

COGNOME	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																				
NOME	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																				
MATRICOLA	VR	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																			

### ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 12/01/2026

***II parte***

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

---

**ESERCIZIO 1 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se  $f$  è continua e derivabile in tutto  $\mathbb{R}$  e si indichino gli estremi superiore e inferiore di  $f$ . Si dica infine se ad  $f$  è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-2, 2]$  e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

**ESERCIZIO 2 (PUNTI 5).** Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 0, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (1, 2, 1, -1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio  $\mathcal{S}$  (di  $\mathbb{R}^4$ ) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di  $\mathcal{S}$ ? Si consideri il terzo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^4$  e si dica se esso appartiene al sottospazio  $\mathcal{S}$ .

**ESERCIZIO 3 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + 2y^2,$$

si calcoli il gradiente di  $f$  e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di  $f$  alla retta di equazione  $y = x$  e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.

---

**DOMANDA 1.** Data una funzione  $f$ , che cosa si intende con sua funzione inversa?

**DOMANDA 2.** Si scriva il limite del rapporto incrementale di  $f(x) = \ln(1 - x)$  nel punto  $x_0 = -1$

**DOMANDA 3.** Che cosa si intende con funzione integrale di una funzione  $f$  nell'intervallo  $[a, b]$ ?

**DOMANDA 4.** Che cosa significa che i vettori  $v^1, v^2, v^3, v^4$  sono generatori di  $\mathbb{R}^3$ ?

**DOMANDA 5.** Che cosa si intende dicendo che una forma quadratica è semidefinita positiva?

COGNOME	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																				
NOME	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																				
MATRICOLA	VR <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>																				

### ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 12/01/2026

***II parte***

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

---

**ESERCIZIO 1 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se  $f$  è continua e derivabile in tutto  $\mathbb{R}$  e si indichino gli estremi superiore e inferiore di  $f$ . Si dica infine se ad  $f$  è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo  $[-2, 2]$  e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

**ESERCIZIO 2 (PUNTI 5).** Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1), \quad v^2 = (0, 1, 2), \quad v^3 = (1, 0, 1), \quad v^4 = (1, -1, 1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio  $\mathcal{S}$  (di  $\mathbb{R}^3$ ) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 4 vettori si ottiene una base di  $\mathcal{S}$ ? Si consideri il secondo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^3$  e si dica se esso appartiene al sottospazio  $\mathcal{S}$ .

**ESERCIZIO 3 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^3,$$

si calcoli il gradiente di  $f$  e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di  $f$  alla retta di equazione  $y = x$  e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.

---

**DOMANDA 1.** Data una funzione  $f$ , che cosa si intende con sua funzione inversa?

**DOMANDA 2.** Si scriva il limite del rapporto incrementale di  $f(x) = e^{1-x}$  nel punto  $x_0 = -1$

**DOMANDA 3.** Che cosa afferma il teorema fondamentale del calcolo integrale?

**DOMANDA 4.** Che cosa significa che i vettori  $v^1, v^2, v^3, v^4$  sono una base di  $\mathbb{R}^4$ ?

**DOMANDA 5.** Che cosa si intende dicendo che una forma quadratica è indefinita?