Esercitazioni XI – 11–15/12/2023

A. Dipendenza, indipendenza lineare, generatori, basi

▶ 1. Si dica se i vettori

$$v^1 = (1, -2) \qquad , \qquad v^2 = (-2, 4) \qquad \text{e} \qquad v^3 = (0, 3)$$

sono generatori di $\mathbb{R}^2$. Sono una base di $\mathbb{R}^2$? Nel caso non siano una base, si dica quali tra loro formano una base di $\mathbb{R}^2$.

▶ 2. Si dica se i vettori

$$(1, 0, 1) \qquad \text{e} \qquad (0, 1, 1)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti e se sono una base di $\mathbb{R}^3$. Si dica inoltre qual è la dimensione dello spazio da essi generato.

▶ 3. Si dica se i vettori

$$(2, 1, -1) \qquad , \qquad (1, 1, 1) \qquad \text{e} \qquad (1, 0, -2)$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti e se sono una base di $\mathbb{R}^3$. Si dica in ogni caso quale è la dimensione dello spazio da essi generato.

▶ 4. Si dica se i vettori

$$(1, 0, 1) \qquad , \qquad (-1, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad (0, 1, -1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$

▶ 5. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$(1, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad (-1, 1, -1)$$

e se ne indichi una base

▶ 6. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$(1, 2, -1) \qquad , \qquad (-2, -4, 2) \qquad \text{e} \qquad (0, 1, 0)$$

e se ne indichi una base

▶ 7. Si dica se il vettore $u = (1, 2, 3)$ appartiene al sottospazio generato da

$$v = (1, 3, 2) \qquad \text{e} \qquad w = (0, -1, 1).$$

▶ 8. Si dica se il vettore $u = (1, 1, 1)$ appartiene al sottospazio generato da

$$v = (1, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad w = (-2, 2, -2).$$

B. Immagine di una trasformazione lineare

▶ Per le seguenti trasformazioni lineari si determinino la dimensione e una base dell'immagine:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$
4. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

C. Sistemi lineari

▶ Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi di equazioni lineari. Scrivere le soluzioni nella forma "soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato", indicando infine la dimensione dello spazio delle soluzioni e una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

1. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -x - y - z = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -y - z = 2 \\ x - z = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

D. Esercizi aggiuntivi (sistemi lineari omogenei)

▶ Si risolvano i sistemi lineari omogenei associati alle trasformazioni lineari della **sezione B** (quindi, detta A la matrice della trasformazione, si risolva il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$). Per ciascuno si indichi la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.