12}}} = 295.33€.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 800€, un riscatto finale di 400€ e un canone di 24 rate trimestrali di 295.33€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi 8 000€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$8\,000 = 800 + 295.33 a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1+i)^{-2},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 3% proposto dalla banca per un prestito di 8 000€. Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 3\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i^{(B)}_{1/12} = 0.00246627$, si trova

$$8\,000 + 295.33 a_{\overline{24}|i^{(B)}_{1/12}} + 400(1+i^{(B)})^{-2} = 8\,051.06€.$$

Dato che $8\,051.06 > 8\,000$, il tasso della banca sconta meno gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è minore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il prestito bancario.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 3 000€ si usa un piano di ammortamento con quote capitale posticipate $C_1 = C_2 = 1\,000$€ e $C_3 = C_4 = 500$€ e anticipazione degli interessi. Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Infine, mantenendo quote capitale posticipate e anticipazione degli interessi, nell'ipotesi di pagare quote capitale che ogni anno aumentano del 50%, si determini la prima quota capitale (C_1) e la terza rata (R_2).

✎

Le quote capitale sono date. C'è anticipazione delle quote interessi, che quindi vanno calcolate sulla base del debito residuo corrente attraverso il tassi di sconto. Si ha

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.1}{1+0.1} = 0.\overline{09}.$$

Ecco i primi passaggi.

$$I_0 = d \cdot D_0 = d \cdot 3\,000 = 272.73€.$$

La prima rata è quindi $R_0 = I_0 = 272.73$€.

Possiamo ora ricavare il nuovo debito residuo dopo il pagamento della prima quota capitale.

$$D_1 = D_0 - C_1 = 3\,000 - 1\,000 = 2\,000€.$$

Ora la nuova quota interessi.

$$I_1 = d \cdot D_1 = d \cdot 2\,000 = 181.82€. \quad \text{La seconda rata è quindi } R_1 = C_1 + I_1 = 1\,181.82€.$$

Il nuovo debito residuo.

$$D_2 = D_1 - C_2 = 2\,000 - 1\,000 = 1\,000€.$$

La successiva quota interessi I_2, . . . e così via. Il prospetto completo è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	272.73	0	272.73	3 000
1	1 181.82	1 000	181.82	2 000
2	1 090.91	1 000	90.91	1 000
3	545.45	500	45.45	500
4	500	500	0	0

Passiamo ora alla seconda modalità, in cui rimane l'anticipazione degli interessi e riguardo le quote capitale, sempre posticipate, sappiamo che ogni anno aumentano del 50%. Ricordando che la somma delle quote capitale deve uguagliare il debito iniziale, ponendo $C_1 = C$, possiamo scrivere l'equazione

$$C + C \cdot 1.5 + C \cdot 1.5^2 + C \cdot 1.5^3 = 3\,000,$$

da cui si ricava

$$C = \frac{3\,000}{1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3} = 369.23€.$$

Ora possiamo calcolare tutte le quote capitale, tenendo conto della crescita ogni anno del 50%, e l'esercizio è analogo a quello relativo alla prima modalità.

Non è richiesta la compilazione completa del piano di ammortamento, ma soltanto la determinazione della prima quota capitale ($C_1 = C = 369.23$€, già trovata) e la terza rata (R_2). Per la rata si ha

$$D_1 = 3\,000 - C_1 = 2\,630.77€ \quad , \quad C_2 = C_1 \cdot 1.5 = 553.85€ \quad , \quad D_2 = D_1 - C_2 = 2\,076.92€ \quad , \quad I_2 = d \cdot D_2 = 188.81€$$

e quindi

$$R_2 = C_2 + I_2 = 742.66€.$$

Concludo con un'osservazione, relativa al fatto che, essendo le quote capitale in progressione geometrica (di ragione 1.5) potrebbe venire l'idea di usare la formula che dà il valore attuale di una rendita in progressione geometrica appunto, cioè

$$V_0 = \begin{cases} Rv\dfrac{1-(qv)^n}{1-qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$

adattandola ai dati del piano di ammortamento, cioè con $V_0 = 3\,000$, $R = C_1$, $q = 1.5$ e $v = \frac{1}{1+i}$. In particolare sarebbe errato usare un fattore di sconto, dato che è la somma delle quote capitale a uguagliare il debito, non il valore attuale cumulato di queste.

Si può comunque utilizzare la formula qui sopra, ma ponendo $v = 1$, che comporta l'assenza di un effetto attualizzazione. Così facendo si può scrivere l'equazione

$$C_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 3\,000$$

da cui si ricava

$$C_1 = 3\,000 \cdot \frac{1-1.5}{1-1.5^4} = 369.23€, \text{ come trovato prima.}$$

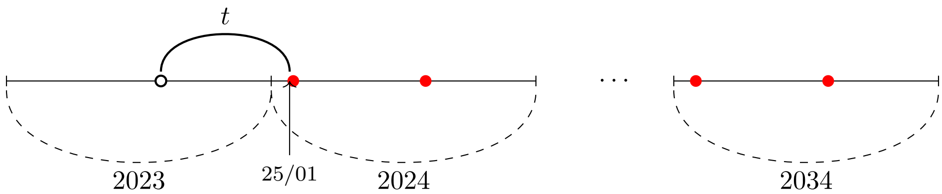
PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 02/02/2024

ESERCIZIO 1. Il B.T.P. denominato `Btp-1ag34 5%`, con scadenza il 01/08/2034, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 5\%$. Il 25/01/2024 era quotato (corso secco) a 109.97. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 3.27%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 25/01/2024, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.05}{2} \cdot 100(1-0.125) = 2.1875.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/08/2034 il titolo paga $n = 22$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/08/2023) è $t = 30 \cdot 5 + 25 = 175$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.1875 \cdot \frac{175}{180} = 2.1267.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 109.97 + 2.1267 = 112.097.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.1875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{22}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{175/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-22+175/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 3.27% basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.27% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.1875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{22}|0.0327_{1/2}}(1+0.0327_{1/2})^{175/180} + 100(1+0.0327_{1/2})^{-22+175/180} = 112.137 \simeq P_{\text{tq}}.$$

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/08/2034. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con $i^{\text{eff}}_{1/2}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{-175/180+22}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{22}|0.01_{1/2}}\left(1+0.01_{1/2}\right)^{22} = 50.731.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1+i_{1/2}^{\text{eff}})^{-175/180+22} = M + 100.$$

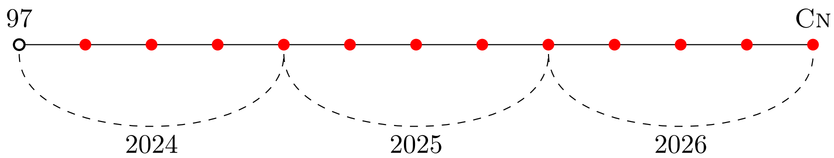
Si trova

$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M+100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-175/180+22)} - 1 = 0.0141827 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1+i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.0285665.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2024 con le seguenti caratteristiche:
- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 97$.

Si consideri la tassazione. Si verifichi che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era vicino al 4.5%. Utilizzando la duration al tasso del 4.5%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 5%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/08/2024 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3% (si usi l'anno commerciale).



La cedola netta trimestrale è

$$\text{CED} = \frac{r}{4}F(1-\gamma) = \frac{0.04}{4}\cdot 100(1-0.125) = 0.875.$$

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\text{CN} = 100 - (100-97)\gamma = 99.625.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = \text{CED}\cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}} + \text{CN}(1+ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4.5% annuo si ottiene

$$\text{CED}\cdot a_{\overline{12}|0.045_{1/4}} + \text{CN}(1+0.045)^{-3} = 97.08 \simeq 97.$$

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1+i_{1/4}) - 12(1+i)^{-3}}{i_{1/4}} = 71.2025141.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(0.045) = \frac{\text{CED}\cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} + 12\cdot \text{CN}(1+i)^{-3}}{\text{CED}\cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + \text{CN}(1+i)^{-3}} = 11.4326031 \quad \text{(trimestri)}.$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (97.08). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.045) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.85815076.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.045)}{1+0.045} = 2.7350725.$$

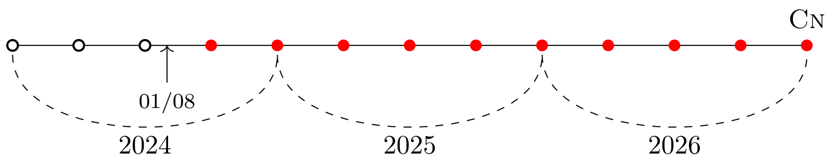
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 5%, e quindi $\Delta i = +0.045 \cdot 0.05 = +0.00225$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.7350725 \cdot (0.00225) \cdot 97.08 = -0.5974.$$

Veniamo ora all'ultima domanda, il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/08/2024 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3%.



Le cedole da considerare ora sono 10. C'è un rateo relativo a $t = 30$ giorni, cioè $\frac{30}{90}$ (1/3) di un trimestre. Essendoci la tassazione, non sappiamo se questa è anche sul valore di rimborso, dato che questo dipende dal corso secco, che non conosciamo. Allora si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso ($\text{C}_{\text{N}} = 100$) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari.

Si ha

$$P_{\text{tq}} = \text{C}_{\text{ED}} \cdot a_{\overline{10}|0.03_{1/4}} \left(1+0.03_{1/4}\right)^{1/3} + 100\left(1+0.03_{1/4}\right)^{-10+1/3} = 101.5299.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest'ultimo. Il rateo è $\text{C}_{\text{ED}} \cdot \frac{30}{90} = 0.29167$ e quindi il corso secco è $P_s = 101.5299 - 0.29167 = 101.2382 > 100$: l'ipotesi della non tassazione del rimborso è corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 101.5299.

ESERCIZIO 3. Si consideri il progetto di investimento

	-10	5	6	1
$A.$	0	1	2	3

con la struttura (piatta) dei tassi data da un tasso annuo del 5%.

Si stabilisca se il progetto risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN rispetto al semplice investimento di denaro.

Perché possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento?

Si dica se il valore del TIR è maggiore del 12% oppure no.

Si valuti infine il progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$.

Calcoliamo il REA al tasso del 5%.

$$\text{REA}(0.05) = -10 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 6 \cdot 1.05^{-2} + 1 \cdot 1.05^{-3} = 1.06.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente rispetto all'investimento di denaro.

Possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento in quanto il flusso cumulato è

$$-10\ ,\ -5\ ,\ +1\ ,\ +2$$

e c'è un unico cambio di segno, condizione sufficiente per poter affermare che esiste un unico TIR.

Con una struttura piatta e un tasso $i = 12\%$ il REA diventa

$$\text{REA}(0.12) = -10 + 5 \cdot 1.12^{-1} + 6 \cdot 1.12^{-2} + 1 \cdot 1.12^{-3} = -0.04 < 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è minore del 12%.

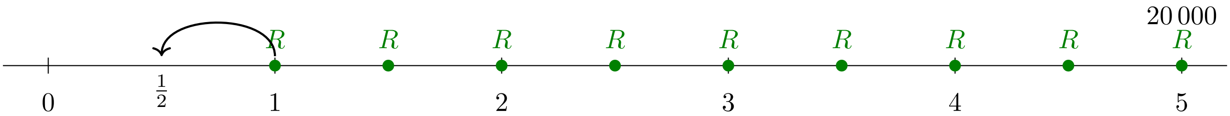
Veniamo all'ultima domanda: la valutazione del progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$. Abbiamo i seguenti montanti:

$$M_0 = -10 \quad ; \quad M_1 = -10 \cdot 1.1 + 5 = -6 \quad ; \quad M_2 = -6 \cdot 1.1 + 6 = -0.6 \quad ; \quad M_3 = -0.6 \cdot 1.1 + 1 = 0.34.$$

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 02/02/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 20 000€ fra 5 anni versando rate semestrali, la prima tra un anno. Si determini la rata semestrale necessaria. Arrivati alla fine del 3º anno, c'è l'impossibilità di versare la corrispondente rata. Si determini il nuovo valore delle rimanenti rate per raggiungere lo stesso obiettivo. Il tasso di interesse annuo da applicare è del 5%.

✎



Faccio notare che l'ultima rata è da considerare in $t = 5$, dato che non viene indicata una scadenza precedente: le rate sono quindi 9. L'equazione che esprime la costituzione del capitale di 20 000€ fra 5 anni mediante le 9 rate semestrali è

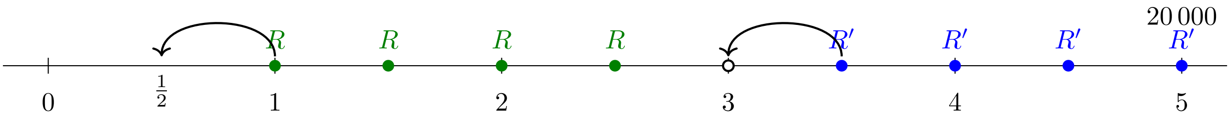
$$R \cdot a_{\overline{9}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9 = 20\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{20\,000}{a_{\overline{9}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9} = 2\,011.63€.$$

Passiamo alla seconda domanda. Per non interpretare male la nuova situazione faccio notare che il senso è questo: siamo arrivati alla fine del 3º anno e abbiamo già versato 4 rate da 2 011.63€. Ci accorgiamo che non siamo in grado di versare la rata corrente. Dobbiamo quindi riprogrammare i futuri versamenti ricalcolando il valore delle 4 rate mancanti.

La rappresentazione è naturalmente questa:



L'equazione per la nuova rata, che indico con R', è

$$2\,011.63 \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9 + R' \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2 = 20\,000,$$

da cui ricavo

$$R' = \frac{20\,000 - 2\,011.63 \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9}{a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2} = 2\,545.96€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito D_0 di 1 000€, si usa un piano di ammortamento tedesco (rate posticipate ma con anticipazione degli interessi) con un tasso di interesse annuo del 10%. Si costruisca il piano di ammortamento, riportando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale. Si trovi poi la rata per il rimborso dello stesso debito, alle stesse condizioni, con un piano di ammortamento francese, con prima quota capitale e prima quota interessi.

✎

L'ammortamento tedesco prevede quote capitale costanti e quote interessi anticipate, da calcolare quindi moltiplicando il debito residuo corrente per il tasso di sconto. Abbiamo quindi

$$C = 1\,000/4 = 250 \qquad \text{e} \qquad I_0 = d \cdot D_0 = \frac{0.1}{1 + 0.1} \cdot 1\,000 = 90.91€.$$

Si trovano facilmente, a seguire, tutte le altre quantità. Il prospetto complessivo è pertanto questo:

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	90.91	0	90.91	1 000
1	318.18	250	68.18	750
2	295.45	250	45.45	500
3	272.73	250	22.73	250
4	250	250	0	0

La verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale consiste nel verificare che

$$90.91 + 318.18(1+1)^{-1} + 295.45(1+1)^{-2} + 272.73(1+1)^{-3} + 250(1+1)^{-4} = 999.9975 \simeq 1\,000.$$

Passiamo alla seconda modalità, con gli stessi dati ma con un ammortamento francese. Nell'ammortamento francese abbiamo la rata costante (R) e quindi l'equazione che ci permette di trovarla (equivalenza finanziaria) è

$$R \cdot \mathrm{a}_{\overline{4}|0.01} = 1\,000 \qquad \text{da cui} \qquad R = \frac{1\,000}{\mathrm{a}_{\overline{4}|0.01}} = 315.47€.$$

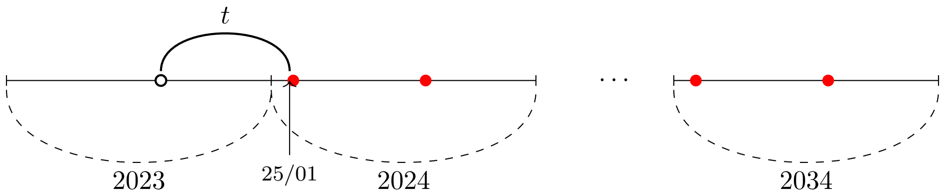
La prima quota interessi (posticipata) è $I_1 = i \cdot D_0 = 100$. La prima quota capitale è quindi, per differenza, $C_1 = R - I_1 = 215.47€$.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1ag34 5%`, con scadenza il 01/08/2034, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 5\%$. Il 25/01/2024 era quotato (corso secco) a 109.97. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 3.27%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 25/01/2024, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.05}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.1875.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/08/2034 il titolo paga $n = 22$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/08/2023) è $t = 30 \cdot 5 + 25 = 175$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.1875 \cdot \frac{175}{180} = 2.1267.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 109.97 + 2.1267 = 112.097.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.1875 \cdot \mathrm{a}_{\overline{22}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{175/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-22+175/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 3.27% basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.27% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.1875 \cdot a_{\overline{22}|0.0327_{1/2}}(1+0.0327_{1/2})^{175/180} + 100(1+0.0327_{1/2})^{-22+175/180} = 112.137 \simeq P_{\text{tq}}.$$

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/08/2034. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con $i^{\text{eff}}_{1/2}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{\text{tq}}(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{-175/180+22}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{C}\small{\text{ED}} \cdot a_{\overline{22}|0.01_{1/2}}\left(1+0.01_{1/2}\right)^{22} = 50.731.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{-175/180+22} = M + 100.$$

Si trova

$$i^{\text{eff}}_{1/2} = \left(\frac{M+100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-175/180+22)} - 1 = 0.0141827 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1+i^{\text{eff}}_{1/2})^2 - 1 = 0.0285665.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri il progetto di investimento

$$A. \quad \begin{array}{cccc} -10 & 5 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

con la struttura (piatta) dei tassi data da un tasso annuo del 5%.

Si stabilisca se il progetto risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN rispetto al semplice investimento di denaro.

Perché possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento?

Si dica se il valore del TIR è maggiore del 12% oppure no.

Si valuti infine il progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$.

✎

Calcoliamo il REA al tasso del 5%.

$$\text{REA}(0.05) = -10 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 6 \cdot 1.05^{-2} + 1 \cdot 1.05^{-3} = 1.06.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente rispetto all'investimento di denaro.

Possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento in quanto il flusso cumulato è

$$-10\ ,\ -5\ ,\ +1\ ,\ +2$$

e c'è un unico cambio di segno, condizione sufficiente per poter affermare che esiste un unico TIR.

Con una struttura piatta e un tasso $i = 12\%$ il REA diventa

$$\text{REA}(0.12) = -10 + 5 \cdot 1.12^{-1} + 6 \cdot 1.12^{-2} + 1 \cdot 1.12^{-3} = -0.04 < 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è minore del 12%.

Veniamo all'ultima domanda: la valutazione del progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$. Abbiamo i seguenti montanti:

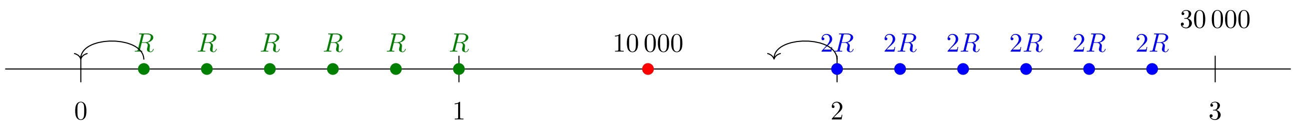
$$M_0 = -10 \quad ; \quad M_1 = -10 \cdot 1.1 + 5 = -6 \quad ; \quad M_2 = -6 \cdot 1.1 + 6 = -0.6 \quad ; \quad M_3 = -0.6 \cdot 1.1 + 1 = 0.34.$$

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 19/02/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 30 000€ fra 3 anni versando 6 rate posticipate immediate R bimestrali, un versamento di 10 000€ tra un anno e mezzo e altre 6 rate bimestrali $2R$, la prima tra 2 anni. Si determini il valore delle rate bimestrali. Il tasso di interesse annuo è del 10%.

Si determinino poi i tre valori attualizzati (in $t = 0$) delle 6 rate iniziali, del versamento intermedio e delle 6 rate finali.

✎



L'equazione che esprime la costituzione del capitale di 30 000€ fra 3 anni con la modalità indicata è

$$R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1+0.1)^3 + 10\,000 \cdot (1+0.1)^{1.5} + 2R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1+0.1_{1/6})^7 = 30\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000 - 10\,000 \cdot (1+0.1)^{1.5}}{a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1+0.1)^3 + 2a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1+0.1_{1/6})^7} = 911.86 euro.$$

Il valore delle rate bimestrali è quindi $R = 911.86$€ per le prime sei e $2R = 1823.73$€ per le ultime sei.

I tre valori attualizzati in $t = 0$ delle 6 rate iniziali (V_0^R), del versamento intermedio (V_0^{int}) e delle 6 rate finali (V_0^{2R}) sono

$$V_0^R = R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}} = 5177.21€ \quad , \quad V_0^{\text{int}} = 10\,000 \cdot (1+0.1)^{-1.5} = 8667.84€ \quad , \quad V_0^{2R} = 2R \cdot a^{-11}_{\overline{6}|0.1_{1/6}} = 8694.39€.$$

ESERCIZIO 2. Restituisco un prestito di 1 000€ in 3 anni mediante rate posticipate R_1, R_2, R_3 in progressione geometrica di ragione $q = 0.9$, al tasso del 10% annuo. Le quote interessi si versano con le stesse modalità di un piano di ammortamento italiano, in funzione del debito residuo. Si costruisca il piano di ammortamento, riportando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Nel caso la quota interessi sia anticipata e le rate R_1, R_2, R_3 siano ancora in progressione geometrica come in precedenza, si trovi la nuova rata R_1, le quote interessi I_0, I_1 e la quota capitale C_1.

✎

Ponendo $i = 10\%$, possiamo determinare subito la prima rata (R_1), in due modi. Con l'equivalenza finanziaria

$$R_1 \cdot (1+i)^{-1} + R_2 \cdot (1+i)^{-2} + R_3 \cdot (1+i)^{-3} = 1\,000$$

che, tendendo conto che le rate sono in progressione geometrica di ragione q, diventa

$$R_1 \cdot (1+i)^{-1} + qR_1 \cdot (1+i)^{-2} + q^2 R_1 \cdot (1+i)^{-3} = 1\,000,$$

da cui

$$R_1 = \frac{1\,000}{(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + q^2(1+i)^{-3}} = 442.19€.$$

Oppure con la formula del valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica.[1]

$$R_1 v \frac{1-(qv)^n}{1-qv} = 1\,000, \text{ con } q = 0.9 \text{ e } v = \frac{1}{1+i} = 0.\overline{90},$$

[1] Il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica di ragione q e fattore di sconto v è $V_0 = Rv\dfrac{1-(qv)^n}{1-qv}$ se $qv \neq 1$.

da cui

$$R_1 = \frac{1\,000}{v} \cdot \frac{1-qv}{1-(qv)^n} = 442.19€.$$

Una volta note le rate, considerando che le quote interessi si ricavano con le stesse modalità di un piano di ammortamento italiano, e cioè dal debito residuo precedente, possiamo facilmente ricavare prima le quote interessi e poi le quote capitale per differenza.[2] Il piano complessivo che risulta è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	442.19	342.19	100	657.81
2	397.97	332.19	65.78	325.61
3	358.18	325.61	32.56	0

Passiamo alla seconda modalità, con quote interessi anticipate e rate R_1, R_2, R_3 ancora in progressione geometrica Dobbiamo anzitutto trovare la nuova rata R_1.

Può non essere del tutto ovvio il motivo per cui la rata debba cambiare rispetto a prima. Il motivo è che deve sempre esserci equivalenza finanziaria tra il debito iniziale e il valore attuale di tutto quello che si versa, cioè le rate. Rispetto a prima ora c'è un importo da versare anche in $t = 0$, cioè la sola prima quota interessi I_0. Pertanto ora l'equivalenza finanziaria è

$$I_0 + R'_1 \cdot (1+i)^{-1} + R'_2 \cdot (1+i)^{-2} + R'_3 \cdot (1+i)^{-3} = 1\,000$$

e quindi necessariamente le rate R_1, R_2, R_3 cambiano. Le ho indicate con R'_1, R'_2, R'_3.

Ricordando che $I_0 = d \cdot D_0 = 90.91€$ (attraverso il tasso di sconto d), per trovare R'_1 basta risolvere l'equazione

$$R'_1 = \frac{1\,000 - I_0}{(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + q^2(1+i)^{-3}} = 401.99€.$$

Finiamo con le quote interessi I_1 e la quota capitale C_1. In realtà alla scadenza $t = 1$ abbiamo 3 incognite: I_1, C_1, D_1, ma possiamo ridurle a 2 tenendo conto che $I_1 = d \cdot D_1$. Quindi le relazioni fondamentali

$$\begin{cases} C_1 + I_1 = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1 \end{cases} \quad \text{diventano} \quad \begin{cases} C_1 + d\,D_1 = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima il sistema diventa

$$\begin{cases} C_1 + d\,(D_0 - C_1) = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} C_1(1-d) = R_1 - d\,D_0 \\ D_1 = D_0 - C_1, \end{cases}$$

che fornisce

$$C_1 = \frac{R_1 - d\,D_0}{1-d} = 342.19€ \quad ; \quad D_1 = D_0 - C_1 = 657.81€ \quad ; \quad I_1 = d \cdot D_1 = 59.80€.$$

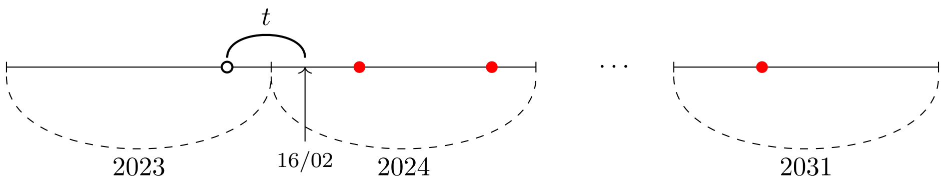
ESERCIZIO 3. Il B.T.P. ventennale denominato `Btp-1mg31 6%`, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 16/02/2024 era quotato (corso secco) a 115.36. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 2.89%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo all'emissione al prezzo 103, di averlo venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato in precedenza e di aver reinvestito le cedole incassate fino alla vendita al tasso del 2%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.

[2] In pratica si usano in sequenza per i valori $t = 1, 2, 3$ le due formule $I_t = i \cdot D_{t-1}$ e $C_t = R_t - I_t$.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.06}{2} \cdot 100(1-0.125) = 2.625.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 1 + 14 = 15$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2023) è $t = 30 \cdot 3 + 16 = 106$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625 \cdot \frac{106}{180} = 1.546.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 115.36 + 1.546 = 116.906.$$

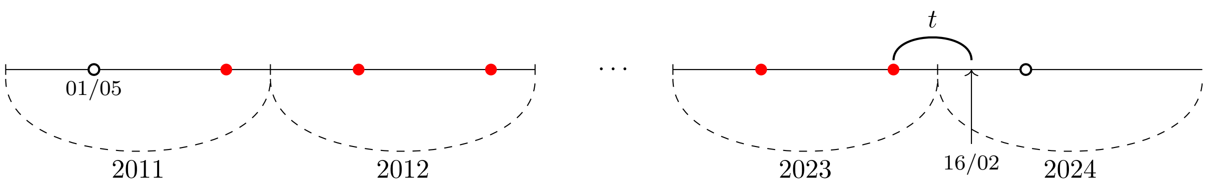
L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{106/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-15+106/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 2.89% basta calcolare il termine di destra al tasso del 2.89% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.625 \cdot \mathrm{a}_{\overline{15}|0.0289_{1/2}}(1+0.0289_{1/2})^{106/180} + 100(1+0.0289_{1/2})^{-15+106/180} = 116.938 \simeq P_{\text{tq}}.$$

La seconda domanda non riguarda più il futuro, ma il passato. Essendo un titolo ventennale è stato emesso il 01/05/2011 al prezzo $P_E = 103$. Viene venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato prima, cioè $P_{\text{tq}} = 116.906$. È opportuna una nuova figura.



Il numero di cedole incassate prima della vendita è $n = 1 + 24 = 25$ (oppure più semplicemente $40 - 15$).

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal valore di vendita. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 16/02/2024. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2%.

Indicando con $i^{\text{eff}}_{1/2}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_E(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{25+106/180}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{Ced} \cdot \mathrm{a}_{\overline{25}|0.02_{1/2}}\left(1+0.02_{1/2}\right)^{25+106/180} = 62.105.$$

Attenzione che il valore di vendita viene tassato, in quanto c'è una plusvalenza tra acquisto e vendita. Si ha

$$\text{Cn} = P_{\text{tq}} - (P_{\text{tq}} - P_E) \cdot \gamma = 115.168.$$

L'equazione è pertanto

$$P_E(1+i^{\text{eff}}_{1/2})^{25+106/180} = M + \text{Cn},$$

da cui

$$i^{\text{eff}}_{1/2} = \left(\frac{M + \text{C}_\text{N}}{P_E}\right)^{1/(25+106/180)} - 1 = 0.02144533 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1 + i^{\text{eff}}_{1/2})^2 - 1 = 0.04335056.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri il progetto di investimento

$$\begin{array}{cccc} -10 & 7 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

con la struttura (piatta) dei tassi data da un tasso annuo del 5%.

Si stabilisca se il progetto risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN rispetto al semplice investimento di denaro.

Perché possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento?

Si dica se il valore del TIR è maggiore del 20% oppure no.

Si valuti infine il progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$.

✎

Calcoliamo il REA al tasso del 5%.

$$\text{REA}(0.05) = -10 + 7 \cdot 1.05^{-1} + 4 \cdot 1.05^{-2} + 2 \cdot 1.05^{-3} = 2.02.$$

Il REA è positivo e quindi il progetto è conveniente rispetto all'investimento di denaro.

Possiamo affermare che per il progetto esiste unico il tasso interno di rendimento in quanto il flusso cumulato è

$$-10\ ,\ -3\ ,\ +1\ ,\ +3$$

e c'è un unico cambio di segno, condizione sufficiente per poter affermare che esiste un unico TIR.

Con una struttura piatta e un tasso $i = 20\%$ il REA diventa

$$\text{REA}(0.2) = -10 + 7 \cdot 1.2^{-1} + 4 \cdot 1.2^{-2} + 2 \cdot 1.2^{-3} = -0.231 < 0,$$

e quindi il TIR per il progetto A è minore del 20%.

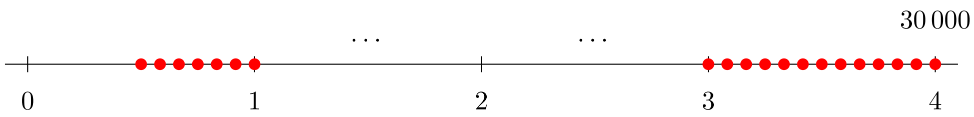
Veniamo all'ultima domanda: la valutazione del progetto sulla base del criterio TRM con un tasso a credito $i_+ = 5\%$ e un tasso a debito $i_- = 10\%$. Abbiamo i seguenti montanti:

$$M_0 = -10 \quad ; \quad M_1 = -10 \cdot 1.1 + 7 = -4 \quad ; \quad M_2 = -4 \cdot 1.1 + 4 = -0.4 \quad ; \quad M_3 = -0.4 \cdot 1.1 + 2 = 1.56.$$

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 11/07/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 30 000€ fra 4 anni versando rate mensili costanti, la prima tra 6 mesi (e l'ultima alla fine del 4° anno). Si trovi la rata necessaria, con un tasso di interesse annuo del 3%. Scegliendo invece una modalità di accumulazione che prevede rate trimestrali (anche qui la prima tra 6 mesi) in progressione geometrica, che aumentano in ogni periodo del 10%, si determinino la prima e l'ultima rata.

✎



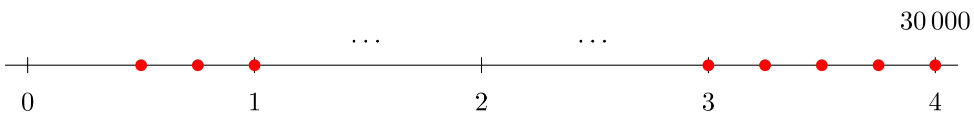
Con rate mensili, la prima tra 6 mesi, versiamo in tutto $48 - 5 = 43$ rate. Serve il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 3% e si ha $0.03_{1/12} = (1 + 0.03)^{1/12} - 1 = 0.00246627$.
L'equazione del valore è

$$R \cdot a_{\overline{43}|0.03_{1/12}} (1 + 0.03_{1/12})^{43} = 30\,000$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000}{a_{\overline{43}|0.03_{1/12}} (1 + 0.03_{1/12})^{43}} = 662.19€.$$

Passiamo alla seconda modalità, con rate trimestrali in progressione geometrica. Una rappresentazione può essere questa.



Ci sono ora $16 - 1 = 15$ rate. La formula che dà il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica è

$$V_0 = \begin{cases} Rv \dfrac{1 - (qv)^n}{1 - qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$

dove R è la prima rata, q è la ragione della progressione e v è il fattore di sconto relativo al periodo.
Nel nostro caso la ragione è $q = 1.1$ e il fattore di sconto (relativo a un trimestre) è $v = \frac{1}{1+i_{1/4}}$.

$$\text{Con} \quad i_{1/4} = 0.03_{1/4} = (1 + 0.03)^{1/4} - 1 = 0.007417072 \quad \text{si ha} \quad v = \frac{1}{1 + i_{1/4}} = 0992637536.$$

Pertanto l'equazione del valore è

$$Rv \frac{1 - (qv)^{15}}{1 - qv} \cdot (1 + i_{1/4})^{15} = 30\,000$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000}{v \frac{1-(qv)^{15}}{1-qv} \cdot (1 + i_{1/4})^{15}} = 907.67€.$$

Questa è la prima rata. L'ultima è (attenzione)

$$R_{15} = R \cdot q^{14} = 3\,446.87€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito di 1 000€ si usa un piano di ammortamento a rate posticipate che ogni anno diminuiscono del 10%.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Cosa cambierebbe di rilevante, nelle formule per la risoluzione, se le rate invece aumentassero del 10%? A quanto ammonterebbero la prima rata e l'ultima rata?

✎

Le rate sono in progressione geometrica, come nell'esercizio precedente. Qui i parametri sono

$$i = 10\% \quad , \quad v = \frac{1}{1+i} = 0.\overline{90} \quad , \quad q = 0.9.$$

Possiamo determinare subito la prima rata, che indico con R_1, attraverso l'equazione

$$R_1 v \frac{1-(qv)^4}{1-qv} = 1\,000 \quad \text{da cui} \quad R_1 = \frac{1\,000}{v\frac{1-(qv)^4}{1-qv}} = 362.40€.$$

A questo punto le altre parti del piano di ammortamento possono essere ricavate "a cascata".

La prima quota interessi

$$I_1 = 0.1 \cdot 1\,000 = 100€.$$

La prima quota capitale

$$C_1 = R_1 - I_1 = 362.40 - 100 = 262.40€.$$

Il nuovo debito residuo

$$D_1 = 1\,000 - C_1 = 737.60€.$$

La nuova quota interessi

$$I_2 = 0.1 \cdot 737.60 = 73.76€, \quad \text{e così via.}$$

Ecco il prospetto completo.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1 000
1	362.40	262.40	100	737.60
2	326.16	252.40	73.76	485.20
3	293.54	245.03	48.52	240.17
4	264.19	240.17	24.02	0

Se le rate aumentassero del 10%, con un tasso del 10% ci troveremmo nella situazione che l'attualizzazione finanziaria compenserebbe esattamente l'aumento della progressione. Nelle formule usate cambierebbe quella del valore attuale delle rate, che si semplificherebbe in $V_0 = nRv$. Infatti, con $q = 1.1$ e $v = \frac{1}{1.1}$ avremmo $qv = 1$. Quindi in questo caso l'equazione del valore sarebbe

$$4 \cdot R_1 \cdot v = 1\,000 \quad \text{da cui} \quad R_1 = \frac{1\,000}{4v} = 275€ \text{ (prima rata).}$$

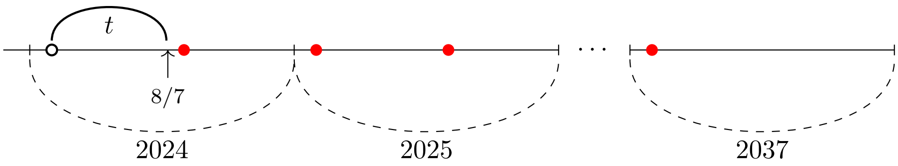
L'ultima rata ammonterebbe a $R_4 = 275 \cdot 1.1^3 = 366.05€$.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1fb37 4%`, con scadenza il 01/02/2037, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 4\%$. Il 08/07/2024 era quotato (corso secco) a 100.42. Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza non era lontano dal 3.5%.

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 08/07/2024 e di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

✎

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Fino alla scadenza del 01/02/2037 il titolo paga $n = 26$ cedole. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi (il tasso cedolare è $r = 0.04$) la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1-\gamma) = \frac{0.04}{2} \cdot 100(1-0.125) = 1.75.$$

Alla data di valutazione (08/07/2024) il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/02/2024) è

$$t = 30 \cdot 5 + 8 = 158 \text{ giorni.} \quad \text{Quindi} \quad \text{rateo} = 1.75 \cdot \frac{158}{180} = 1.536.$$

Il prezzo tel quel è allora

$$P_{\text{tq}} = P_{\text{s}} + \text{rateo} = 100.42 + 1.536 = 101.956.$$

Non abbiamo plusvalenza e quindi il valore di rimborso netto è $C_N = 100$.

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 1.75 \cdot \text{a}_{\overline{26}|ytm_{1/2}}(1+ytm_{1/2})^{158/180} + 100(1+ytm_{1/2})^{-26+158/180}.$$

Viene chiesto di verificare che il tasso di rendimento a scadenza non era lontano dal 3.5%.

Basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.5%. Si ha

$$1.75 \cdot \text{a}_{\overline{26}|0.035_{1/2}}(1+0.035_{1/2})^{158/180} + 100(1+0.035_{1/2})^{-26+158/180} = 101.848.$$

Questo valore è molto vicino al prezzo tel quel effettivo, l'errore relativo è poco più dell'1‰.

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/02/2037. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\text{tq}}(1+i_{\text{eff}})^{-158/360+13} = M + C_N.$$

Troviamo M.

$$M = 1.75 \cdot \text{a}_{\overline{26}|0.01_{1/2}}(1+0.01)^{13} = 50.445. \quad \text{Ricordo che } C_N = 100 \quad \text{e} \quad P_{\text{tq}} = 101.956.$$

Pertanto possiamo ricavare

$$i_{\text{eff}} = \left(\frac{M+100}{P_{\text{tq}}}\right)^{1/(-158/360+13)} - 1 = \left(\frac{50.445+100}{101.956}\right)^{1/(-158/360+13)} - 1 = 0.03023529 \sim 3.02\%.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 15 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1% (modalità A), oppure con un finanziamento di 9 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 770€ (modalità B). Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 50€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10% e si dica quale modalità è preferibile.

Si determini una prima approssimazione (con la formula studiata per questo tipo di situazioni) dei tassi T.A.N. e T.A.E.G. su base annua del finanziamento, indicando poi se l'approssimazione trovata è per difetto o per eccesso.

Si verifichi infine che il tasso effettivo di costo i^{eff} su base annua dell'acquisto attraverso il finanziamento non è lontano dal 9.5%.

✎

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A = -15\,000(1-0.01) = -14\,850.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 15 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 6 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 50€, e le 12 rate mensili posticipate di 770€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -6\,000 - 50 - 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -14,828.38.$$

La modalità B è quindi preferibile alla modalità A.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, senza considerare le spese accessorie, l'equazione è

$$15\,000 = 6\,000 + 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 9\,000 = 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\text{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. La formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 9\,000/770)}{13 \cdot 9\,000/770} = 0.0041026 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\text{TAN}_0 = 0.05035695$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$9\,000 = 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $8\,998.24 < 9\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$15\,000 = 6\,000 + 50 + 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 8\,950 = 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 8\,950/770)}{13 \cdot 8\,950/770} = 0.0049850 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\text{TAEG}_0 = 0,06148716$.

Per valutare il tipo di approssimazione consideriamo l'equazione

$$8\,950 = 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $8\,947.44 < 8\,950$. Anche qui l'approssimazione è per eccesso.

Vediamo ora il tasso effettivo. Questo esce dal confronto tra le due effettive possibilità, cioè il contratto di finanziamento oppure il pagamento immediato del prezzo scontato. L'equazione che definisce il tasso effettivo i^{eff} è

$$15\,000(1-0.01) = 6\,000 + 50 + 770 \cdot \text{a}_{\overline{12}|i^{\text{eff}}_{1/12}}.$$

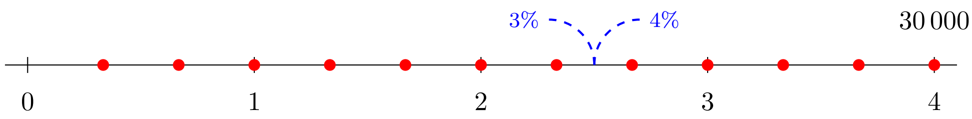
La valutazione del termine di destra con un tasso di prova del 9.5% ($0.095_{1/12} = 0.007591534$) è

14 849.76, valore molto vicino a 14 850,

e questo porta a dire che il tasso effettivo non è lontano dal 9.5%.

ESAME di MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
Vicenza, 30/08/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole costituire un capitale di 30 000€ fra 4 anni versando rate posticipate quadrimestrali costanti (l'ultima alla fine del 4° anno). Si trovi la rata necessaria, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 3% per due anni e mezzo e del 4% successivamente.



Ci sono 12 rate quadrimestrali (costanti) e abbiamo un cambio di tasso dopo 2 anni e mezzo. Servono anzitutto i tassi quadrimestrali equivalenti ai tassi annui del 3% e del 4%. Si ha

$$0.03_{1/3} = (1+0.03)^{1/3} - 1 = 0.00990163 \quad , \quad 0.04_{1/3} = (1+0.04)^{1/3} - 1 = 0.01315940.$$

Indicando con R la rata da determinare, l'equazione del valore è

$$30\,000 = R \cdot a_{\overline{7}|0.03_{1/3}}(1+0.03)^{2.5} \cdot (1+0.04)^{1.5} + R \cdot a_{\overline{5}|0.04_{1/3}}(1+0.04_{1/3})^{5},$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000}{a_{\overline{7}|0.03_{1/3}}(1+0.03)^{2.5} \cdot (1+0.04)^{1.5} + a_{\overline{5}|0.04_{1/3}}(1+0.04_{1/3})^{5}} = 2\,340.19€.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 3 anni un debito D_0 di 1 000€, si usa un piano di ammortamento con quote interessi anticipate e le seguenti caratteristiche:

- una rata R_0 di sola quota interessi
- una rata $R_1 = 400$€ (con quote capitale e interessi)
- una rata R_2 di sola quota interessi
- una rata R_3 di sola quota capitale.

Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale.

Dato che le quote interessi sono anticipate,[3] possiamo ricavare subito la prima quota interessi

$$I_0 = d \cdot 1\,000 = 90.91€.$$

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	I_0	0	I_0	$\longleftarrow 1\,000$
1	400	C_1	I_1	$\longleftarrow D_1$
2	I_2	0	I_2	$\longleftarrow D_2$
3	C_3	C_3	0	0

I dati permettono di partire dal prospetto qui a fianco.

Propongo due modi diversi di arrivare al completamento del piano.

Tra le quantità C_1, I_1, D_1 sussistono le relazioni

$$\begin{cases} C_1 + I_1 = 400 \\ I_1 = d \cdot D_1 \\ D_1 = 1\,000 - C_1. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di 3 equazioni in 3 variabili e può essere risolto (ad esempio) per sostituzione.

Sostituendo nella prima equazione le altre due, tutto in funzione di D_1, si ha

$$1\,000 - D_1 + d \cdot D_1 = 400 \quad ; \quad D_1(1-d) = 600 \quad ; \quad D_1 = \frac{600}{1-d} = 660.$$

[3] Si ricordi che, quando gli interessi sono anticipati, la quota va calcolata moltiplicando il debito residuo corrente per il tasso di sconto d, equivalente al tasso di interesse fornito. Nel nostro caso quindi si ha $d = \frac{0.1}{1+0.1} = 0.\overline{09}$.

Si ricava allora

$$I_1 = d \cdot 660 = 60 \quad , \quad C_1 = 1\,000 - 660 = 340$$

e ancora

$$D_2 = D_1 = 660 \quad , \quad I_2 = d \cdot D_2 = 60 \quad , \quad C_3 = D_2 = 660.$$

Il prospetto complessivo è quindi questo:

t	R_t	C_t	I_t	D_t
0	90.91	0	90.91	1 000
1	400	340	60	660
2	60	0	60	660
3	660	660	0	0

La verifica dell'equivalenza finanziaria del piano consiste nel verificare che

$$90.91 + 400 \cdot 1.1^{-1} + 60 \cdot 1.1^{-2} + 660 \cdot 1.1^{-3} = 1\,000.$$

Una modalità alternativa consiste nell'utilizzare subito l'equivalenza finanziaria, dopo aver osservato che I_0 lo conosciamo, $R_3 = C_3$, $D_2 = C_3$ e quindi $R_2 = I_2 = d \cdot C_3$. Pertanto l'equivalenza finanziaria fornisce un'equazione in una variabile (C_3) e può essere risolta. Si ha

$$I_0 + 400 \cdot 1.1^{-1} + dC_3 \cdot 1.1^{-2} + C_3 \cdot 1.1^{-3} = 1\,000,$$

da cui

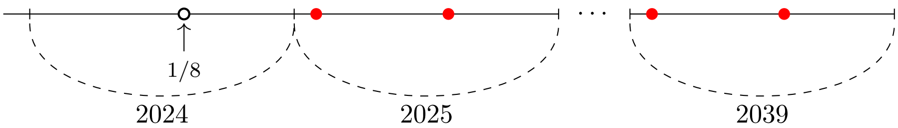
$$C_3 = \frac{1\,000 - I_0 - 400 \cdot 1.1^{-1}}{dC_3 \cdot 1.1^{-2} + 1.1^{-3}} = 660.$$

Le altre quantità si ricavano in sequenza, come prima.

ESERCIZIO 3. Il B.T.P. denominato `Btp-1ag39 5%`, con scadenza il 01/08/2039, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 5\%$. Il 01/08/2024, dopo lo stacco della cedola, presentava un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 4.5\%$ Considerando la tassazione e calcolando i giorni con l'anno commerciale, si dica se un eventuale acquisto in quella data avrebbe comportato la tassazione sul valore di rimborso.

Nell'ipotesi di aver invece acquistato il titolo il 27/08/2024, giorno in cui era quotato (corso secco) 111.37, e di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso del 2%, si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.

Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Mettiamoci al 01/08/2024, subito dopo lo stacco della cedola. Le cedole che ci spettano sono 30, fino alla scadenza del 01/08/2039. Dobbiamo considerare la tassazione e quindi (il tasso cedolare è $r = 0.05$) la cedola semestrale è

$$\text{CED} = \frac{r}{2} F(1-\gamma) = \frac{0.05}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.1875.$$

Non c'è rateo in quanto la valutazione viene fatta in un giorno di cedola. Abbiamo un tasso di rendimento a scadenza $ytm = 4.5\%$. L'equazione è

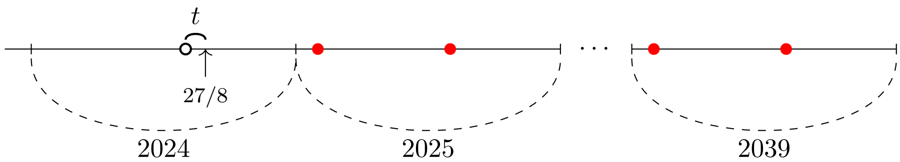
$$P_{\text{tq}} = \text{CED} \cdot a_{\overline{30}|ytm_{1/2}} + \text{CN}(1 + ytm_{1/2})^{-30},$$

dove CN è il valore di rimborso, tenendo conto dell'*eventuale* tassazione. La domanda è appunto se, con questo valore del tasso di rendimento a scadenza, il prezzo sarebbe stato tale da portare a tassare il rimborso. Si può procedere così: supponiamo che il rimborso non venga tassato (prezzo sopra la pari). Allora $\textsc{Cn} = 100$ e, calcolando il termine di destra nell'equazione sopra, si ottiene

$$\textsc{Ced} \cdot a_{\overline{30}|0.045_{1/2}} + 100(1 + 0.045_{1/2})^{-30} = 99.18.$$

L'ipotesi che rimborso non venga tassato è quindi errata. Ci sarebbe stata tassazione sul rimborso.

Passiamo alla seconda domanda. Cambia la data di valutazione, che ora è il 27/08/2024, data in cui conosciamo il corso secco $P_{\mathrm{s}} = 111.37$. Può essere utile aggiornare la rappresentazione grafica.



C'è ora un rateo da calcolare:

$$t = 27 \text{ giorni.} \quad \text{Quindi} \quad \text{rateo} = 2.1875 \cdot \frac{27}{180} = 0.328.$$

Il prezzo tel quel è allora

$$P_{\mathrm{tq}} = P_{\mathrm{s}} + \text{rateo} = 111.37 + 0.328 = 111.698.$$

Non abbiamo certamente plusvalenza e quindi il valore di rimborso netto è $\textsc{Cn} = 100$.

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/08/2039. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2%.

Indicando con i_{eff} il tasso di rendimento effettivo su base annua e con M il montante delle cedole, l'equazione da considerare è

$$P_{\mathrm{tq}}(1 + i_{\mathrm{eff}})^{-27/360+15} = M + \textsc{Cn}.$$

Troviamo M.

$$M = 2.1875 \cdot a_{\overline{30}|0.02_{1/2}}(1 + 0.02)^{15} = 76.035.$$

Pertanto possiamo ricavare

$$i_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{M + 100}{P_{\mathrm{tq}}}\right)^{1/(-27/360+15)} - 1 = \left(\frac{76.035 + 100}{111.698}\right)^{1/(-27/360+15)} - 1 = 0.03094724 \sim 3.09\%.$$

ESERCIZIO 4. L'acquisto di un bene venduto al prezzo di listino di 15 000€ può avvenire o con pagamento immediato con lo sconto dell'1% (modalità A), oppure con un finanziamento di 9 000€ da restituire in 12 rate mensili costanti (posticipate) di 770€ (modalità B). Le spese accessorie per il contratto di finanziamento ammontano a 50€. Si confrontino le due possibilità mediante il criterio del R.E.A. con un tasso esterno del 10% e si dica quale modalità è preferibile.

Si determini una prima approssimazione (con la formula studiata per questo tipo di situazioni) dei tassi T.A.N. e T.A.E.G. su base annua del finanziamento, indicando poi se l'approssimazione trovata è per difetto o per eccesso.

✎

Il REA della modalità A è

$$\text{REA}_A = -15\,000(1 - 0.01) = -14\,850.$$

La modalità B prevede, dato che il prezzo di listino è 15 000€, il pagamento immediato della parte non finanziata, cioè 6 000€, il pagamento immediato delle spese accessorie del contratto di finanziamento, cioè 50€, e le 12 rate mensili posticipate di 770€.

Il REA della modalità B è pertanto (indico col simbolo $0.1_{1/12}$ il tasso mensile equivalente al tasso annuo del 10%)

$$\text{REA}_B(0.1) = -6\,000 - 50 - 770 \cdot a_{\overline{12}|0.1_{1/12}} = -14\,828.38.$$

La modalità B è quindi preferibile alla modalità A.

Per il calcolo del T.A.N. sottostante il contratto di finanziamento, cioè il tasso di costo della possibilità di pagare attraverso il finanziamento rispetto al pagamento del prezzo di listino, senza considerare le spese accessorie, l'equazione è

$$15\,000 = 6\,000 + 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 9\,000 = 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

Questa equivale chiaramente all'equazione del valore attuale di una rendita ($V_0 = R\mathrm{a}_{\overline{n}|i}$), in cui l'incognita è il tasso. La formula che fornisce una prima approssimazione della soluzione è

$$i_0 = \frac{2(n - V_0/R)}{(n+1)V_0/R} = \frac{2(12 - 9\,000/770)}{13 \cdot 9\,000/770} = 0.0041026 \text{ (tasso mensile)},$$

al quale corrisponde un tasso annuo $\mathrm{TAN}_0 = 0.05035695$.

Per dire se si tratta di un'approssimazione per difetto o per eccesso torniamo a considerare l'equazione

$$9\,000 = 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $8\,998.24 < 9\,000$. L'approssimazione è pertanto per eccesso.

Per il calcolo del T.A.E.G. le cose sono simili, cambia solo il termine di destra dell'equazione, dato che dobbiamo considerare anche i costi accessori del contratto. L'equazione è ora

$$15\,000 = 6\,000 + 50 + 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}} \qquad \text{cioè} \qquad 8\,950 = 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}.$$

La formula di approssimazione fornisce ora

$$i_0 = \frac{2(12 - 8\,950/770)}{13 \cdot 8\,950/770} = 0.0049850 \text{ (tasso mensile)},$$

che, convertito nell'equivalente tasso annuo, fornisce $\mathrm{TAEG}_0 = 0,06148716$.

Per valutare il tipo di approssimazione consideriamo l'equazione

$$8\,950 = 770 \cdot \mathrm{a}_{\overline{12}|i_{1/12}}$$

e calcoliamo il termine di destra con il tasso approssimato appena ottenuto. Si ottiene $8\,947.44 < 8\,950$. Anche qui l'approssimazione è per eccesso.