Soluzioni delle Esercitazioni X – 04–08/12/2023

► 1. L'espressione della trasformazione composta $T_2(T_1)$ si ottiene dalla scrittura

$$T_2\left(T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = T_2\begin{pmatrix}2x_1\\x_1+x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1-x_2\\2x_1\end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice di rappresentazione di $T_2(T_1)$ è

$$A = \begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}.$$

Indicando con A_1 e A_2 le matrici di rappresentazione rispettivamente di T_1 e T_2, si ha

$$A_1 = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Il prodotto $A_2 \cdot A_1$ (attenzione all'ordine) è infatti

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix} = A.$$

Analogamente l'espressione della trasformazione composta $T_1(T_2)$ si ottiene dalla scrittura

$$T_1\left(T_2\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = T_1\begin{pmatrix}-y_2\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice di rappresentazione di $T_1(T_2)$ è

$$B = \begin{pmatrix}0 & -2\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

Questa volta il prodotto $A_1 \cdot A_2$ è infatti

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\1 & -1\end{pmatrix} = B.$$

► 2. La trasformazione T non è certamente suriettiva dato che ad esempio il vettore $\binom{0}{1}$ non si può ottenere come immagine di alcun vettore di $\mathbb{R}^2$, avendo le immagini tutte come seconda componente 0. Analogamente possiamo affermare che il sottospazio immagine, cioè $\mathrm{Im}(T)$, usando nel codominio un riferimento (y_1, y_2), è formato dai vettori con $y_2 = 0$ (seconda componente nulla, cioè l'asse y_1) e pertanto non "copre" l'intero codominio.

La trasformazione T non è nemmeno iniettiva. Infatti i vettori $\binom{0}{0}$ e $\binom{1}{-1}$ hanno la stessa immagine, cioè il vettore nullo.

► 3. La trasformazione T è iniettiva. Infatti se $\binom{x_1}{x_2} \neq \binom{y_1}{y_2}$ allora certamente

$$T\binom{x_1}{x_2} \neq T\binom{y_1}{y_2}, \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-y_2\\y_1\end{pmatrix}$$

dato che essi hanno la prima (o la seconda) componente diversa.

La trasformazione T è anche suriettiva. Infatti, preso un qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$, indichiamolo con $\binom{a}{b}$, esso si ottiene come immagine di un vettore $\binom{x_1}{x_2}$, dato che

$$\binom{a}{b} = T\binom{x_1}{x_2} \quad \text{significa} \quad \binom{a}{b} = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$$

e basterà porre $x_1 = b$ e $x_2 = -a$.

► 4. La trasformazione T non è iniettiva. Infatti i vettori $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ hanno la stessa immagine, cioè il vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Non è nemmeno suriettiva, dato che ad esempio il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ non si può ottenere come immagine di alcun vettore di $\mathbb{R}^3$. Infatti

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\-x_3\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_3 = 1\\ x_2 = 0\\ x_3 = -1\end{cases}$$

e il sistema è chiaramente impossibile.

► 5. La trasformazione T è iniettiva. Infatti se $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ allora certamente

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \neq T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}y_2\\y_3\\y_1\end{pmatrix}$$

dato che essi hanno almeno una componente diversa.

La trasformazione T è anche suriettiva. Infatti, preso un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$, indichiamolo con $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, esso si ottiene come immagine di un vettore $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, dato che

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \text{significa} \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix}$$

e basterà porre $x_1 = c$, $x_2 = a$ e $x_3 = b$.

A. Determinante

► 1. Si tratta di una matrice che viene detta "triangolare superiore". Ci si accorge presto che per questo tipo di matrici il calcolo del determinante è analogo a quello per matrici diagonali (si pensi di sviluppare il calcolo rispetto alla prima colonna) e che cioè basta fare il prodotto degli elementi che stanno sulla diagonale principale. Pertanto

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

2. Conviene sviluppare il calcolo del determinante rispetto alla seconda riga (o colonna). Si ha

$$\det\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&0\\1&0&4\end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1\\1&4\end{pmatrix} = 2\cdot(-5) = -10.$$

3. Non ci sono zeri nella matrice. Per il calcolo sono possibili più alternative: la definizione (la procedura che utilizza i complementi algebrici), la regola di Sarrus (applicabile solo con matrici 3×3), l'uso di operazioni elementari per annullare intanto qualche elemento. Vediamo tutte e tre queste possibili tecniche.

(i) Sviluppiamo il calcolo rispetto alla prima riga:

$$\det\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&1&1\\1&2&-1\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} = 1\cdot(-3) + 1\cdot(-3) - 1\cdot 3 = -9$$

(si faccia attenzione che per il secondo termine il segno diventa + perché "il posto è dispari", mentre per il terzo termine il segno resta − perché "il posto è pari").[1]

(ii) La regola di Sarrus porta a costruire intanto la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ottenuta affiancando alla matrice di partenza nuovamente la prima e la seconda colonna. Ora si fa la somma dei "prodotti sulle diagonali discendenti" e poi si toglie la somma dei "prodotti sulle diagonali ascendenti":

$$(-1-1-4)-(-1+2+2) = -6-3 = -9 \quad \text{, e questo è il determinante.}$$

(iii) Infine usiamo le operazioni elementari. Le possibilità sono ovviamente tante. Ad esempio, annulliamo gli elementi sulla prima riga a partire dal secondo, utilizzando la prima colonna. Quindi, per annullare l'elemento di posto $(1,2)$ sommiamo la prima colonna alla seconda (prima e terza colonna restano inalterate). Otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ora annulliamo l'elemento di posto $(1,3)$: sommiamo la prima colonna alla terza (prima e seconda colonna restano inalterate). Otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le operazioni elementari non modificano il determinante della matrice e quindi l'ultima matrice ottenuta ha lo stesso determinante della prima. Sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla prima riga si ottiene -9.

4. Osserviamo che nelle righe e colonne della matrice (chiamiamola A) ci sono al più due zeri. Calcoliamo il determinante rispetto alla prima riga. Si ha

$$\begin{aligned} \det A &= -1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(rispetto alla } 3^{\text{a}} \text{ e } 1^{\text{a}} \text{ colonna rispettivamente)} \\ &= -1\cdot\left(-1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - 1\cdot\left(1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 - 1\cdot 3 = -2. \end{aligned}$$

Si poteva alternativamente annullare qualcosa con un'operazione elementare e poi calcolare un solo determinante 3×3. Annulliamo l'elemento di posto $(1,2)$, togliendo alla 2^{a} colonna la 4^{a} (quindi 1^{a}, 3^{a} e 4^{a} colonna restano inalterate). Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha lo stesso determinante della nostra. Sviluppando ora il calcolo del determinante rispetto alla prima riga si ottiene (attenzione che il posto $(1,4)$ è dispari)

$$-1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2. \quad [2]$$

[1] Con posto dispari intendo che, se si tratta dell'elemento di posto (i,j), la somma $i+j$ è dispari, e analogamente per il posto pari.

[2] Ho ottenuto l'ultima matrice annullando gli elementi di posto $(3,1)$ e $(3,2)$ con un'operazione elementare: ho tolto alla terza riga la prima.

B. Matrice inversa

▶ 1. Calcoliamo il determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} = 4 - a^2.$$

Quindi, dato che il determinante si annulla se e solo se $a = \pm 2$, possiamo dire che la matrice è invertibile per a diverso da ± 2. [3]

2. Calcoliamo il determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = 1 \cdot (2a+1) - a \cdot (-1) = 3a + 1.$$

Quindi, dato che il determinante si annulla se e solo se $a = -\frac{1}{3}$, possiamo dire che la matrice è invertibile per a diverso da $-\frac{1}{3}$. [4]

▶ 3. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice è invertibile in quanto $\det A = 2$. Per il calcolo della matrice inversa calcoliamo intanto la matrice dei complementi algebrici (è la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi di A):[5]

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora facciamo la trasposta di questa e otteniamo la cosiddetta matrice aggiunta (che si indica con $A^\star$):

$$A^\star = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine dividiamo quest'ultima per il determinante di A e otteniamo la matrice inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A^\star = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Per confermare il risultato trovato si può verificare che $A \cdot A^{-1} = I$. Si ha infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice è invertibile in quanto $\det A = 3$. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice aggiunta è

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] Ad esempio, per $a = 1$, si ha $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e risulta $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

[4] Ad esempio, per $a = 1$, si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e risulta $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

[5] Si ricordi che i complementi algebrici non sono semplicemente i minori complementari, ma sono i minori complementari cambiati di segno se il posto è dispari.

e la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A^\star = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Per confermare il risultato trovato si può verificare che $A \cdot A^{-1} = I$. Si ha infatti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si poteva anche scrivere

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi, per verificare il risultato,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C. Rango

► 1. Poniamo $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 2×2 e il rango può essere o 1 o 2. Il rango di A è 2, dato che il determinante di A è diverso da zero ($\det A = -2$).

2. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 2×3 e il rango può essere o 1 o 2. Il rango di A è 2, dato che la sottomatrice quadrata di ordine 2 ottenuta con la 2ª e 3ª colonna ha determinante diverso da 0. Esiste quindi un minore di ordine 2 diverso da zero. Si noti che invece non avremmo potuto concludere considerando il solo minore che si ottiene con la 1ª e 2ª colonna.

3. Poniamo $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 2×3 e il rango può essere o 1 o 2. Procedendo con il calcolo dei minori, abbiamo che il minore che si ottiene dalla sottomatrice formata dalle prime due colonne è nullo. Anche il minore che si ottiene dalla prima e terza colonna è nullo ed è pure nullo il minore che si ottiene dalla seconda e terza colonna. Quindi tutti i minori del secondo ordine di A sono nulli. Questo ci permette di dire che il rango non è 2. Possiamo concludere che il rango è 1 (esiste almeno un minore del primo ordine diverso da zero, cioè almeno un elemento della matrice diverso da zero). Si poteva anche concludere che il rango non è 2 osservando che le due righe sono linearmente dipendenti, dato che sono una opposta dell'altra.

4. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 2×4 e il rango può essere al più 2. Qui si può osservare che la 1ª riga è un multiplo della seconda (è -2 volte la seconda) e che quindi le righe sono linearmente dipendenti. Questo ci permette di dire (attenzione) non che il determinante di A è 0 (A non è quadrata) ma che senz'altro sono nulli tutti i determinanti delle sottomatrici quadrate di A di ordine 2. In altre parole tutti i minori di A di ordine 2 sono nulli e quindi il rango di A è 1 (banalmente ci sono minori di ordine 1 diversi da zero).

5. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 3×3 e il rango può essere o 1, 2 o 3. Dato che la matrice è quadrata possiamo calcolare il determinante, che risulta uguale a 0. Quindi l'unico minore di A di ordine 3 si annulla e il rango non può essere

3.[6] Osservando che ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(3,3)$ è 1, possiamo concludere che il rango di A è 2.

6. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 3×3 e il rango può essere al più 3. Il determinante di A vale 1 e quindi il rango è 3.

7. Poniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 3×3 e il rango può essere al più 3. Qui sono evidenti alcune dipendenze tra le righe (anche tra le colonne). Vediamo come si può procedere nei due modi possibili, cioè usando le dipendenze oppure procedendo con il calcolo dei minori.

L'osservare che ad esempio la seconda riga è l'opposto della prima ci permette di dire che le righe sono dipendenti, quindi che il determinante di A è 0 e quindi che il rango non è 3 (attenzione! non posso dire altro al momento). Se osserviamo ora che anche la terza riga dipende dalla prima (è il doppio) possiamo dire che il rango non è nemmeno 2. Quindi il rango di A è 1 (banalmente ci sono minori di ordine 1 diversi da zero).

Volendo invece procedere con il calcolo dei minori possiamo iniziare con il calcolo del determinante di A (unico minore di ordine 3): lo troviamo uguale a 0. Allora il rango non è 3. Per vedere se il rango è 2 dobbiamo calcolare i minori di ordine 2. Se lo facciamo li troviamo tutti nulli.[7] Quindi il rango non è nemmeno 2 e allora necessariamente è 1.

8. Poniamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 3×4 e il rango può essere al più 3. Possiamo procedere con il calcolo dei minori oppure cercare di scoprire alcune dipendenze.

Osserviamo che la terza colonna è nulla: quindi è inutile considerare sottomatrici che contengono la terza colonna in quanto avranno certamente determinante nullo. Allora l'unico minore che può essere diverso da zero è quello che non contiene la terza colonna, e cioè è il

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è nullo anche lui dato che la terza riga è l'opposto della prima. Quindi non ci sono minori di ordine 3 diversi da zero e il rango non può essere 3. Il rango di A è certamente 2 dato che la sottomatrice di A formata con 1ª e 2ª riga e 1ª e 2ª colonna ha determinante 1.

L'esercizio si poteva anche risolvere più rapidamente osservando fin dall'inizio che la 3ª riga di A è l'opposto della 1ª e che quindi il rango non può essere 3 (ogni "determinante 3×3" è certamente nullo). La conclusione poi che il rango di A è 2 segue per quanto detto in precedenza.

9. Poniamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si tratta di una matrice 3×4 e il rango può essere al più 3. Possiamo anche qui procedere con il calcolo dei minori oppure cercare di scoprire alcune dipendenze.

Con il calcolo dei minori abbiamo che i minori del terzo ordine sono:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi tutti i minori del terzo ordine sono nulli. Pertanto il rango di A non è 3. Il rango di A è certamente 2 dato che la sottomatrice di A formata con 1ª e 2ª riga e 1ª e 2ª colonna ha determinante diverso da zero.

Volendo arrivare al risultato cercando delle dipendenze tra le righe o tra le colonne, non è così facile scoprire la dipendenza tra le righe (con qualche calcolo si potrebbe arrivare a dire che la prima riga si ottiene togliendo all'opposto

[6] Si poteva anche osservare che la 3ª riga è la somma delle prime due e che quindi le righe sono linearmente dipendenti, condizione questa sufficiente per dire che il determinante si annulla.

[7] Attenzione. Se vuoi seguire questa strada li devi calcolare proprio tutti, e sono 9 (cerca di giustificare bene il motivo di questo).

della seconda il doppio della terza[8]). È più facile scoprire le dipendenze tra le colonne, in quanto ad esempio la terza colonna è la differenza delle prime due e la quarta è l'opposto della somma delle prime due. Tutto questo ci porta a dire che il rango è 2.

[8]Cioè, dette r^1, r^2, r^3 le tre righe, si ha che $r^1 = -r^2 - 2r^3$.