Soluzioni delle Esercitazioni XI – 11–15/12/2023

A. Dipendenza, indipendenza lineare, generatori, basi

▶ 1. Richiamo anzitutto alcuni fatti generali.

Supponiamo di avere dei vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ nello spazio $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo S_V il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ da essi generato[1] e indichiamo con V la matrice che si ottiene disponendo i vettori dati in riga o in colonna. Allora

- I vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice V ha rango k.
- La dimensione del sottospazio S_V coincide con il rango di V.
- I vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono certamente dei generatori di S_V (data la definizione di sottospazio generato) e sono una base di S_V se e solo se sono linearmente indipendenti.
- I vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono generatori dell'intero spazio $\mathbb{R}^n$ se e solo se S_V coincide con $\mathbb{R}^n$ e quindi se e solo se la dimensione di S_V è n e quindi ancora se e solo se il rango di V è n.

Veniamo al nostro esercizio. Abbiamo 3 vettori in $\mathbb{R}^2$. Per decidere se essi generano tutto $\mathbb{R}^2$ basta vedere se la dimensione dello spazio da essi generato è 2, e cioè se il rango della matrice da essi formata è 2.

Quindi nel nostro caso la matrice è (disporli in riga o in colonna è lo stesso)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il rango di V è 2 perché ad esempio la sottomatrice che si ottiene togliendo la prima colonna (non la terza) ha determinante diverso da zero. Quindi i tre vettori sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

I tre vettori non sono invece una base di $\mathbb{R}^2$, dato che sono certamente dipendenti (ricordo che tre vettori in $\mathbb{R}^2$ sono sempre l.d.).

Si può trovare una base di $\mathbb{R}^2$ scegliendo opportunamente 2 dei 3 vettori, in modo che questi 2 siano l.i.: v^1 e v^2 non vanno bene, dato che sono linearmente dipendenti, v^1 e v^3 vanno bene (sono l.i.) e v^2 e v^3 vanno bene (sono l.i.). Quindi le possibili basi sono : $\{v^1, v^3\}$ e $\{v^2, v^3\}$.

Si faccia attenzione qui a come è formulata la domanda: se la domanda è, come era in questo caso, di dire quali *tra loro* formano una base di $\mathbb{R}^2$, vale quanto appena detto. Se la domanda fosse stata "indicare una base del sottospazio da essi generato", dopo aver scoperto che i tre vettori generano tutto $\mathbb{R}^2$, si poteva anche rispondere con la base fondamentale, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vettori che non sono i vettori di partenza.

▶ 2. Possiamo dire subito che i due vettori non formano una base di $\mathbb{R}^3$, dato che le basi di $\mathbb{R}^3$ sono formate da tre vettori. Per rispondere alla prima domanda scriviamo la matrice disponendo i vettori ad esempio in riga:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice V ha rango 2 (la sottomatrice formata dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero) e quindi i due vettori sono linearmente indipendenti.

La dimensione dello spazio S_V da essi generato è 2, dato che coincide con il rango della matrice V. Trattandosi di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 possiamo dire che è un piano per l'origine.

▶ 3. Costruiamo la matrice disponendo i vettori ad esempio in colonna:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[1] Ricordo che il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$.

Il determinante di questa matrice è 0. Questo ci dice che i tre vettori sono linearmente dipendenti. Quindi di conseguenza non sono una base di $\mathbb{R}^3$.

La dimensione dello spazio S_V da essi generato è uguale al rango della matrice V. Il rango non è 3, dato che il determinante è nullo, ma è 2, dato che ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(3,3)$ è diverso da zero. Quindi si ha che $\dim S_V = 2$.

▶ 4. Costruiamo la matrice disponendo i vettori ad esempio in riga:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è -2 e quindi le righe sono linearmente indipendenti. Possiamo dire che generano tutto $\mathbb{R}^3$, dato che il rango della matrice è 3. Allora, dato che i tre vettori sono l.i. e generatori di $\mathbb{R}^3$, essi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

▶ 5. Costruiamo la matrice disponendo i vettori ad esempio in riga:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori coincide con il rango di questa matrice. Il rango è chiaramente 1, dato che le due righe sono dipendenti essendo una l'opposto dell'altra. Pertanto, detto S_V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori, si ha $\dim S_V = 1$. Si tratta di una retta per l'origine.

Una base di tale sottospazio è costituita da uno dei due vettori (non importa quale).

▶ 6. Costruiamo la matrice disponendo i vettori ad esempio in riga:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai tre vettori coincide con il rango di questa matrice. Il rango non è 3, dato che le prime due righe sono proporzionali e quindi linearmente dipendenti. Il rango è 2, dato che ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(2,3)$ è diverso da zero. Pertanto, se indichiamo con S_V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai tre vettori, si ha $\dim S_V = 2$. Si tratta di un piano per l'origine.

Una base di tale sottospazio è costituita ad esempio dall'insieme del primo e del terzo (oppure del secondo e del terzo).

▶ 7. Questo tipo di esercizio si può risolvere in più modi diversi.

Dire che u appartiene al sottospazio generato da v e w significa (per definizione di sottospazio generato) che u si può scrivere come combinazione lineare di v e w, cioè si può scrivere $u = av + bw$ per qualche scalare a, b. Questo equivale a scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a-b \\ 2a+b \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ 3a - b = 2 \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Se il sistema ha soluzioni allora u sta nel sottospazio generato da v e w, altrimenti no. Lascio allo studente arrivare alla conclusione per questa strada.

Altro modo (solo apparentemente diverso) è quello di utilizzare bene il concetto di rango. Se con i vettori v e w scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

il fatto che essa ha rango 2 (verificare) ci dice che essi sono linearmente indipendenti. Se ora accostiamo a queste righe anche il vettore u (come terza riga) otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

che ha ancora rango 2, dato che il determinante è nullo. Ora, questo significa che u dipende linearmente da v e w[2] e quindi che u si può scrivere come combinazione lineare di v e w e cioè che sta nel sottospazio da essi generato. La risposta alla domanda è quindi affermativa.[3]

► 8. Lo studente può seguire la risoluzione che porta al sistema lineare (come visto prima).

Ragioniamo invece sul rango. Se con i vettori v e w scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

il fatto che essa ha rango 1 (verificare) ci dice che essi sono linearmente dipendenti. Se ora accostiamo a queste righe anche il vettore u otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Attenzione ora. Questa matrice ha determinante nullo e rango 2 (verificare), esattamente come quella di prima, ma questa volta la conclusione è diversa. Infatti l'annullarsi del determinante è dovuto alla dipendenza tra v e w e quindi non ci dice nulla sulla dipendenza tra u e la coppia v, w. Possiamo osservare che, essendo v e w dipendenti, v da solo genera lo stesso sottospazio di v e w. Inoltre u e v sono indipendenti, dato che il rango di u e v è 2 (verificare): quindi u non dipende da v, cioè non appartiene allo spazio generato da v. La risposta alla domanda è questa volta negativa.

B. Immagine di una trasformazione lineare

► 1. Scriviamo la matrice di rappresentazione della trasformazione T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ricordo che le colonne di A (che sono i trasformati attraverso T dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$) sono generatori dell'immagine di T. In generale non è detto che siano linearmente indipendenti. Se vogliamo trovare una base di $\operatorname{Im} T$ dobbiamo trovarne un sottoinsieme massimo fatto da vettori indipendenti. Ricordo anche che il rango della matrice di rappresentazione coincide con la dimensione dell'immagine di T.

Nel nostro caso le tre colonne sono sicuramente l.d., ma il fatto che il minore ottenuto con le ultime due colonne è diverso da zero ci dice che le ultime due colonne sono l.i. e quindi formano una base di $\operatorname{Im} T$, che ha dimensione 2.[4]

2. Scriviamo la matrice di rappresentazione della trasformazione T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di A generano l'immagine di T e sono certamente dipendenti. Osservando che il rango di A è 1 possiamo dire intanto che la dimensione dell'immagine di T è 1. Per indicare una base basta osservare che una (qualunque) delle colonne di A è un generatore indipendente di $\operatorname{Im} T$, e quindi ne costituisce una base.

3. La matrice di rappresentazione della trasformazione T è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di A generano l'immagine di T. Per vedere se sono dipendenti o indipendenti calcoliamo il determinante di A, che risulta nullo. Pertanto le colonne sono dipendenti e, dato che il rango è 2 grazie ad esempio al minore complementare dell'elemento di posto $(3, 3)$, possiamo dire che l'immagine di T è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e una base di $\operatorname{Im} T$ è formata dalle prime due colonne.[5]

[2] Infatti possiamo dire che i tre vettori sono linearmente dipendenti, ed è certamente u che dipende da v e w, dato che abbiamo appena trovato che v e w sono invece linearmente indipendenti.

[3] In questo caso in realtà non era difficile vedere fin da subito che il vettore u è la somma di v e w e quindi appartiene certamente al sottospazio generato da questi. In generale però potrebbe non essere immediato capire qual è la combinazione lineare.

[4] Si può notare che anche la prima e la terza colonna sono l.i. e che quindi anche queste formano una base di $\operatorname{Im} T$. Non formano invece una base di $\operatorname{Im} T$ le prime due colonne, che sono l.d.

[5] In realtà qualunque scelta di due dei tre vettori porta ad una base, in quanto in questo caso ogni coppia di vettori è linearmente indipendente. Lo si verifichi.

4. La matrice di rappresentazione della trasformazione T è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di A generano l'immagine di T. Il determinante di A è nullo e pertanto le colonne sono dipendenti. Il rango di A è 1, per ovvi motivi. L'immagine di T è quindi un sottospazio di dimensione 1 e una base di $\operatorname{Im} T$ è ad esempio data dalla prima colonna.[6]

C. Sistemi lineari

▶ 1. Sistema quadrato 2×2. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Dopo aver osservato che $\det A = -3$, e quindi che il sistema, per il teorema di Cramer, ha una sola soluzione, utilizzando la regola di Cramer si ottiene

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0, \\ y &= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1. \end{aligned}$$

La soluzione è quindi il vettore $(0, -1)$. A completamento della risposta possiamo dire che il sistema omogeneo associato ha soltanto la soluzione banale (il solo vettore nullo).

2. Sistema quadrato 3×3. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Il determinante di A vale 1 e quindi, per il teorema di Cramer, possiamo dire che il sistema ha una sola soluzione. Con la regola di Cramer otteniamo

$$\begin{aligned} x &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 9, \\ y &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6, \\ z &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Pertanto l'unica soluzione del sistema è il vettore $(9, 6, -4)$.

A completamento della risposta possiamo dire che anche in questo caso il sistema omogeneo associato ha soltanto la soluzione banale.

3. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Il rango di A è 2 (il minore che si ottiene eliminando la prima colonna è diverso da zero). Anche il rango di $A|b$ è quindi 2 (non può essere 3). Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzioni e possiamo già dire che la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 (n.incognite − rango $= 3 - 2 = 1$). Per risolverlo dobbiamo ridurre il

[6] Anche qui una qualunque colonna fornisce una base.

sistema, dato che abbiamo 3 incognite e rango 2. Dobbiamo far diventare parametro un'incognita (attenzione: non possiamo scegliere come parametro z, dato che il minore relativo a x e y è nullo). Coerentemente con la scelta del minore che ci ha permesso di dire che il rango è 2, facciamo diventare parametro x e riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} y + 2z = 2 - x \\ -y - z = 4 + x \end{cases} \qquad \text{con matrice} \qquad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2-x \\ -1 & -1 & 4+x \end{array}\right).$$

Risolvendo con la regola di Cramer (il determinante è 1) abbiamo

$$\begin{aligned} y &= \det\begin{pmatrix} 2-x & 2 \\ 4+x & -1 \end{pmatrix} = -2 + x - 8 - 2x = -x - 10, \\ z &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ -1 & 4+x \end{pmatrix} = 4 + x + 2 - x = 6. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$S = \big\{(x, -x-10, 6) : x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(0, -10, 6) + x(1, -1, 0) : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'ultima scrittura dell'insieme delle soluzioni evidenzia la struttura di questo nei termini del "teorema di struttura". Ricordo che il teorema di struttura delle soluzioni dice che, quando il sistema è possibile e $\overline{x}$ è una sua soluzione particolare, allora l'insieme di tutte le soluzioni è dato da $S = \big\{\overline{x} + y \ : \ Ay = 0\big\}$.

Quindi dalla scrittura ottenuta sopra delle soluzioni ricaviamo che una soluzione particolare è il vettore $\overline{x} = (0, -10, 6)$ e che lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è formato dai vettori del tipo $x(1, -1, 0)$, cioè è generato dal vettore $(1, -1, 0)$ (tale vettore è anche base di questo spazio).

Quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 (si poteva anche trovare subito dalla differenza n.incognite $-$ rango $= 3 - 2 = 1$).

4. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il rango di A è 2 (il minore che si ottiene eliminando le prime due colonne è diverso da zero). Anche il rango di $A|b$ è quindi 2, non potendo essere 3. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzioni e possiamo già dire che la dimensione dello spazio delle soluzioni è 2 (n.incognite $-$ rango $= 4 - 2 = 2$). Per risolverlo dobbiamo ridurre il sistema portando a parametro due incognite. Non possiamo scegliere x_3 e x_4 (il minore relativo a x_1 e x_2 è nullo). Portiamo a parametro x_1 e x_2 e riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 1 + x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{con matrice} \qquad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 + x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & -x_1 + x_2 \end{array}\right).$$

Risolvendo con la regola di Cramer (il determinante è -1) abbiamo

$$\begin{aligned} x_3 &= -\det\begin{pmatrix} 1 + x_1 - x_2 & 2 \\ -x_1 + x_2 & 1 \end{pmatrix} = -(1 + x_1 - x_2 + 2x_1 - 2x_2) = -3x_1 + 3x_2 - 1, \\ x_4 &= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 + x_1 - x_2 \\ 1 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = -(-x_1 + x_2 - 1 - x_1 + x_2) = 2x_1 - 2x_2 + 1. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$\begin{aligned} S &= \big\{(x_1, x_2, -3x_1 + 3x_2 - 1, 2x_1 - 2x_2 + 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(0, 0, -1, 1) + x_1(1, 0, -3, 2) + x_2(0, 1, 3, -2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

La scrittura ottenuta dice che una soluzione particolare è il vettore $\overline{x} = (0, 0, -1, 1)$ e che le soluzioni del sistema omogeneo associato sono i vettori del tipo

$$x_1(1, 0, -3, 2) + x_2(0, 1, 3, -2).$$

I due vettori $(1, 0, -3, 2)$ e $(0, 1, 3, -2)$ sono quindi generatori e base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. È pertanto confermato che lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

5. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Questo è un caso in cui la matrice A non è quadrata ma invece è quadrata la matrice $A|b$. Conviene iniziare dal calcolo del determinante di $A|b$, che risulta nullo.[7] È facile vedere che risulta $rA = r(A|b) = 2$, grazie ad esempio al minore complementare (nella matrice $A|b$) dell'elemento di posto $(3,3)$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni e possiamo già dire che la dimensione dello spazio delle soluzioni è 0 (n.incognite $-$ rango $= 2-2=0$), cioè che il sistema ha una sola soluzione.

Per risolvere il sistema dobbiamo soltanto ridurlo eliminando un'equazione (abbiamo 3 equazioni e rango 2) e, coerentemente con la scelta del minore ottenuto dalle prime due righe, eliminiamo la terza equazione. Il sistema si riduce allora a

$$\begin{cases} -x-2y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \text{con matrice} \qquad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Con la regola di Cramer si ottiene (il determinante è 3)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}, \\ y &= \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

La soluzione è quindi il vettore $(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$. Lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è banale (contiene il solo vettore nullo).

6. Sistema quadrato 3×3. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Il determinante di A è nullo e quindi non è applicabile il teorema di Cramer (possiamo dire che il sistema non ha una sola soluzione, e questo significa che potrebbe non averne o averne più di una). La questione si può risolvere con il teorema di Rouché-Capelli. Il rango di A è 2 (ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(3,3)$ vale -1 e quindi è diverso da zero). Anche il rango di $A|b$ è 2 e lo si vede in quanto le righe di $A|b$ sono dipendenti (la seconda è la somma delle altre due). Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzioni.

Per trovarle dobbiamo ridurre il sistema, dato che abbiamo 3 equazioni, 3 incognite e rango 2. Dobbiamo quindi eliminare un'equazione e far diventare parametro un'incognita. Coerentemente con la scelta del minore usato per calcolare il rango, possiamo eliminare la terza equazione e portare a parametro l'incognita z. Otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x-3y=-1-z \\ x-2y=2-2z \end{cases} \qquad \text{con matrice} \qquad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1-z \\ 1 & -2 & 2-2z \end{array}\right).$$

Risolvendo con la regola di Cramer (il determinante è -1)

$$\begin{aligned} x &= -\det\begin{pmatrix} -1-z & -3 \\ 2-2z & -2 \end{pmatrix} = -(2+2z+6-6z) = 4z-8, \\ y &= -\det\begin{pmatrix} 2 & -1-z \\ 1 & 2-2z \end{pmatrix} = -(4-4z+1+z) = 3z-5. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$S = \big\{(4z-8, 3z-5, z) : z\in\mathbb{R}\big\} = \big\{(-8,-5,0) + z(4,3,1) : z\in\mathbb{R}\big\}.$$

Questa scrittura ci permette di dire che una soluzione particolare del sistema è il vettore $(-8,-5,0)$ e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è generato dal vettore $(4,3,1)$ (che è anche una base di tale spazio). Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1.

[7] Si rifletta che, se il determinante di $A|b$ non fosse nullo, potremmo dire subito che il sistema è impossibile, dato che sarebbe $r(A|b)=3$, mentre $rA \le 2$.

7. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Possiamo osservare che la terza riga (nella matrice $A|b$) è la differenza delle prime due. Quindi il rango di A (e di $A|b$) non è 3. Il rango di A (e di $A|b$) è 2, osservando che ad esempio il minore che si ottiene dalla sottomatrice formata da 1ª e 2ª riga e 3ª e 4ª colonna vale 1. Il sistema allora ha soluzioni e la dimensione dello spazio delle soluzioni è 2 (n.incognite $-$ rango $= 4 - 2 = 2$).

Per trovare le soluzioni dobbiamo ridurre il sistema, dato che abbiamo 3 equazioni, 4 incognite e rango 2. Possiamo eliminare un'equazione e far diventare parametro due incognite. Coerentemente con la scelta del minore usato per calcolare il rango, possiamo eliminare la terza equazione e portare a parametro le incognite x_1 e x_2. Otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 = 1 - x_1 - x_2. \end{cases}$$

Senza utilizzare la regola di Cramer possiamo più velocemente risolvere per sostituzione. Si trova

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 2x_3 - 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_3 = 1 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - 2x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$\begin{aligned} S &= \big\{(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2, 1 - 2x_1 - 2x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(0,0,1,1) + x_1(1,0,-1,-2) + x_2(0,1,-1,-2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

Pertanto una soluzione particolare del sistema è il vettore $(0,0,1,1)$ e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è generato dai vettori $(1,0,-1,-2)$ e $(0,1,-1,-2)$, che sono anche una base di tale spazio.

8. Scriviamo le matrici del sistema:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Questo è un caso in cui è quadrata la matrice $A|b$. Iniziamo dal calcolo del determinante di $A|b$, che risulta nullo (c'è una dipendenza tra le righe di $A|b$: la 1ª è la somma di 3ª e 4ª e la 2ª è la differenza delle stesse). Questo ci permette di dire che il rango di $A|b$ è 2 e così il rango di A (usiamo il minore di ordine 2 in basso a sinistra, cioè ottenuto con 3ª e 4ª riga e 1ª e 2ª colonna). Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni e possiamo dire che la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 (n.incognite $-$ rango $= 3 - 2 = 1$).

Possiamo ridurre il sistema eliminando le prime due equazioni e portando a parametro l'incognita z. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x = 1 + z \\ x + y = -1 \end{cases} \qquad \text{con matrice} \qquad A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 + z \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Qui non serve nemmeno la regola di Cramer, dato che la soluzione è immediata per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 - x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -z - 2. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$S = \big\{(1 + z, -z - 2, z) : z \in \mathbb{R}\big\} = \big\{(1,-2,0) + z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}\big\}.$$

Questa scrittura ci permette di dire che una soluzione particolare del sistema è il vettore $(1,-2,0)$ e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è generato dal vettore $(1,-1,1)$ (che è anche una base di tale spazio).

D. Esercizi aggiuntivi (sistemi lineari omogenei)

▶ 1. La matrice della trasformazione è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo $Ax = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Propongo due possibili modi di procedere per la risoluzione del sistema.

Una prima strada è la risoluzione con il metodo generale, cioè con la riduzione del sistema e con la regola di Cramer. Osservando che il rango è 2 e ci sono 2 equazioni, non ci sono equazioni da eliminare. Invece abbiamo 3 incognite e quindi un'incognita diventa parametro. In questo caso può diventare parametro o la x_1 o la x_2 (non la x_3). Facciamo diventare parametro la x_2. Riscrivo il sistema portando a destra x_2, quindi ottengo

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 \\ -x_1 + 2x_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \text{con matrici} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -x_2 \end{array}\right).$$

Con la regola di Cramer ottengo x_1 e x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ -x_2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2x_2 + x_2) = x_2 \\ x_3 &= \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ -1 & -x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-x_2 + x_2) = 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme

$$\big\{(x_2, x_2, 0) \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x_2(1,1,0) \ : \ x_2 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Pertanto il vettore $(1,1,0)$ è un generatore dello spazio delle soluzioni e, essendo indipendente,[8] forma una base di tale spazio.

Si poteva, alternativamente, risolvere il sistema per sostituzione. Se nel sistema originario ricaviamo ad esempio x_2 dalla prima equazione otteniamo

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e sostituendo nella seconda} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_1 + x_3 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono i vettori del tipo $(x_1, x_1, 0)$, che, a parte il diverso nome del parametro, coincidono con quelli trovati prima.

2. La matrice della trasformazione è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema omogeneo $Ax = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Dato che il rango di A è 1 (le due righe sono proporzionali), possiamo ridurre il sistema eliminando un'equazione (è indifferente quale) e portando a parametro 2 incognite (è indifferente quali). Ricavando ad esempio x_1, ed esprimendo quindi le soluzioni in funzione di x_2, x_3 con $x_1 = 2x_2 + x_3$, si ottiene che le soluzioni si possono scrivere come

$$(2x_2 + x_3, x_2, x_3) = x_2(2,1,0) + x_3(1,0,1) \quad , \text{con } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

I due vettori $(2,1,0)$ e $(1,0,1)$ sono generatori dello spazio delle soluzioni e, essendo linearmente indipendenti (il rango della relativa matrice è 2), essi formano una base di tale spazio.

[8] Ricordo che un solo vettore è indipendente se e solo se non è il vettore nullo.

3. La matrice della trasformazione è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema omogeneo $Ax = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Dato che il rango di A è 2 (il determinante è zero e il minore complementare di a_{33} è diverso da zero), possiamo ridurre il sistema eliminando un'equazione e portando a parametro un'incognita. Se ci riferiamo al minore indicato poco fa, possiamo eliminare la terza equazione e portare a parametro x_3. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3. \end{cases}$$

Le soluzioni sono allora i vettori del tipo

$$(-x_3, -x_3, x_3) = x_3(-1, -1, 1) \quad , \text{con } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Il vettore $(-1, -1, 1)$ è generatore e base dello spazio delle soluzioni, che ha quindi dimensione 1.

4. La matrice della trasformazione è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo il sistema omogeneo $Ax = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Dato che il rango di A è 1 (le tre righe sono a due a due proporzionali), possiamo ridurre il sistema eliminando due equazioni e portando a parametro due incognite. Ad esempio, usando la prima equazione, possiamo scrivere

$$x_1 = -x_2 + x_3$$

e quindi le soluzioni sono i vettori del tipo

$$(-x_2 + x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(1, 0, 1) \quad , \text{con } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

I vettori $(-1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ sono generatori e base dello spazio delle soluzioni, che ha quindi dimensione 2.