Soluzioni delle Esercitazioni XI – 09–13/12/2024

A. Forme quadratiche

► 1. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x,y) = -x^2 - 4xy - 4y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è nullo, quindi la forma non può essere definita. I due minori principali del primo ordine sono -1 e -4, negativi: quindi la f.q. (e la matrice) è *semidefinita negativa*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$-x^2 - 4xy - 4y^2 = -(x+2y)^2$$

e quindi la forma è sempre minore o uguale a zero e si annulla in modo non banale, sulla retta di equazione $x+2y=0$.

2. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x,y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è negativo questo basta per dire che la forma è *indefinita*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$q(1,0) = 2 \qquad \text{e} \qquad q(1,1) = -1.$$

3. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x,y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il MPNO di ordine 1 è -2, il MPNO di ordine 2, cioè il determinante di A vale 1: quindi la forma è *definita negativa*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$\begin{aligned} -2x^2 + 6xy - 5y^2 &= -2\left(x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2\right) \\ \text{(completamento del quadrato)} \quad &= -2\left(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{5}{2}y^2\right) \\ &= -2\left[\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2\right]. \end{aligned}$$

Da qui si vede che la forma è sempre negativa e si annulla solo in modo banale.[1]

4. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x,y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il MPNO di ordine 1 è 3, il MPNO di ordine 2, cioè il determinante di A vale 2: quindi la forma è *definita positiva*.

A verifica di questo possiamo osservare che

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 2y^2 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{2}{3}y^2\right) \\ \text{(completamento del quadrato)} \quad &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{3}y^2\right) \\ &= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{2}{9}y^2\right]. \end{aligned}$$

[1] Per annullare la somma dei due quadrati y deve essere zero, e quindi, nel primo quadrato, anche x deve essere zero.

Da qui si vede che la forma è sempre positiva e si annulla solo in modo banale.[2]

► 5. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4yz + 2z^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il MPNO di ordine 1 vale 2, positivo. Il MPNO di ordine 2 vale 4, positivo. Il determinante di A è zero. Quindi la forma non è definita positiva.

Potrebbe essere semidefinita positiva. Per verificarlo occorre controllare i minori principali (anche non di NO). Quelli di ordine 1 (elementi sulla diagonale) sono 2, 4, e 2. Quelli di ordine 2 sono tutti uguali a 4. Pertanto il determinante è nullo e tutti i minori principali sono maggiori o uguali a zero. La forma è quindi *semidefinita positiva.*

6. La matrice simmetrica associata alla f.q. $q(x, y, z) = -x^2 - 2xy - 2xz - 2y^2 + 2yz - 5z^2$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il MPNO di ordine 1 vale -1, negativo. Il MPNO di ordine 2 vale 1, positivo. Il determinante di A è zero. Quindi la forma non è definita negativa.

Potrebbe essere semidefinita negativa e quindi occorre controllare i minori principali (anche non di NO). Quelli di ordine 1 sono (elementi sulla diagonale) -1, -2 e -5, negativi. Quelli di ordine 2 sono 1, 4 e 9, positivi. Pertanto il determinante è nullo, i minori principali di ordine dispari sono minori o uguali a zero e quelli ordine pari sono maggiori o uguali a zero. La forma è quindi *semidefinita negativa.*

B. Segno di una funzione

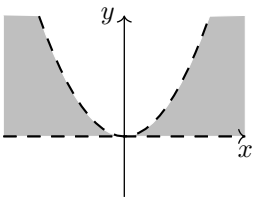
► 1. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = x^2y - y^2$ ponendo

$$x^2y - y^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad y(x^2 - y) > 0.$$

Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} y > 0 \\ x^2 - y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y < 0 \\ x^2 - y < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y > 0 \\ y < x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y < 0 \\ y > x^2. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni, date dai punti che stanno al di sopra dell'asse y e nello stesso tempo al di sotto della parabola di equazione $y = x^2$. Il secondo sistema non ha soluzioni. La regione è rappresentata qui sotto.



2. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = (x^2 - y)(y^2 - x)$ ponendo

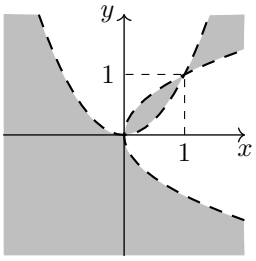
$$(x^2 - y)(y^2 - x) > 0.$$

Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - y > 0 \\ y^2 - x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y^2 - x < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y < x^2 \\ x < y^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y > x^2 \\ x > y^2. \end{cases}$$

Entrambi i sistemi hanno soluzioni. La regione è rappresentata qui sotto.

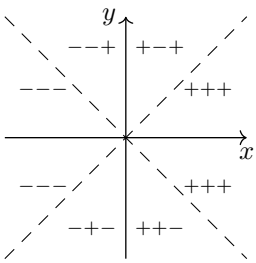
[2] Per annullare la somma dei due quadrati y deve essere zero, e quindi, nel primo quadrato, anche x deve essere zero.

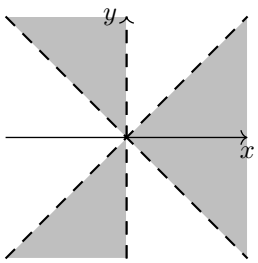


3. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = x^3 - xy^2$ ponendo

$$x^3 - xy^2 > 0 \quad \text{cioè} \quad x(x-y)(x+y) > 0.$$

Trattandosi di tre fattori possiamo studiare separatamente il segno di ciascuno, riportare i segni in un grafico e poi operare il prodotto dei segni. Si tenga conto che il primo fattore è positivo nel primo e quarto quadrante, il secondo è positivo al di sotto della retta di equazione $y = x$ ed il terzo è positivo al di sopra della retta di equazione $y = -x$. Si ottiene qualcosa di simile alla figura qui sotto a sinistra, dove le terne di segni forniscono nell'ordine il segno di primo, secondo e terzo fattore.



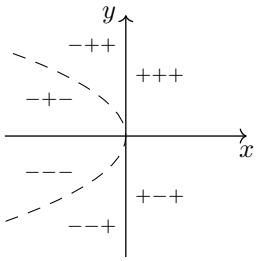


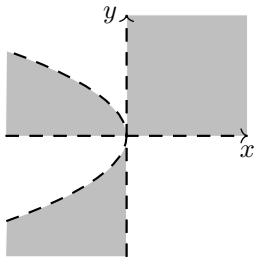
Nella figura a destra sono invece evidenziate in grigio le regioni in cui la funzione risulta positiva. Notare che i punti sull'asse y non fanno parte dell'insieme.

4. Studiamo il segno della funzione $f(x, y) = x^2y + xy^3$ ponendo

$$x^2y + xy^3 > 0 \quad \text{cioè} \quad xy(x + y^2) > 0.$$

Studiamo anche in questo caso separatamente il segno dei tre fattori. Il primo fattore è positivo nel primo e quarto quadrante, il secondo è positivo nel primo e secondo quadrante ed il terzo è positivo alla destra della parabola di equazione $x = -y^2$. Si ottiene qualcosa di simile alla figura qui sotto a sinistra.





Nella figura a destra sono marcate in grigio le regioni in cui la funzione risulta positiva. Notare che i punti sugli assi non fanno parte dell'insieme.

C. Derivate parziali

► In questi esercizi si tratta di calcolare le derivate parziali in un punto, usando la definizione, cioè il limite del rapporto incrementale (parziale). Si può utilizzare indifferentemente una delle due forme possibili (quella con variabile x (o y) o quella con variabile h).

1. Il valore della funzione $f(x, y) = xy^2$ nel punto $(1, -1)$ è $f(1, -1) = 1$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x, -1) - f(1, -1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = \lim_{y \to -1} \frac{f(1, y) - f(1, -1)}{y + 1} = \lim_{y \to -1} \frac{y^2 - 1}{y + 1} = \lim_{y \to -1} (y - 1) = -2.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,-1)-f(1,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,-1+h)-f(1,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(-2+h) = -2.$$

2. Il valore della funzione $f(x,y) = y + e^x$ nel punto $(0,1)$ è $f(0,1) = 2$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+e^x-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{(si può fare con De L'Hôpital)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y+1-2}{y-1} = 1.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+e^h-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+h+1-2}{h} = 1.$$

3. Il valore della funzione $f(x,y) = x^2 \ln y$ nel punto $(2,1)$ è $f(2,1) = 0$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x,1)-f(2,1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{0}{x-2} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(2,y)-f(2,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{4\ln y}{y-1} = 4 \quad \text{(si può fare con De L'Hôpital).}$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1)-f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2\cdot 0-0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,1+h)-f(2,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4\ln(1+h)-0}{h} = 4 \quad \text{(si può fare con De L'Hôpital).}$$

4. Il valore della funzione $f(x,y) = \frac{y}{x}$ nel punto $(1,2)$ è $f(1,2) = 2$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(1-x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x} = -2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{y\to 2} \frac{f(1,y)-f(1,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2}{y-2} = 1.$$

Nella forma con variabile h si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2-2h}{h(1+h)} = -2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h} = 1.$$

► In questi esercizi si tratta di calcolare le derivate parziali usando le regole di derivazione.

5. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

6. Con la funzione $f(x,y) = (x^2+y)\ln x$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln x + (x^2+y)\cdot\frac{1}{x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x.$$

7. Con la funzione $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}.$$

8. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{y+\sqrt{x}}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y+\sqrt{x}}}.$$

9. Con la funzione $f(x,y) = xe^{x/y}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x/y} + xe^{x/y}\cdot\frac{1}{y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

10. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}e^{y/x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}e^{y/x} + \frac{x}{y}e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{y}e^{y/x} - \frac{1}{x}e^{y/x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}e^{y/x} + \frac{x}{y}e^{y/x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{x}{y^2}e^{y/x} + \frac{1}{y}e^{y/x}.$$

11. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{x+\ln y}{y+\ln x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1\cdot(y+\ln x)-(x+\ln y)\cdot\frac{1}{x}}{(y+\ln x)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}\cdot(y+\ln x)-(x+\ln y)\cdot 1}{(y+\ln x)^2}.$$

12. Con la funzione $f(x,y) = y(x+\ln y)^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cdot 2(x+\ln y)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+\ln y)^2 + y\cdot 2(x+\ln y)\cdot\frac{1}{y}.$$

13. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{x+e^y}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(x+e^y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+e^y-ye^y}{(x+e^y)^2}.$$

14. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{y}{1+e^{xy}}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(1+e^{xy})^2}\cdot e^{xy}\cdot y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1+e^{xy}-y\cdot e^{xy}\cdot x}{(1+e^{xy})^2}.$$

15. Con la funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x+e^{x^2+y}}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x+e^{x^2+y})^2}\cdot\left(1+e^{x^2+y}\cdot 2x\right)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{(x+e^{x^2+y})^2}\cdot e^{x^2+y}\cdot 1.$$

16. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{x\ln y + y\ln x}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x\ln y + y\ln x}}\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x\ln y + y\ln x}}\left(\frac{x}{y} + \ln x\right).$$

17. Con la funzione $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1}.$$

18. Con la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^\alpha + y^\beta}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^\alpha+y^\beta}}\cdot\alpha x^{\alpha-1}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^\alpha+y^\beta}}\cdot\beta y^{\beta-1}.$$