

COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 12/01/2026

II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici.
 Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.
 Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 0, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (1, 2, 1, -1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio \mathcal{S} (di \mathbb{R}^4) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di \mathcal{S} ? Si consideri il terzo vettore fondamentale di \mathbb{R}^4 e si dica se esso appartiene al sottospazio \mathcal{S} .

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + 2y^2,$$

si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$ e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.

DOMANDA 1. Data una funzione f , che cosa si intende con sua funzione inversa?

DOMANDA 2. Si scriva il limite del rapporto incrementale di $f(x) = \ln(1 - x)$ nel punto $x_0 = -1$

DOMANDA 3. Che cosa si intende con funzione integrale di una funzione f nell'intervallo $[a, b]$?

DOMANDA 4. Che cosa significa che i vettori v^1, v^2, v^3, v^4 sono generatori di \mathbb{R}^3 ?

DOMANDA 5. Che cosa si intende dicendo che una forma quadratica è semidefinita positiva?

COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 12/01/2026

II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (0, 1, 2) \quad , \quad v^3 = (1, 0, 1) \quad , \quad v^4 = (1, -1, 1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio \mathcal{S} (di \mathbb{R}^3) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 4 vettori si ottiene una base di \mathcal{S} ? Si consideri il secondo vettore fondamentale di \mathbb{R}^3 e si dica se esso appartiene al sottospazio \mathcal{S} .

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^3,$$

si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$ e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.

DOMANDA 1. Data una funzione f , che cosa si intende con sua funzione inversa?

DOMANDA 2. Si scriva il limite del rapporto incrementale di $f(x) = e^{1-x}$ nel punto $x_0 = -1$

DOMANDA 3. Che cosa afferma il teorema fondamentale del calcolo integrale?

DOMANDA 4. Che cosa significa che i vettori v^1, v^2, v^3, v^4 sono una base di \mathbb{R}^4 ?

DOMANDA 5. Che cosa si intende dicendo che una forma quadratica è indefinita?