

COGNOME																	
NOME																	
MATRICOLA											VR						

ESAME DI MATEMATICA

Vicenza, 02/02/2026

II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici.

Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \geq 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica poi se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$. Infine si verifichi comunque se la tesi del teorema è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se le sue righe sono linearmente dipendenti o indipendenti. E le colonne? Considerando poi la trasformazione lineare $T(x) = Ax$, si scriva l'espressione di T e si determini la dimensione dell'immagine di T . Si consideri infine il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ e si trovino le sue soluzioni.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x + y,$$

si calcoli il gradiente di f e si trovi il punto stazionario. Con le condizioni del secondo ordine si studi la natura del punto stazionario.

DOMANDA 1. Che cosa significa che una funzione f è iniettiva?

DOMANDA 2. Che cosa significa che una funzione f è continua in un punto x_0 ?

DOMANDA 3. Che relazione sussiste tra continuità e derivabilità di una funzione?

DOMANDA 4. Quando tre vettori v^1, v^2, v^3 si dicono linearmente dipendenti?

DOMANDA 5. Che cosa è la matrice Hessiana o gradiente secondo di una funzione $f(x, y)$?

COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 02/02/2026
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \leq 0 \\ -\ln x & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica poi se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$. Infine si verifichi comunque se la tesi del teorema è vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se le sue righe sono linearmente dipendenti o indipendenti. E le colonne? Considerando poi la trasformazione lineare $T(x) = Ax$, si scriva l'espressione di T e si determini la dimensione dell'immagine di T . Si consideri infine il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ e si trovino le sue soluzioni.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + x - y,$$

si calcoli il gradiente di f e si trovi il punto stazionario. Con le condizioni del secondo ordine si studi la natura del punto stazionario.

DOMANDA 1. Che cosa significa che una funzione f è suriettiva?

DOMANDA 2. Che relazione sussiste tra continuità e derivabilità di una funzione?

DOMANDA 3. Si indichi una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di minimo di una funzione $f(x)$.

DOMANDA 4. Quando tre vettori v^1, v^2, v^3 si dicono linearmente dipendenti?

DOMANDA 5. Che cosa è la matrice Hessiana o gradiente secondo di una funzione $f(x, y)$?