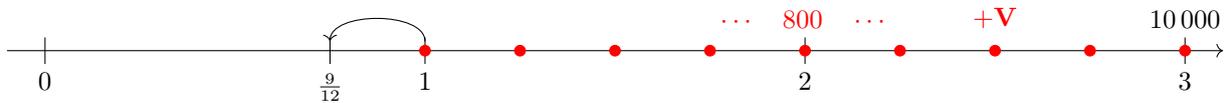


ESAME DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
ESAME DI MATEMATICA per le DECISIONI ECONOMICO-FINANZIARIE
PROVA INTERMEDIA
Vicenza, 14/11/2023

ESERCIZIO 1. Si vuole costituire un capitale di 10 000€ alla fine del terzo anno versando rate trimestrali di 800€, la prima tra un anno. Per raggiungere l’obiettivo occorre integrare con un ulteriore versamento 6 mesi prima della scadenza. Si determini tale versamento aggiuntivo, ipotizzando un tasso di interesse annuo del 10%.
 Volendo evitare il versamento aggiuntivo, di quanto deve aumentare la rata?



Può essere utile rappresentare lo schema dei versamenti. Indico con V il versamento aggiuntivo.



Serve il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo del $i = 10\%$. Si ha $i_{1/4} = (1 + i)^{1/4} - 1 = 0.02411369$.

L’equazione del valore che consente di determinare il versamento aggiuntivo V è

$$800 \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4})^9 + V(1 + i_{1/4})^2 = 10\,000.$$

Si ottiene quindi

$$V = \frac{10\,000 - 800 \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4})^9}{(1 + i_{1/4})^2} = 1\,968.90\text{€}.$$

Volendo evitare il versamento aggiuntivo, l’equazione diventa

$$R \cdot a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4})^9 = 10\,000,$$

da cui

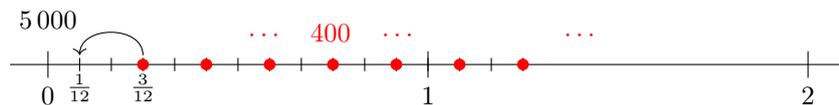
$$R = \frac{10\,000}{a_{\overline{9}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4})^9} = 1\,008.19\text{€}.$$

La rata quindi deve aumentare di $R - 800 = 208.19\text{€}$.

ESERCIZIO 2. Contraggo oggi un debito di 5 000€ e lo devo restituire in rate bimestrali di 400€, la prima fra 3 mesi, al tasso del 10%. Supponendo di versare al creditore solo rate intere, dopo quanti mesi da oggi avrò coperto interamente il debito? Quanto avrò versato in più al creditore?



Può essere utile come sempre una rappresentazione grafica.



Con rate intere intendo rate di 400€. Essendo specificato che vengono versate solo rate intere, significa che per coprire interamente il debito verrà versato più del dovuto, da cui la seconda domanda.

La disequazione che rispecchia questa modalità è

$$400 \cdot a_{\overline{n}|i_{1/6}}(1 + i)^{-1/12} \geq 5\,000,$$

da cui dobbiamo trovare il numero n di rate. La disequazione equivale a

$$a_{\overline{n}|i_{1/6}} \geq \frac{5\,000}{400}(1 + i)^{1/12}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1 - (1 + i_{1/6})^{-n}}{i_{1/6}} \geq \frac{5\,000}{400}(1 + i)^{1/12}.$$

Indicando per comodità con A la quantità a destra si ottiene

$$1 - (1 + i_{1/6})^{-n} \geq i_{1/6}A \quad ; \quad (1 + i_{1/6})^{-n} \leq 1 - i_{1/6}A \quad ; \quad -n \ln(1 + i_{1/6}) \leq \ln(1 - i_{1/6}A)$$

e infine

$$n \geq -\frac{\ln(1 - i_{1/6}A)}{\ln(1 + i_{1/6})} = 14.18.$$

Quindi per coprire interamente il debito servono 15 versamenti. Per rispondere esattamente alla domanda (dopo quanti mesi da oggi avrò fatto questo), tenendo conto che le rate sono bimestrali, i mesi da oggi sono $1 + 15 \cdot 2 = 31$. Passiamo all'ultima domanda: quanto avrò versato in più al creditore? Basta calcolare la differenza tra quanto versato e quanto dovevo restituire. Attenzione però, i due importi vanno valutati nel momento dell'ultima rata, cioè tra 31 mesi.

Posso fare la valutazione della differenza nell'istante iniziale e fare il montante di questa. Nell'istante iniziale si ha

$$\Delta_0 = 400 \cdot a_{\overline{15}|i_{1/6}}(1 + i)^{-1/12} - 5000 = 254.53\text{€},$$

il cui montante è

$$\Delta_{31/12} = \Delta_0 \cdot (1 + i)^{31/12} = 325.59\text{€}.$$

ESERCIZIO 3. Una società finanziaria, relativamente ad un bene con prezzo di listino $P = 8000\text{€}$, vuole proporre ad un cliente un contratto di leasing di durata 2 anni che prevede un anticipo del 10% del prezzo di listino, un riscatto pari al 5% del prezzo di listino e il versamento di 24 canoni mensili posticipati. La società può avere uno sconto del 3% sull'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto un tasso di interesse annuo del 7%. Si scriva l'equazione del valore per la società di leasing e si determini a quanto deve ammontare il canone da proporre al cliente.

Sapendo che il cliente può acquistare il bene al prezzo di listino, si scriva l'equazione del valore per il cliente. Sapendo infine che il cliente per l'acquisto diretto del bene può avere un prestito dalla sua banca al tasso di interesse annuo del 3%, si dica se egli ragionevolmente sceglierà il prestito bancario o il contratto di leasing.



Le quantità rilevanti nel contratto sono il prezzo di listino $P = 8000\text{€}$, l'anticipo $A = P \cdot 0.1 = 800\text{€}$ e il riscatto finale $F = P \cdot 0.05 = 400\text{€}$.

La società finanziaria spende $8000 \cdot (1 - 0.03) = 7760\text{€}$ per l'acquisto del bene e vuole ottenere dal contratto di leasing un tasso di interesse $i = 7\%$. Serve il tasso di interesse mensile $i_{1/12} = 1.07^{1/12} - 1 = 0.00565415$.

Indicato con R il canone mensile, l'equazione del valore per la società di leasing è

$$7760 = 800 + R \cdot a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1 + i)^{-2}.$$

Da questa si ricava

$$R = \frac{7760 - 800 - 400(1 + i)^{-2}}{a_{\overline{24}|i_{1/12}}} = 295.33\text{€}.$$

Ora passiamo alla valutazione del cliente, al quale viene proposto un contratto di leasing con le caratteristiche ottenute poco fa (cioè un anticipo di 800€ , un riscatto finale di 400€ e un canone di 24 rate trimestrali di 295.33€). Il cliente non ha sconto sul prezzo d'acquisto del bene. Egli è interessato a scoprire qual è il tasso implicito nell'equivalenza finanziaria tra lo spendere oggi 8000€ e distribuire il pagamento nel tempo alle condizioni del contratto.

La sua equazione del valore è quindi

$$8000 = 800 + 295.33a_{\overline{24}|i_{1/12}} + 400(1 + i)^{-2},$$

con un tasso i questa volta incognito.

La soluzione esatta di questa equazione fornirebbe al cliente un valore preciso da confrontare con il tasso del 3% proposto dalla banca per un prestito di 8000€ . Ma la risoluzione esatta (in realtà approssimata) di questa equazione richiederebbe l'uso di approssimazioni successive, eventualmente con il metodo di Newton, e non è richiesta.

Per poter dire quale sarà la scelta ragionevole del cliente tra stipulare il contratto di leasing e chiedere un prestito alla banca al tasso $i^{(B)} = 3\%$ possiamo semplicemente calcolare il valore attuale degli importi relativi al contratto al tasso della banca. Dopo aver calcolato il tasso equivalente mensile $i_{1/12}^{(B)} = 0.00246627$, si trova

$$8000 + 295.33a_{\overline{24}|i_{1/12}^{(B)}} + 400(1 + i^{(B)})^{-2} = 8051.06\text{€}.$$

Dato che $8051.06 > 8000$, il tasso della banca sconta meno gli importi rispetto al tasso effettivo incognito e quindi il tasso della banca è minore rispetto al tasso del contratto.

Il cliente ragionevolmente sceglierà il prestito bancario.

ESERCIZIO 4. Per rimborsare in 4 anni un debito di 3000€ si usa un piano di ammortamento con quote capitale posticipate $C_1 = C_2 = 1000\text{€}$ e $C_3 = C_4 = 500\text{€}$ e anticipazione degli interessi. Si costruisca il piano di ammortamento, assumendo un tasso di interesse annuo del 10%. Il piano di ammortamento deve riportare, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Infine, mantenendo quote capitale posticipate e anticipazione degli interessi, nell'ipotesi di pagare quote capitale che ogni anno aumentano del 50%, si determini la prima quota capitale (C_1) e la terza rata (R_2).



Le quote capitale sono date. C'è anticipazione delle quote interessi, che quindi vanno calcolate sulla base del debito residuo corrente attraverso il tasso di sconto. Si ha

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.1}{1+0.1} = 0.09.$$

Ecco i primi passaggi.

$$I_0 = d \cdot D_0 = d \cdot 3000 = 272.73\text{€}.$$

La prima rata è quindi $R_0 = I_0 = 272.73\text{€}$.

Possiamo ora ricavare il nuovo debito residuo dopo il pagamento della prima quota capitale.

$$D_1 = D_0 - C_1 = 3000 - 1000 = 2000\text{€}.$$

Ora la nuova quota interessi.

$$I_1 = d \cdot D_1 = d \cdot 2000 = 181.82\text{€}. \quad \text{La seconda rata è quindi } R_1 = C_1 + I_1 = 1181.82\text{€}.$$

Il nuovo debito residuo.

$$D_2 = D_1 - C_2 = 2000 - 1000 = 1000\text{€}.$$

La successiva quota interessi I_2, \dots e così via. Il prospetto completo è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	272.73	0	272.73	3000
1	1181.82	1000	181.82	2000
2	1090.91	1000	90.91	1000
3	545.45	500	45.45	500
4	500	500	0	0

Passiamo ora alla seconda modalità, in cui rimane l'anticipazione degli interessi e riguardo le quote capitale, sempre posticipate, sappiamo che ogni anno aumentano del 50%. Ricordando che la somma delle quote capitale deve uguagliare il debito iniziale, ponendo $C_1 = C$, possiamo scrivere l'equazione

$$C + C \cdot 1.5 + C \cdot 1.5^2 + C \cdot 1.5^3 = 3000,$$

da cui si ricava

$$C = \frac{3000}{1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3} = 369.23\text{€}.$$

Ora possiamo calcolare tutte le quote capitale, tenendo conto della crescita ogni anno del 50%, e l'esercizio è analogo a quello relativo alla prima modalità.

Non è richiesta la compilazione completa del piano di ammortamento, ma soltanto la determinazione della prima quota capitale ($C_1 = C = 369.23\text{€}$, già trovata) e la terza rata (R_2). Per la rata si ha

$$D_1 = 3000 - C_1 = 2630.77\text{€} \quad , \quad C_2 = C_1 \cdot 1.5 = 553.85\text{€} \quad , \quad D_2 = D_1 - C_2 = 2076.92\text{€} \quad , \quad I_2 = d \cdot D_2 = 188.81\text{€}$$

e quindi

$$R_2 = C_2 + I_2 = 742.66\text{€}.$$

Concludo con un'osservazione, relativa al fatto che, essendo le quote capitale in progressione geometrica (di ragione 1.5) potrebbe venire l'idea di usare la formula che dà il valore attuale di una rendita in progressione geometrica appunto, cioè

$$V_0 = \begin{cases} Rv \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv} & \text{se } qv \neq 1 \\ nRv & \text{se } qv = 1 \end{cases}$$

adattandola ai dati del piano di ammortamento, cioè con $V_0 = 3000$, $R = C_1$, $q = 1.5$ e $v = \frac{1}{1+i}$. In particolare sarebbe errato usare un fattore di sconto, dato che è la somma delle quote capitale a uguagliare il debito, non il valore attuale cumulato di queste.

Si può comunque utilizzare la formula qui sopra, ma ponendo $v = 1$, che comporta l'assenza di un effetto attualizzazione. Così facendo si può scrivere l'equazione

$$C_1 \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q} = 3000$$

da cui si ricava

$$C_1 = 3000 \cdot \frac{1 - 1.5}{1 - 1.5^4} = 369.23\text{€}, \text{ come trovato prima.}$$

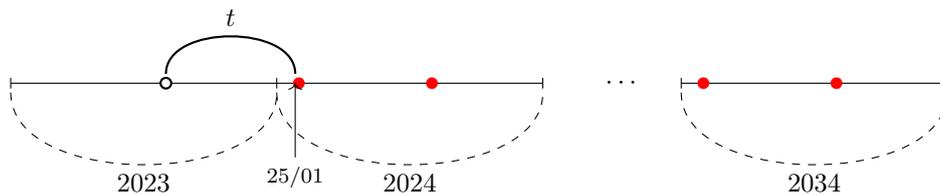
PROVA CONCLUSIVA DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 02/02/2024

ESERCIZIO 1. Il B.T.P. denominato Btp-1ag34 5%, con scadenza il 01/08/2034, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 5\%$. Il 25/01/2024 era quotato (corso secco) a 109.97. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 3.27%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo in data 25/01/2024, di reinvestire le cedole fino alla scadenza al tasso dell'1%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/02 e al 01/08. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.05}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.1875.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/08/2034 il titolo paga $n = 22$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/08/2023) è $t = 30 \cdot 5 + 25 = 175$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.1875 \cdot \frac{175}{180} = 2.1267.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{tq} = P_s + \text{rateo} = 109.97 + 2.1267 = 112.097.$$

L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{tq} = 2.1875 \cdot a_{\overline{22}|ytm_{1/2}} (1 + ytm_{1/2})^{175/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-22+175/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 3.27% basta calcolare il termine di destra al tasso del 3.27% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.1875 \cdot a_{\overline{22}|0.0327_{1/2}} (1 + 0.0327_{1/2})^{175/180} + 100(1 + 0.0327_{1/2})^{-22+175/180} = 112.137 \simeq P_{tq}.$$

Passiamo ora al calcolo del tasso effettivo in presenza di reinvestimento delle cedole. Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal rimborso finale. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 01/08/2034. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso dell'1%.

Indicando con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_{tq}(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{-175/180+22}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c'è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = CED \cdot a_{\overline{22}|0.01_{1/2}} (1 + 0.01_{1/2})^{22} = 50.731.$$

L'equazione è pertanto

$$P_{\text{tq}}(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{-175/180+22} = M + 100.$$

Si trova

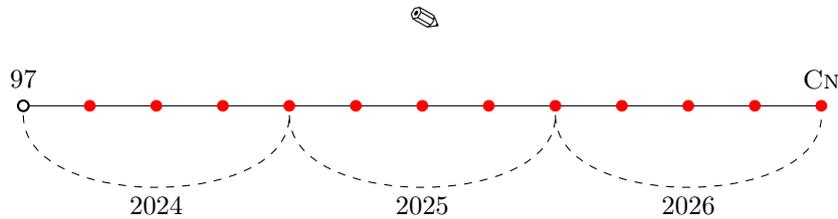
$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M + 100}{P_{\text{tq}}} \right)^{1/(-175/180+22)} - 1 = 0.0141827 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.0285665.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2024 con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 97$.

Si consideri la tassazione. Si verifichi che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era vicino al 4.5%. Utilizzando la duration al tasso del 4.5%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 5%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/08/2024 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3% (si usi l'anno commerciale).



La cedola netta trimestrale è

$$\text{CED} = \frac{r}{4}F(1 - \gamma) = \frac{0.04}{4} \cdot 100(1 - 0.125) = 0.875.$$

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$\text{CN} = 100 - (100 - 97)\gamma = 99.625.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = \text{CED} \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}} + \text{CN}(1 + ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4.5% annuo si ottiene

$$\text{CED} \cdot a_{\overline{12}|0.045_{1/4}} + \text{CN}(1 + 0.045)^{-3} = 97.08 \simeq 97.$$

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4}) - 12(1 + i)^{-3}}{i_{1/4}} = 71.2025141.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(0.045) = \frac{\text{CED} \cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} + 12 \cdot \text{CN}(1 + i)^{-3}}{\text{CED} \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + \text{CN}(1 + i)^{-3}} = 11.4326031 \quad (\text{trimestri}).$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (97.08). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.045) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.85815076.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.045)}{1 + 0.045} = 2.7350725.$$

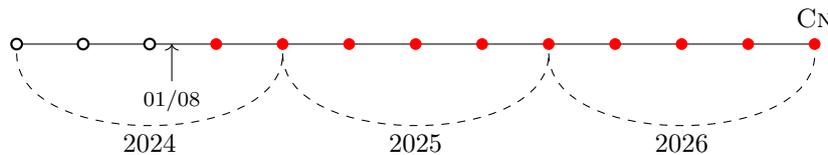
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 5%, e quindi $\Delta i = +0.045 \cdot 0.05 = +0.00225$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.7350725 \cdot (0.00225) \cdot 97.08 = -0.5974.$$

Veniamo ora all’ultima domanda, il prezzo tel quel dell’obbligazione il 01/08/2024 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3%.



Le cedole da considerare ora sono 10. C’è un rateo relativo a $t = 30$ giorni, cioè $\frac{30}{90}$ ($1/3$) di un trimestre. Essendoci la tassazione, non sappiamo se questa è anche sul valore di rimborso, dato che questo dipende dal corso secco, che non conosciamo. Allora si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso (CN = 100) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari.

Si ha

$$P_{\text{tq}} = \text{CED} \cdot a_{\overline{10}|0.03_{1/4}} (1 + 0.03_{1/4})^{1/3} + 100 (1 + 0.03_{1/4})^{-10+1/3} = 101.5299.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest’ultimo. Il rateo è $\text{CED} \cdot \frac{30}{90} = 0.29167$ e quindi il corso secco è $P_s = 101.5299 - 0.29167 = 101.2382 > 100$: l’ipotesi della non tassazione del rimborso è corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 101.5299.

ESERCIZIO 3. Si considerino i due progetti di investimento



e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) *su base annua*:

$$i(0, 2) = 0.03 \quad , \quad i(0, 3) = 0.04 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.02.$$

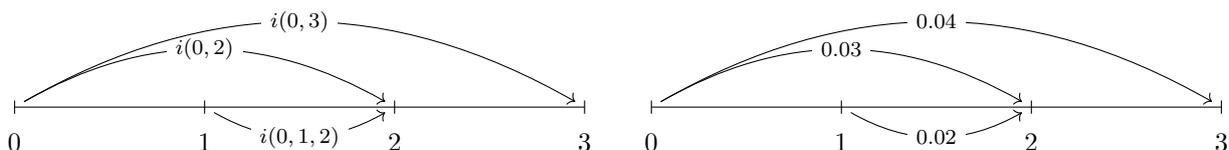
Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.

Perché soltanto per il progetto A possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento? Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore o minore del 5%.

Si dica infine, per un investimento (a termine) di 10 tra 2 anni, qual è l’incasso tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi indicata.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



Per il calcolo del REA dei due progetti occorre attualizzare all’istante iniziale ($t = 0$) gli importi alle varie scadenze future. Si può fare in più modi, ad esempio ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili, cioè soltanto $i(0, 1)$ nel nostro caso. Però si può arrivare al risultato

anche direttamente, senza calcolare nuovi tassi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$REA_A = -10 + 5 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 6 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 1 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 1.352$$

e

$$REA_B = -10 + 12 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} - 3 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 3 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 1.377.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto B .

Soltanto per il progetto A possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento perché, se scriviamo i flussi cumulati, otteniamo

$$\text{Progetto } A: \quad -10, -5, +1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto } B: \quad -10, +2, -1, +2$$

e quindi A cambia segno una sola volta, mentre B cambia segno due volte. Solo la prima delle due situazioni consente di affermare l'esistenza e unicità del TIR.

Il TIR di A è maggiore o minore del 5%? Se calcoliamo il REA di A al tasso del 5% (struttura piatta) otteniamo

$$-10 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 6 \cdot 1.05^{-2} + 1 \cdot 1.05^{-3} = 1.06 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 5%.

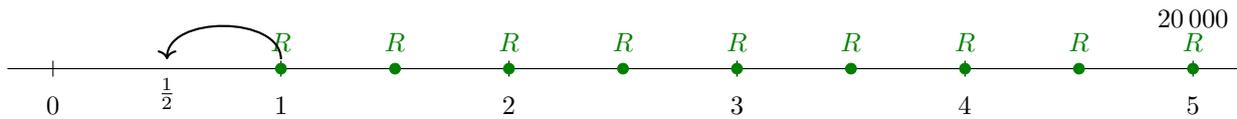
Veniamo all'ultima domanda: per un investimento a termine di 10 tra 2 anni, qual è l'incasso tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi indicata? Indicando con X tale incasso, deve esserci equivalenza tra i valori di 10 in $t = 2$ e X in $t = 3$ con la struttura data. Anche qui ci si può procurare il tasso a termine $i(0, 2, 3)$, oppure si possono usare solo i tassi forniti.

In questo secondo modo si ha

$$X = 10 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2}(1 + i(0, 3))^3 = 10.603.$$

ESAME di MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 02/02/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 20 000€ fra 5 anni versando rate semestrali, la prima tra un anno. Si determini la rata semestrale necessaria. Arrivati alla fine del 3° anno, c’è l’impossibilità di versare la corrispondente rata. Si determini il nuovo valore delle rimanenti rate per raggiungere lo stesso obiettivo. Il tasso di interesse annuo da applicare è del 5%.



Faccio notare che l’ultima rata è da considerare in $t = 5$, dato che non viene indicata una scadenza precedente: le rate sono quindi 9. L’equazione che esprime la costituzione del capitale di 20 000€ fra 5 anni mediante le 9 rate semestrali è

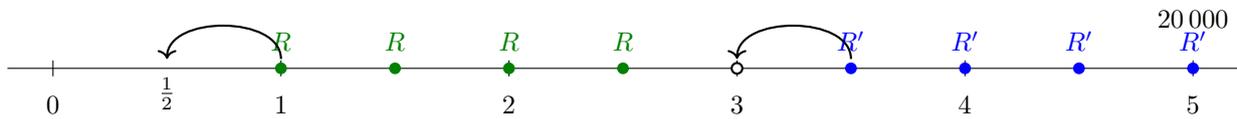
$$R \cdot a_{\overline{9}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9 = 20\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{20\,000}{a_{\overline{9}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9} = 2\,011.63\text{€}.$$

Passiamo alla seconda domanda. Per non interpretare male la nuova situazione faccio notare che il senso è questo: siamo arrivati alla fine del 3° anno e abbiamo già versato 4 rate da 2 011.63€. Ci accorgiamo che non siamo in grado di versare la rata corrente. Dobbiamo quindi riprogrammare i futuri versamenti ricalcolando il valore delle 4 rate mancanti.

La rappresentazione è naturalmente questa:



L’equazione per la nuova rata, che indico con R' , è

$$2\,011.63 \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9 + R' \cdot a_{\overline{2}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2 = 20\,000,$$

da cui ricavo

$$R' = \frac{20\,000 - 2\,011.63 \cdot a_{\overline{4}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05_{1/2})^9}{a_{\overline{2}|0.05_{1/2}}(1 + 0.05)^2} = 2\,545.96\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Per rimborsare in 4 anni un debito D_0 di 1 000€, si usa un piano di ammortamento tedesco (rate posticipate ma con anticipazione degli interessi) con un tasso di interesse annuo del 10%. Si costruisca il piano di ammortamento, riportando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo. Si effettui poi la verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale. Si trovi poi la rata per il rimborso dello stesso debito, alle stesse condizioni, con un piano di ammortamento francese, con prima quota capitale e prima quota interessi.



L’ammortamento tedesco prevede quote capitale costanti e quote interessi anticipate, da calcolare quindi moltiplicando il debito residuo corrente per il tasso di sconto. Abbiamo quindi

$$C = 1\,000/4 = 250 \quad \text{e} \quad I_0 = d \cdot D_0 = \frac{0.1}{1 + 0.1} \cdot 1\,000 = 90.91\text{€}.$$

Si trovano facilmente, a seguire, tutte le altre quantità. Il prospetto complessivo è pertanto questo:

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	90.91	0	90.91	1000
1	318.18	250	68.18	750
2	295.45	250	45.45	500
3	272.73	250	22.73	250
4	250	250	0	0

La verifica di equivalenza finanziaria tra quanto versato e il debito iniziale consiste nel verificare che

$$90.91 + 318.18(1 + 1)^{-1} + 295.45(1 + 1)^{-2} + 272.73(1 + 1)^{-3} + 250(1 + 1)^{-4} = 999.9975 \simeq 1000.$$

Passiamo alla seconda modalità, con gli stessi dati ma con un ammortamento francese. Nell'ammortamento francese abbiamo la rata costante (R) e quindi l'equazione che ci permette di trovarla (equivalenza finanziaria) è

$$R \cdot a_{\overline{4}|0.01} = 1000 \quad \text{da cui} \quad R = \frac{1000}{a_{\overline{4}|0.01}} = 315.47\text{€}.$$

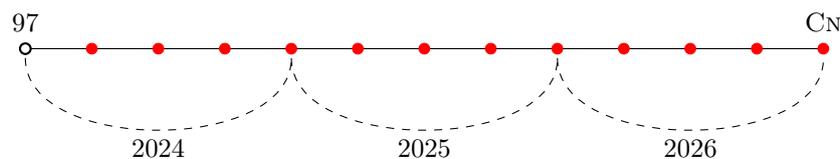
La prima quota interessi (posticipata) è $I_1 = i \cdot D_0 = 100$. La prima quota capitale è quindi, per differenza, $C_1 = R - I_1 = 215.47\text{€}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri un'obbligazione emessa il 01/01/2024 con le seguenti caratteristiche:

- valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$;
- scadenza dopo 3 anni;
- cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$;
- prezzo di emissione $P_E = 97$.

Si consideri la tassazione. Si verifichi che il tasso di rendimento a scadenza all'emissione era vicino al 4.5%. Utilizzando la duration al tasso del 4.5%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 5%.

Si determini infine il prezzo tel quel dell'obbligazione il 01/08/2024 ipotizzando un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3% (si usi l'anno commerciale).



La cedola netta trimestrale è

$$CED = \frac{r}{4} F(1 - \gamma) = \frac{0.04}{4} \cdot 100(1 - 0.125) = 0.875.$$

Vi è tassazione sul valore di rimborso, in quanto il prezzo di emissione è sotto la pari. Quindi si ha

$$CN = 100 - (100 - 97)\gamma = 99.625.$$

L'equazione relativa al tasso di rendimento a scadenza all'emissione è

$$97 = CED \cdot a_{\overline{12}|ytm_{1/4}} + CN(1 + ytm)^{-3}.$$

Se calcoliamo il termine di destra ad un tasso del 4.5% annuo si ottiene

$$CED \cdot a_{\overline{12}|0.045_{1/4}} + CN(1 + 0.045)^{-3} = 97.08 \simeq 97.$$

Passiamo alla domanda successiva, l’approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4}) - 12(1 + i)^{-3}}{i_{1/4}} = 71.2025141.$$

Ora la formula della duration (attenzione anche qui, ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(0.045) = \frac{CED \cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} + 12 \cdot CN(1 + i)^{-3}}{CED \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + CN(1 + i)^{-3}} = 11.4326031 \quad (\text{trimestri}).$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (97.08). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.045) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.85815076.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.045)}{1 + 0.045} = 2.7350725.$$

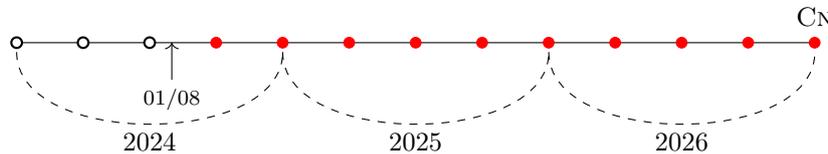
Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 5%, e quindi $\Delta i = +0.045 \cdot 0.05 = +0.00225$. Pertanto

$$\Delta P \simeq -2.7350725 \cdot (0.00225) \cdot 97.08 = -0.5974.$$

Veniamo ora all’ultima domanda, il prezzo tel quel dell’obbligazione il 01/08/2024 con un tasso di rendimento a scadenza in quella data del 3%.



Le cedole da considerare ora sono 10. C’è un rateo relativo a $t = 30$ giorni, cioè $\frac{30}{90}$ (1/3) di un trimestre. Essendoci la tassazione, non sappiamo se questa è anche sul valore di rimborso, dato che questo dipende dal corso secco, che non conosciamo. Allora si procede come visto negli esempi a lezione: si ipotizza che non ci sia tassazione sul rimborso (CN = 100) e si verifica se coerentemente il corso secco è sopra la pari.

Si ha

$$P_{\text{tq}} = CED \cdot a_{\overline{10}|0.03_{1/4}} (1 + 0.03_{1/4})^{1/3} + 100 (1 + 0.03_{1/4})^{-10+1/3} = 101.5299.$$

Attenzione ora: non è questo il valore di riferimento, ma dobbiamo trovare il corso secco, dato che la tassazione viene fissata in base a quest’ultimo. Il rateo è $CED \cdot \frac{30}{90} = 0.29167$ e quindi il corso secco è $P_s = 101.5299 - 0.29167 = 101.2382 > 100$: l’ipotesi della non tassazione del rimborso è corretta. Il prezzo tel quel è pertanto 101.5299.

ESERCIZIO 4. Si considerino i due progetti di investimento

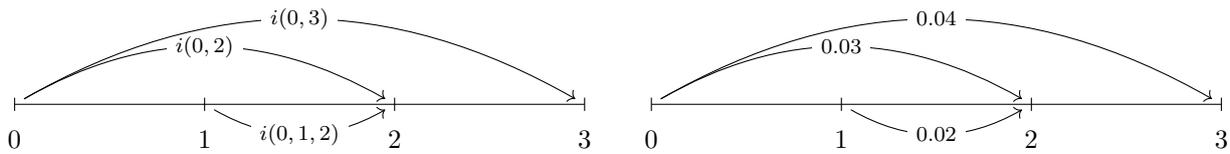
A.	-10	5	6	1		-10	12	-3	3
	0	1	2	3		0	1	2	3

e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) *su base annua*:

$$i(0, 2) = 0.03 \quad , \quad i(0, 3) = 0.04 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.02.$$

Si stabilisca quale dei due progetti risulta conveniente in base al criterio del REA/VAN.

Perché soltanto per il progetto A possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento? Si dica poi se il valore del TIR per il progetto A è maggiore o minore del 5%.



Si dica infine, per un investimento (a termine) di 10 tra 2 anni, qual è l'incasso tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi indicata.



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.

Per il calcolo del REA dei due progetti occorre attualizzare all'istante iniziale ($t = 0$) gli importi alle varie scadenze future. Si può fare in più modi, ad esempio ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili, cioè soltanto $i(0, 1)$ nel nostro caso. Però si può arrivare al risultato anche direttamente, senza calcolare nuovi tassi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$REA_A = -10 + 5 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 6 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 1 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 1.352$$

e

$$REA_B = -10 + 12 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} - 3 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 3 \cdot (1 + i(0, 3))^{-3} = 1.377.$$

Il REA è positivo per entrambi (quindi sono entrambi convenienti rispetto all'investimento di denaro) e risulta preferibile il progetto B .

Soltanto per il progetto A possiamo affermare l'esistenza e unicità del tasso interno di rendimento perché, se scriviamo i flussi cumulati, otteniamo

$$\text{Progetto } A: -10, -5, +1, +2 \quad \text{e} \quad \text{Progetto } B: -10, +2, -1, +2$$

e quindi A cambia segno una sola volta, mentre B cambia segno due volte. Solo la prima delle due situazioni consente di affermare l'esistenza e unicità del TIR.

Il TIR di A è maggiore o minore del 5%? Se calcoliamo il REA di A al tasso del 5% (struttura piatta) otteniamo

$$-10 + 5 \cdot 1.05^{-1} + 6 \cdot 1.05^{-2} + 1 \cdot 1.05^{-3} = 1.06 > 0.$$

Quindi il TIR per il progetto A è maggiore del 5%.

Veniamo all'ultima domanda: per un investimento a termine di 10 tra 2 anni, qual è l'incasso tra 3 anni coerente con la struttura dei tassi indicata? Indicando con X tale incasso, deve esserci equivalenza tra i valori di 10 in $t = 2$ e X in $t = 3$ con la struttura data. Anche qui ci si può procurare il tasso a termine $i(0, 2, 3)$, oppure si possono usare solo i tassi forniti.

In questo secondo modo si ha

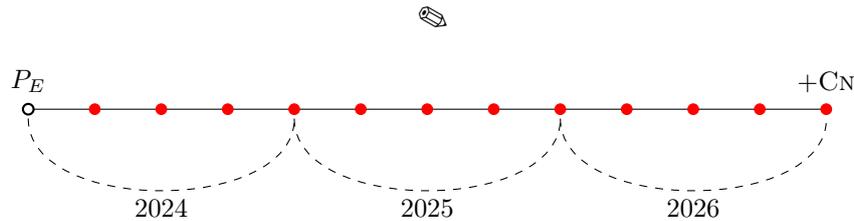
$$X = 10 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2}(1 + i(0, 3))^3 = 10.603.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 19/02/2024

ESERCIZIO 1. Un'obbligazione emessa il 01/01/2024 con valore nominale e valore di rimborso $F = C = 100$, scadenza dopo 3 anni, cedole trimestrali con tasso cedolare $r = 4\%$, aveva alla data di emissione un tasso di rendimento a scadenza $ym = 3.5\%$.

È corretto affermare che non ci sarà tassazione sul valore di rimborso?

Utilizzando la duration al tasso del 3.5%, si dia poi un'approssimazione della variazione del prezzo a seguito di un aumento relativo del tasso del 5%.



La cedola netta trimestrale è

$$CED = \frac{r}{4} F(1 - \gamma) = \frac{0.04}{4} \cdot 100(1 - 0.125) = 0.875.$$

Non è fornito il prezzo di emissione, ma lo possiamo ricavare in base al tasso di rendimento a scadenza, che è fornito. In questi casi non possiamo essere certi sulla tassazione del valore di rimborso, da cui la domanda. Si procede come sempre ipotizzando che non ci sia tassazione, e che quindi $CN = 100$, e verificando questa ipotesi sul corrispondente prezzo di emissione. L'equazione è

$$P_E = CED \cdot a_{\overline{12}|ym_{1/4}} + 100(1 + ym)^{-3}.$$

Sostituendo il valore dato del tasso ($ym = 0.035$) si ottiene $P_E = 100.128 > 100$. Non essendoci plusvalenza l'ipotesi è confermata e quindi è corretto affermare che non ci sarà tassazione sul valore di rimborso.

Passiamo alla domanda successiva, l'approssimazione della variazione del prezzo attraverso la duration. Per il calcolo della duration usiamo la formula con la increasing annuity (le cedole sono 12 e dobbiamo usare il tasso trimestrale).

$$Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} = \frac{a_{\overline{12}|i_{1/4}}(1 + i_{1/4}) - 12(1 + i)^{-3}}{i_{1/4}} = 72.62847769.$$

Ora la formula della duration (ovviamente la duration sarà espressa in trimestri):

$$D_{1/4}(0.035) = \frac{CED \cdot Ia_{\overline{12}|i_{1/4}} + 12 \cdot CN(1 + i)^{-3}}{CED \cdot a_{\overline{12}|i_{1/4}} + CN(1 + i)^{-3}} = 11.444 \quad (\text{trimestri}).$$

Si consideri che il denominatore è il prezzo calcolato poco fa (100.128). Dobbiamo convertire la duration in anni.

$$D(0.045) = \frac{D_{1/4}}{4} = 2.861.$$

La duration modificata è

$$D_{\text{mod}} = \frac{D(0.045)}{1 + 0.045} = 2.764.$$

Ora il calcolo della variazione del prezzo.

$$\Delta P \simeq -D_{\text{mod}} \cdot \Delta i \cdot P_0.$$

Attenzione che abbiamo un aumento *relativo* del tasso del 5%, e quindi $\Delta i = +0.035 \cdot 0.05 = +0.00175$. Pertanto

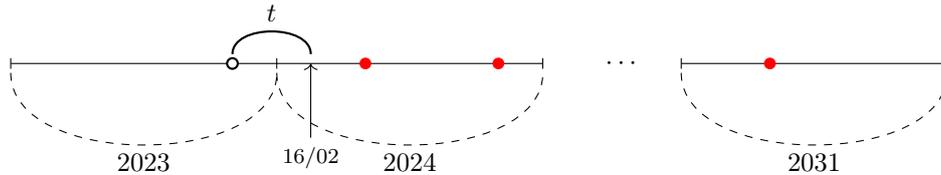
$$\Delta P \simeq -2.764 \cdot 0.00175 \cdot 100.128 = -0.484.$$

ESERCIZIO 2. Il B.T.P. ventennale denominato Btp-1mg31 6%, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 16/02/2024 era quotato (corso secco) a 115.36. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 2.89%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo all'emissione al prezzo 103, di averlo venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato in precedenza e di aver reinvestito le cedole incassate fino alla vendita al tasso del 2%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.06}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.625.$$

Non c'è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 1 + 14 = 15$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell'ultima cedola (01/11/2023) è $t = 30 \cdot 3 + 16 = 106$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625 \cdot \frac{106}{180} = 1.546.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 115.36 + 1.546 = 116.906.$$

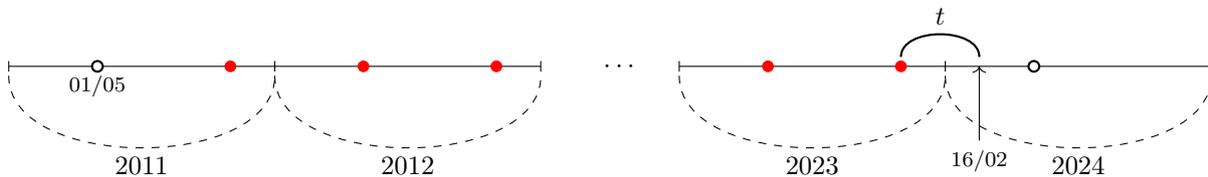
L'equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{106/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-15+106/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 2.89% basta calcolare il termine di destra al tasso del 2.89% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.625 \cdot a_{\overline{15}|0.0289_{1/2}}(1 + 0.0289_{1/2})^{106/180} + 100(1 + 0.0289_{1/2})^{-15+106/180} = 116.938 \simeq P_{\text{tq}}.$$

La seconda domanda non riguarda più il futuro, ma il passato. Essendo un titolo ventennale è stato emesso il 01/05/2011 al prezzo $P_E = 103$. Viene venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato prima, cioè $P_{\text{tq}} = 116.906$. È opportuna una nuova figura.



Il numero di cedole incassate prima della vendita è $n = 1 + 24 = 25$ (oppure più semplicemente $40 - 15$).

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall'uguaglianza tra il montante dell'importo investito per l'acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal valore di vendita. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 16/02/2024. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2%.

Indicando con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell'investimento è dato da

$$P_E(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{25+106/180}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c’è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{CED} \cdot a_{\overline{25}|0.02_{1/2}} (1 + 0.02_{1/2})^{25+106/180} = 62.105.$$

Attenzione che il valore di vendita viene tassato, in quanto c’è una plusvalenza tra acquisto e vendita. Si ha

$$\text{CN} = P_{\text{tq}} - (P_{\text{tq}} - P_E) \cdot \gamma = 115.168.$$

L’equazione è pertanto

$$P_E(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{25+106/180} = M + \text{CN},$$

da cui

$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M + \text{CN}}{P_E} \right)^{1/(25+106/180)} - 1 = 0.02144533 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.04335056.$$

ESERCIZIO 3. Si consideri il progetto di investimento

-10	7	4	2
0	1	2	3

e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) *su base annua*:

$$i(0, 2) = 0.04 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.03 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.05.$$

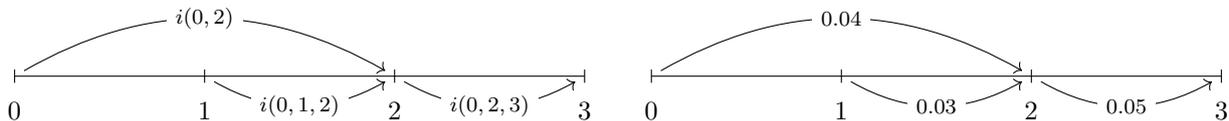
Si calcoli il REA del progetto nella struttura dei tassi fornita.

Si determinino il tasso a pronti $i(0, 1)$ e il tasso a termine $i(0, 1, 3)$ *su base annua* e si trovi il valore X_1 tra un anno equivalente a $X_3 = 10$ tra 3 anni.

Perché per il progetto possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento? Il valore del TIR è maggiore o minore del 20%?



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



Per il calcolo del REA del progetto occorre attualizzare all’istante iniziale ($t = 0$) la somma degli importi delle varie scadenze future. Si può fare ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili, cioè nel nostro caso $i(0, 1)$ e $i(0, 3)$. Però si può arrivare al risultato anche direttamente con i tassi forniti, senza calcolarne di nuovi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$\text{REA} = -10 + 7 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 4 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 2 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1} \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} = 2.125.$$

Il tasso a pronti $i(0, 1)$ si può ottenere dall’equazione

$$1 + i(0, 1) = (1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 1, 2))^{-1} \quad \text{e quindi} \quad i(0, 1) = (1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 1, 2))^{-1} - 1 = 0.05009709.$$

Il tasso a termine $i(0, 1, 3)$:

$$1 + i(0, 1, 3) = (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2, 3)) \quad \text{e quindi} \quad i(0, 1, 3) = (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2, 3)) - 1 = 0.03995192.$$

Ora il valore X_1 tra un anno equivalente a $X_3 = 10$ tra 3 anni.

$$X_1 = 10(1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 1, 2))^{-1} = 9.246.$$

Per il progetto possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento in quanto il flusso cumulato è dato da

$$-10 \quad , \quad -3 \quad , \quad +1 \quad , \quad +3$$

e questo cambia segno una sola volta.

Per rispondere all'ultima domanda, se il TIR del progetto è maggiore o minore del 20%, basta calcolare il REA al tasso del 20% (struttura piatta). Otteniamo

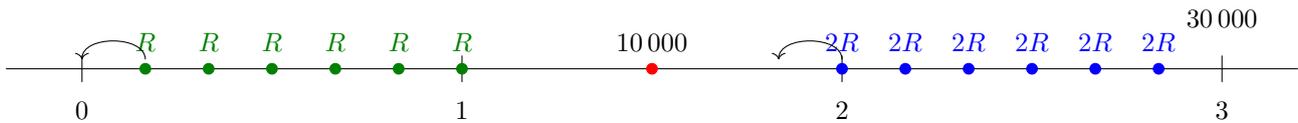
$$-10 + 7 \cdot 1.2^{-1} + 4 \cdot 1.2^{-2} + 2 \cdot 1.2^{-3} = -0.231 < 0,$$

e quindi il TIR per il progetto A è minore del 20%.

ESAME di MODELLI MATEMATICI per le DECISIONI ECONOMICO-AZIENDALI
Vicenza, 19/02/2024

ESERCIZIO 1. Si vuole disporre di 30 000€ fra 3 anni versando 6 rate posticipate immediate R bimestrali, un versamento di 10 000€ tra un anno e mezzo e altre 6 rate bimestrali $2R$, la prima tra 2 anni. Si determini il valore delle rate bimestrali. Il tasso di interesse annuo è del 10%.

Si determinino poi i tre valori attualizzati (in $t = 0$) delle 6 rate iniziali, del versamento intermedio e delle 6 rate finali.



L’equazione che esprime la costituzione del capitale di 30 000€ fra 3 anni con la modalità indicata è

$$R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1 + 0.1)^3 + 10\,000 \cdot (1 + 0.1)^{1.5} + 2R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1 + 0.1_{1/6})^7 = 30\,000,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{30\,000 - 10\,000 \cdot (1 + 0.1)^{1.5}}{a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1 + 0.1)^3 + 2a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}(1 + 0.1_{1/6})^7} = 911.86\text{€}.$$

Il valore delle rate bimestrali è quindi $R = 911.86\text{€}$ per le prime sei e $2R = 1823.73\text{€}$ per le ultime sei.

I tre valori attualizzati in $t = 0$ delle 6 rate iniziali (V_0^R), del versamento intermedio (V_0^{int}) e delle 6 rate finali (V_0^{2R}) sono

$$V_0^R = R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}} = 5177.21\text{€} \quad , \quad V_0^{\text{int}} = 10\,000 \cdot (1 + 0.1)^{-1.5} = 8667.84\text{€} \quad , \quad V_0^{2R} = 2R \cdot a_{\overline{6}|0.1_{1/6}}^{-11} = 8694.39\text{€}.$$

ESERCIZIO 2. Restituisco un prestito di 1 000€ in 3 anni mediante rate posticipate R_1, R_2, R_3 in progressione geometrica di ragione $q = 0.9$, al tasso del 10% annuo. Le quote interessi si versano con le stesse modalità di un piano di ammortamento italiano, in funzione del debito residuo. Si costruisca il piano di ammortamento, riportando, per ogni scadenza, la rata, la quota capitale, la quota interessi e il debito residuo.

Nel caso la quota interessi sia anticipata e le rate R_1, R_2, R_3 siano ancora in progressione geometrica come in precedenza, si trovi la nuova rata R_1 , le quote interessi I_0, I_1 e la quota capitale C_1 .



Ponendo $i = 10\%$, possiamo determinare subito la prima rata (R_1), in due modi. Con l’equivalenza finanziaria

$$R_1 \cdot (1 + i)^{-1} + R_2 \cdot (1 + i)^{-2} + R_3 \cdot (1 + i)^{-3} = 1\,000$$

che, tenendo conto che le rate sono in progressione geometrica di ragione q , diventa

$$R_1 \cdot (1 + i)^{-1} + qR_1 \cdot (1 + i)^{-2} + q^2R_1 \cdot (1 + i)^{-3} = 1\,000,$$

da cui

$$R_1 = \frac{1\,000}{(1 + i)^{-1} + q(1 + i)^{-2} + q^2(1 + i)^{-3}} = 442.19\text{€}.$$

Oppure con la formula del valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica.¹

$$R_1 v \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv} = 1\,000, \text{ con } q = 0.9 \text{ e } v = \frac{1}{1 + i} = 0.9\overline{0},$$

¹Il valore attuale di una rendita con rate in progressione geometrica di ragione q e fattore di sconto v è $V_0 = Rv \frac{1 - (qv)^n}{1 - qv}$ se $qv \neq 1$.

da cui

$$R_1 = \frac{1000}{v} \cdot \frac{1 - qv}{1 - (qv)^n} = 442.19\text{€}.$$

Una volta note le rate, considerando che le quote interessi si ricavano con le stesse modalità di un piano di ammortamento italiano, e cioè dal debito residuo precedente, possiamo facilmente ricavare prima le quote interessi e poi le quote capitale per differenza.² Il piano complessivo che risulta è il seguente.

t	$R_t = C_t + I_t$	C_t	I_t	D_t
0	0	0	0	1000
1	442.19	342.19	100	657.81
2	397.97	332.19	65.78	325.61
3	358.18	325.61	32.56	0

Passiamo alla seconda modalità, con quote interessi anticipate e rate R_1, R_2, R_3 ancora in progressione geometrica. Dobbiamo anzitutto trovare la nuova rata R_1 .

Può non essere del tutto ovvio il motivo per cui la rata debba cambiare rispetto a prima. Il motivo è che deve sempre esserci equivalenza finanziaria tra il debito iniziale e il valore attuale di tutto quello che si versa, cioè le rate. Rispetto a prima ora c'è un importo da versare anche in $t = 0$, cioè la sola prima quota interessi I_0 . Pertanto ora l'equivalenza finanziaria è

$$I_0 + R'_1 \cdot (1+i)^{-1} + R'_2 \cdot (1+i)^{-2} + R'_3 \cdot (1+i)^{-3} = 1000$$

e quindi necessariamente le rate R_1, R_2, R_3 cambiano. Le ho indicate con R'_1, R'_2, R'_3 .

Ricordando che $I_0 = d \cdot D_0 = 90.91\text{€}$ (attraverso il tasso di sconto d), per trovare R'_1 basta risolvere l'equazione

$$R'_1 = \frac{1000 - I_0}{(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + q^2(1+i)^{-3}} = 401.99\text{€}.$$

Finiamo con le quote interessi I_1 e la quota capitale C_1 . In realtà alla scadenza $t = 1$ abbiamo 3 incognite: I_1, C_1, D_1 , ma possiamo ridurle a 2 tenendo conto che $I_1 = d \cdot D_1$. Quindi le relazioni fondamentali

$$\begin{cases} C_1 + I_1 = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1 \end{cases} \quad \text{diventano} \quad \begin{cases} C_1 + dD_1 = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima il sistema diventa

$$\begin{cases} C_1 + d(D_0 - C_1) = R_1 \\ D_1 = D_0 - C_1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} C_1(1-d) = R_1 - dD_0 \\ D_1 = D_0 - C_1, \end{cases}$$

che fornisce

$$C_1 = \frac{R_1 - dD_0}{1-d} = 342.19\text{€} \quad ; \quad D_1 = D_0 - C_1 = 657.81\text{€} \quad ; \quad I_1 = d \cdot D_1 = 59.80\text{€}.$$

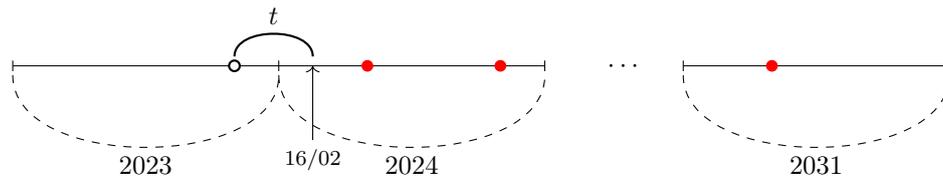
ESERCIZIO 3. Il B.T.P. ventennale denominato Btp-1mg31 6%, con scadenza il 01/05/2031, paga cedole semestrali al tasso cedolare $r = 6\%$. Il 16/02/2024 era quotato (corso secco) a 115.36. Si verifichi che il suo tasso di rendimento a scadenza era vicino al 2.89%. (Si consideri la tassazione e si calcolino i giorni con l'anno commerciale).

Si ipotizzi di aver acquistato il titolo all'emissione al prezzo 103, di averlo venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato in precedenza e di aver reinvestito le cedole incassate fino alla vendita al tasso del 2%. Si determini il tasso effettivo di rendimento dell'investimento nel B.T.P.



Il titolo paga le cedole al 01/05 e al 01/11. La rappresentazione qui sotto mostra le caratteristiche del B.T.P. nel periodo di interesse.

²In pratica si usano in sequenza per i valori $t = 1, 2, 3$ le due formule $I_t = i \cdot D_{t-1}$ e $C_t = R_t - I_t$.



Dobbiamo considerare la tassazione e quindi la cedola semestrale è

$$\frac{r}{2}F(1 - \gamma) = \frac{0.06}{2} \cdot 100(1 - 0.125) = 2.625.$$

Non c’è tassazione sul valore di rimborso dato che la quotazione è sopra la pari.

Fino alla scadenza del 01/05/2031 il titolo paga $n = 1 + 14 = 15$ cedole. Il tempo trascorso dallo stacco dell’ultima cedola (01/11/2023) è $t = 30 \cdot 3 + 16 = 106$ giorni. Quindi

$$\text{rateo} = 2.625 \cdot \frac{106}{180} = 1.546.$$

Il prezzo tel quel è

$$P_{\text{tq}} = P_s + \text{rateo} = 115.36 + 1.546 = 116.906.$$

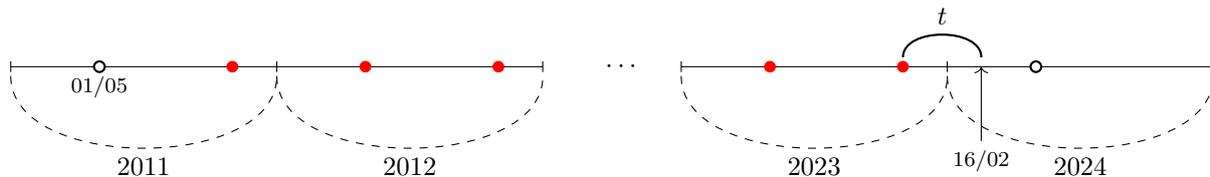
L’equazione che definisce il tasso di rendimento a scadenza è

$$P_{\text{tq}} = 2.625 \cdot a_{\overline{15}|ytm_{1/2}}(1 + ytm_{1/2})^{106/180} + 100(1 + ytm_{1/2})^{-15+106/180}.$$

Per verificare che il tasso di rendimento a scadenza era vicino 2.89% basta calcolare il termine di destra al tasso del 2.89% (convertendolo nel tasso semestrale equivalente):

$$2.625 \cdot a_{\overline{15}|0.0289_{1/2}}(1 + 0.0289_{1/2})^{106/180} + 100(1 + 0.0289_{1/2})^{-15+106/180} = 116.938 \simeq P_{\text{tq}}.$$

La seconda domanda non riguarda più il futuro, ma il passato. Essendo un titolo ventennale è stato emesso il 01/05/2011 al prezzo $P_E = 103$. Viene venduto il 16/02/2024 al prezzo tel quel trovato prima, cioè $P_{\text{tq}} = 116.906$. È opportuna una nuova figura.



Il numero di cedole incassate prima della vendita è $n = 1 + 24 = 25$ (oppure più semplicemente $40 - 15$).

Il tasso di rendimento effettivo è quello che risulta dall’uguaglianza tra il montante dell’importo investito per l’acquisto del titolo e il montante di quanto incassato (e reinvestito) dalle cedole e dal valore di vendita. Il montante va calcolato alla scadenza, cioè alla data del 16/02/2024. Il reinvestimento delle cedole avviene al tasso del 2%.

Indicando con $i_{1/2}^{\text{eff}}$ il tasso di rendimento effettivo su base semestrale, il montante dell’investimento è dato da

$$P_E(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{25+106/180}.$$

Ora i montanti degli importi a credito. Non c’è alcun cambio di tasso e quindi il montante delle cedole è

$$M = \text{CED} \cdot a_{\overline{25}|0.02_{1/2}}(1 + 0.02_{1/2})^{25+106/180} = 62.105.$$

Attenzione che il valore di vendita viene tassato, in quanto c’è una plusvalenza tra acquisto e vendita. Si ha

$$\text{CN} = P_{\text{tq}} - (P_{\text{tq}} - P_E) \cdot \gamma = 115.168.$$

L’equazione è pertanto

$$P_E(1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^{25+106/180} = M + \text{CN},$$

da cui

$$i_{1/2}^{\text{eff}} = \left(\frac{M + CN}{P_E} \right)^{1/(25+106/180)} - 1 = 0.02144533 \quad \text{da cui} \quad i_{\text{eff}} = (1 + i_{1/2}^{\text{eff}})^2 - 1 = 0.04335056.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri il progetto di investimento

-10	7	4	2
0	1	2	3

e la seguente struttura per scadenza dei tassi (a pronti/termine) *su base annua*:

$$i(0, 2) = 0.04 \quad , \quad i(0, 1, 2) = 0.03 \quad , \quad i(0, 2, 3) = 0.05.$$

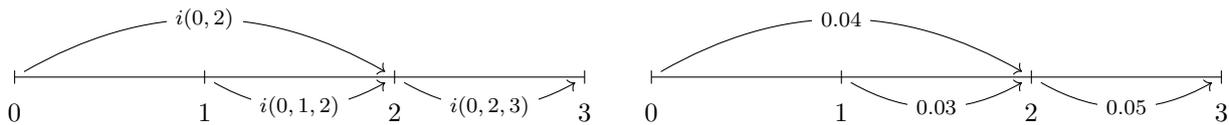
Si calcoli il REA del progetto nella struttura dei tassi fornita.

Si determinino il tasso a pronti $i(0, 1)$ e il tasso a termine $i(0, 1, 3)$ *su base annua* e si trovi il valore X_1 tra un anno equivalente a $X_3 = 10$ tra 3 anni.

Perché per il progetto possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento? Il valore del TIR è maggiore o minore del 20%?



La rappresentazione qui sotto raffigura la struttura dei tassi fornita.



Per il calcolo del REA del progetto occorre attualizzare all’istante iniziale ($t = 0$) la somma degli importi delle varie scadenze future. Si può fare ricostruendo tutta la struttura dei tassi, in particolare procurandosi i tassi a pronti alle scadenze non ancora disponibili, cioè nel nostro caso $i(0, 1)$ e $i(0, 3)$. Però si può arrivare al risultato anche direttamente con i tassi forniti, senza calcolarne di nuovi. (Si faccia attenzione, per capire gli esponenti, che i tassi sono forniti su base annua.)

$$\text{REA} = -10 + 7 \cdot (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2))^{-2} + 4 \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} + 2 \cdot (1 + i(0, 2, 3))^{-1} \cdot (1 + i(0, 2))^{-2} = 2.125.$$

Il tasso a pronti $i(0, 1)$ si può ottenere dall’equazione

$$1 + i(0, 1) = (1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 1, 2))^{-1} \quad \text{e quindi} \quad i(0, 1) = (1 + i(0, 2))^2(1 + i(0, 1, 2))^{-1} - 1 = 0.05009709.$$

Il tasso a termine $i(0, 1, 3)$:

$$1 + i(0, 1, 3) = (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2, 3)) \quad \text{e quindi} \quad i(0, 1, 3) = (1 + i(0, 1, 2))(1 + i(0, 2, 3)) - 1 = 0.03995192.$$

Ora il valore X_1 tra un anno equivalente a $X_3 = 10$ tra 3 anni.

$$X_1 = 10(1 + i(0, 2, 3))^{-1}(1 + i(0, 1, 2))^{-1} = 9.246.$$

Per il progetto possiamo affermare l’esistenza e unicità del tasso interno di rendimento in quanto il flusso cumulato è dato da

$$-10 \quad , \quad -3 \quad , \quad +1 \quad , \quad +3$$

e questo cambia segno una sola volta.

Per rispondere all’ultima domanda, se il TIR del progetto è maggiore o minore del 20%, basta calcolare il REA al tasso del 20% (struttura piatta). Otteniamo

$$-10 + 7 \cdot 1.2^{-1} + 4 \cdot 1.2^{-2} + 2 \cdot 1.2^{-3} = -0.231 < 0,$$

e quindi il TIR per il progetto A è minore del 20%.