Precorso di Matematica

Alberto Peretti

8 settembre 2025

Indice

1 Tipi di numeri

- Numeri **naturali** $\mathbb{N}$.
$$\mathbb{N} = \Big\{1, 2, 3, \dots\Big\}$$
Permettono di dare una risposta ad alcuni problemi, essenzialmente li usiamo per contare.
- Numeri **interi** $\mathbb{Z}$.
$$\mathbb{Z} = \Big\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\Big\} = \Big\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\Big\}$$
Forniscono un "modello" più ampio dei numeri naturali.
- Numeri **razionali** $\mathbb{Q}$.
  - se divido 1 metro in 11 parti uguali, quanti metri misura ogni parte?
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$
  - Rappresentazione decimale di un numero razionale
  - Permettono di dare una risposta a molti problemi, non tutti (esempio)
- Numeri **reali** $\mathbb{R}$. Forniscono un modello "completo".
  - Contengono tutti gli altri numeri, ma ne presentano di nuovi, gli *irrazionali*, che sono quelli "difficili"
  - Loro rappresentazione decimale, punti di una retta; $\sqrt{2} \approx 1.4142135623731$

2 Espressioni algebriche: uso delle lettere

Scritture (espressioni) che coinvolgono "quantità" e le 4 operazioni fondamentali

$$\text{esempio:} \quad \frac{a \cdot b + c}{d - e}$$

Le varie parti di un'espressione vengono anche dette i "termini" dell'espressione stessa
Attenzione alla scrittura!

$$\frac{a \cdot b + c}{d} \text{ ("}a\text{ per } b + c \text{ fratto } d\text{")} \quad \text{e} \quad a \cdot b + \frac{c}{d} \text{ ("}a\text{ per } b + c \text{ fratto } d\text{")}$$

Il simbolo di uguaglianza (=)

$$\frac{a \cdot b + c}{d} = \frac{ab + c}{d} = (ab + c) \div d = (ab + c)/d$$

quindi

$$\frac{a \cdot b + c}{d - e} = (ab + c) \div (d - e) = (ab + c)/(d - e)$$

2.1 Uso delle parentesi

- $a + (b + c) = a + b + c$ le parentesi non servono
- consideriamo $a + b \cdot c$

  non è lo stesso: $1 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$ e $1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$

  le moltiplicazioni (e le divisioni) hanno la precedenza: $a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$

  se voglio "fare prima la +" devo scrivere $(a + b) \cdot c$

  la scrittura di una divisione con la frazione a volte può evitare l'uso delle parentesi, ma attenzione
- quindi

$$a + b \div c - d = a + \frac{b}{c} - d \quad \text{e} \quad \frac{a + b}{c - d} = (a + b) \div (c - d)$$

2.2 Esempi

- $$(a + b) \cdot c = ac + bc$$
- $$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$
- Scrivere con $\div$ e con le parentesi $\dfrac{a + bc}{(a + b)c}$

  Attenzione, $(a + bc) \div (a + b)c$ NON va bene. Perché?

  Riflettere sul caso $x \div y \cdot z$. "$\cdot$" e "$\div$" sono "paritarie": se voglio fare prima il prodotto devo scrivere $x \div (y \cdot z)$. La scrittura con la linea di frazione evita questa difficoltà: con la frazione vediamo subito "chi è sopra e chi è sotto".

3 Trasformazione di un'espressione algebrica

Significa scrivere un'espressione in un modo diverso ma equivalente. Di solito è importante *semplificare* l'espressione, perché, così facendo, posso risolvere un problema associato, che altrimenti non riuscirei a risolvere.
Vediamo alcune classiche trasformazioni basilari e fondamentali.

3.1 denominatore comune

- Facciamo un passo indietro...

$$\frac{7}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

Fare il denominatore comune è l'inverso:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$$

Quindi serve per scrivere la somma/differenza di due o più frazioni come un'unica frazione.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}+\frac{4}{9}=\frac{10}{9}$$

Non è molto diverso dal caso precedente. A volte il denominatore non è il prodotto dei denominatori.

Con le lettere:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c} \quad \text{La spiegazione è} \quad a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Naturalmente

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{yt}=\frac{xt}{yt}+\frac{z}{yt}=\frac{xt+z}{yt}$$

Attenzione!! "classico" errore: semplificare t sopra con t sotto.

3.2 raccogliere a fattore comune

In matematica *fattore* vuol dire termine che *moltiplica* altri termini. È una *quantità moltiplicativa*.
Ci sono anche le *quantità additive*. Si dicono anche *addendi*.
A volte, in un'espressione con somme/differenze, c'è un temine che è un fattore comune a più termini.
Può essere scritto (di solito davanti) a moltiplicare tutto il resto.

Esempio

$$xy+xz=x(y+z) \qquad \text{oppure} \qquad y+xy=y(1+x)$$

Esempio

$$abc+bcde=bc(a+de) \quad \text{("dentro" divido per ciò che ho raccolto)}$$

3.3 moltiplicazione con frazioni

Quando dobbiamo moltiplicare due frazioni si fa

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

(Quindi), se abbiamo

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}. \quad \text{Perché dico "quindi"?}$$

Altri esempi:

- $$x\cdot\frac{1+\frac{1}{x}+x}{1+x} \qquad , \qquad \frac{1}{x}\cdot\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}$$
- $$\frac{1}{x}\cdot y\cdot\frac{1}{z}=\frac{y}{xz}=\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{z}=\frac{y}{x}\cdot z$$
- $$\frac{1}{x}\cdot(y+z)=1\div x\cdot(y+z)=\frac{1\cdot(y+z)}{x}=\frac{y+z}{x}$$

3.4 portare a numeratore/denominatore

A volte è utile fare trasformazioni di questo tipo.

$$\frac{x}{y} = \text{(porto } x \text{ a denominatore) } \frac{1}{y \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\frac{x}{y} = \text{(porto } y \text{ a numeratore) } \frac{x \cdot \frac{1}{y}}{1} \quad (= x \cdot \frac{1}{y})$$

3.5 frazioni di frazioni

Attenzione a queste situazioni:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \quad \text{oppure} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

La prima equivale a

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

e la seconda equivale a

$$a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Quindi, quando c'è più di una linea di frazione, attenzione, devo sapere quella che si chiama *linea di frazione principale.*
Se ho

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \text{vuol dire} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Quindi, se ho

$$\frac{\frac{x+y}{z}}{\frac{z}{t}}, \quad \text{posso semplificare } z\text{? NO, perché è} \quad = \frac{x+y}{z} \cdot \frac{t}{z} = \frac{(x+y)t}{z \cdot z}$$

Va detto che a volte potete trovare scritte le frazioni appena viste con le scritture

$$\frac{a/b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b/c} \quad , \quad \frac{a/b}{c/d} \quad , \quad \frac{(x+y)/z}{z/t}. \quad \text{Non cambia la sostanza.}$$

3.6 moltiplicare/dividere numeratore e denominatore

Un modo per semplificare una frazione è quello di moltiplicare o dividere numeratore e denominatore per una stessa quantità.[1] Ecco alcuni esempi.

- $$\frac{ab+ac}{ax+ay} = \frac{a(b+c)}{a(x+y)} = \frac{b+c}{x+y}$$

- $$\frac{\frac{a}{b}+c}{\frac{c}{b}} = \frac{\frac{a}{b}+c}{\frac{c}{b}} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a+bc}{c} = \frac{a}{c} + b$$

- $$\frac{x/y}{z+x/y} = \frac{x}{yz+x}$$

- Attenzione!

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \quad \text{ma} \quad \frac{x}{y+z} \quad \text{NON è} \quad \frac{x}{y} + \frac{x}{z}$$

[1] Banalmente, possiamo semplificare $\frac{6}{4} = \frac{2}{3}$ dividendo "sopra e sotto" per 2.

4 Potenze

Significato della scrittura x^n ("x elevato alla n" o semplicemente "x alla n").
Se x è un numero reale fissato, si dice *potenza di base x ed esponente naturale n* ($n = 1, 2, 3, \ldots$), il numero

$$x^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}} \quad , \text{ se } n > 1$$

o il numero x stesso, se $n = 1$.

Nel corso vedremo vari casi di potenze, a seconda di che tipo di numero c'è ad esponente. Solo un accenno: dopo aver visto le potenze con esponente *naturale*, il primo passo sono le potenze con esponente *intero*. Dato che gli interi sono i naturali, lo zero e i "naturali negativi", basta definire il significato di

$$x^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{(però bisogna dire con } x \neq 0\text{)}$$

4.1 Proprietà delle potenze

Le potenze hanno alcune classiche proprietà. Come comportarsi quando abbiamo qualcosa del tipo:

$$x^m + x^n \quad , \quad x^m \cdot x^n \quad , \quad \frac{x^m}{x^n} \quad , \quad (x^m)^n$$

Qualunque sia il numero x e qualunque siano i naturali m, n, si ha:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m \cdot n}$

Con $a \neq 0$ e $n > m$, si ha ancora:

3. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Qualunque siano i numeri x e y e il naturale n:

4. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Qualunque siano x e $y \neq 0$, qualunque sia n, si ha infine:

5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.

Fondamentale: abituatevi a saper utilizzare queste regole "nei due versi": tutte le identità qui sopra possono essere utilizzate da sinistra a destra o da destra a sinistra.

Esempio curioso.

$$10^{100} \quad \text{(googol)} \quad = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{100 \text{ volte}}$$

cioè

1 seguito da 100 zeri... 1 metro per scriverlo

Consideriamo ora

$$10^{\text{googol}} = 10^{10^{100}} \quad \text{(googolplex)} \quad = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{10^{100} \text{ volte}}$$

cioè

1 seguito da 10^{100} zeri... Esercizio: quanti metri ci vogliono per scriverlo?

Facile, 10^{98} metri, cioè 10^{95} Km, ma... quanti sono?[2]

[2] Quanti Km sono 1 anno luce?

$$3 \cdot 10^5 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \approx 9 \cdot 10^{12} \text{ Km.}$$

Il "diametro" dell'universo è stimato in 90 miliardi di a.l. Quindi circa

$$9 \cdot 10^{12} \cdot 9 \cdot 10^{10} = 81 \cdot 10^{21} \text{ Km.}$$

Quindi per scrivere un googolplex non basta l'universo, e di parecchio!

5 Polinomi

Si chiama **monomio** (nella variabile x) un'espressione del tipo "un numero $\times$ una potenza di x".
Esempi di monomi

$$2x^3 \quad , \quad -3x^2 \quad , \quad 5x \quad , \quad -2$$

Si dice **grado del monomio** l'esponente della potenza del monomio stesso.

Si chiama **polinomio** (nella variabile x) una somma/differenza di monomi in x.
Esempio di polinomio

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 2. \quad \text{Scriviamo anche} \quad P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

Si dice **grado del polimonomio** il grado massimo dei suoi monomi.

Esercizio: (attenzione) che grado ha la somma di due polinomi? che grado ha il prodotto di due polinomi?

5.1 Prodotti e potenze notevoli

Si hanno i seguenti *prodotti e potenze notevoli*:

$$\begin{aligned}
(A+B)(A-B) &= A^2 - B^2 \\
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
(A+B+C)^2 &= A^2 + 2AB + 2AC + B^2 + 2BC + C^2.
\end{aligned}$$

Attenzione a saper leggere nei due versi.
Esercizi. Calcolare

(i) $(1+x)(2-x+x^2)$ (ii) $(2x-3)(2x+3)$ (iii) $(1-2z)^2$

(iv) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2$ (v) $(1-x+x^2)^2$ (vi) $(1-2t^2)(1+2t^2)$

5.2 Scomposizione di polinomi

Significa scrivere il polinomio come *prodotto* di polinomi.
A volte è facile:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x = x(2x^2 - 3x + 5)$$

A volte non lo si fa fino in fondo:

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x(x^3 + 2x^2 - 5x). \quad \text{Meglio} \quad \ldots = x^2(x^2 + 2x - 5). \quad (= \ldots ??)$$

A volte è impossibile... Vedremo più avanti.

Esercizi.

Raccoglimento semplice.

(i) $6x^2y - 2xy^2 + 4xyz$ (ii) $a(3x-y) + 2b(3x-y)$

Differenza di quadrati.

(i) $x^2 - 25$ (ii) $9x^2 - 16y^2$

Scomposizioni in sequenza.

(i) $3y^3 - 12y$ (ii) $a^4 - 16b^4$

Quadrato di un binomio.

(i) $x^2 - 8x + 16$ (ii) $4a^2 + 4a + 1$

(iii) $\frac{1}{2}x^3 - 3x^2y + \frac{9}{2}xy^2$

Trinomi particolari. Osservare che: $x^2 + (m+n)x + m \cdot n = (x+m)(x+n)$

(i) $x^2 + 4x + 3$ (ii) $x^2 - 7x + 12$

(iii) $x^2 + 4x - 5$ (iv) non funziona sempre... $x^2 + 4x - 6$

Doppio raccoglimento.

(i) $2x - 2y - x^2 + xy$ (ii) $3ab^2 + 6b - 2a^2b - 4a$

(iii) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{3}x + y$

Raccoglimenti misti.

(i) $x^2 + 2x + 1 - y^2$ (ii) $4a^2 - b^2 + 6b - 9$

(iii) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ (iv) $9a^2 - 4x^2 + 4x - 1$

6 Risoluzione di qualche tipologia di equazioni

Le equazioni sono scritture del tipo

$$A(x) = B(x), \text{ dove } A(x) \text{ e } B(x) \text{ sono espressioni nella variabile } x.$$

$A(x)$ si chiama il primo membro, $B(x)$ il secondo membro.
Sottintendono un problema: trovare per quali valori di x le due espressioni sono uguali, cioè hanno lo stesso valore.
Risolvere l'equazione significa trovare tutti questi valori.

Le equazioni più semplici sono *alcuni casi* di equazioni polinomiali. Ma attenzione! Non tutte le equazioni polinomiali sono semplici. Da che cosa dipende la semplicità dell'equazione? Dal grado dei polinomi.

6.1 Equazioni (polinomiali) di 1° grado

Sono equazioni del tipo

$$A(x) = B(x), \text{ dove } A(x) \text{ e } B(x) \text{ sono polinomi di } 1^\circ \text{ grado nella variabile } x,$$

ad esempio

$$2x - 1 = 3 + 4x.$$

Si risolvono trasformando l'equazione in una equazione *equivalente* la cui soluzione è ovvia.

$$2x - 1 = 3 + 4x \quad ; \quad 2x - 4x = 3 + 1 \quad ; \quad -2x = 4 \quad ; \quad x = -2. \quad \text{Ma anche...}$$

Diciamo che in generale possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$ax + b = 0, \text{ da cui, se } a \neq 0, \text{ si ricava la soluzione } x = -\frac{b}{a}.$$

Osservazione Nella forma generale, deve essere chiaro che le lettere hanno significati diversi: a e b devono essere intesi come numeri fissati (parametri), x invece no, è *variabile*, cioè può assumere valori diversi, e si cerca il valore di x per cui i due membri sono uguali.
Potremmo intendere che la variabile è a, e la soluzione sarebbe $a = \frac{b}{x}$.
La convenzione è che i parametri sono le lettere "basse", la variabili quelle "alte".

Banalmente, l'equazione può essere *impossibile* (non ha soluzione):

$$3x + 5 = 1 + 3x \quad ; \quad 0 = -4, \text{ che è falso.}$$

6.2 Equazioni (polinomiali) di 2° grado

L'equazione di 2° grado ha come forma generale

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ dove } a, b, c \text{ sono numeri fissati e } a \neq 0.$$

Queste equazioni possono avere due, una o nessuna soluzione. C'è una formula generale per trovare le (eventuali) soluzioni, la cosiddetta *formula risolutiva delle equazoini di 2° grado.*

Consideriamo prima i seguenti casi particolari (ricordare che $a \neq 0$):

(i) $b = c = 0$. L'equazione diventa

$$ax^2 = 0,$$

e questa ha ovviamente per soluzione soltanto $x = 0$.[3]

(ii) $b \neq 0$, $c = 0$. L'equazione diventa:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Scomponendo in fattori il primo membro, si può scrivere

$$x(ax + b) = 0.$$

La legge dell'annullamento del prodotto dà le soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$.

(iii) $b = 0$, $c \neq 0$. L'equazione diventa

$$ax^2 + c = 0.$$

Se i coefficienti a, c sono *concordi* l'equazione risulta impossibile. Se invece a, c sono *discordi*, le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = \sqrt{-c/a}$, $x_2 = -\sqrt{-c/a}$.

In pratica, in questo caso, il procedimento risolutivo, è semplicemente il seguente: da $ax^2 + c = 0$ si ricava $x^2 = -c/a$ e, successivamente, se $-c/a > 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$.

(iv) Esaminiamo infine il caso $b \neq 0$, $c \neq 0$, cioè quella che viene detta equazione completa

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

La formula risolutiva è

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

però occorre anche qui considerare alcuni casi.

- se $b^2 - 4ac < 0$, non si ha nessuna soluzione. Perché?
- se $b^2 - 4ac = 0$, si ha una sola soluzione $x = -\frac{b}{2a}$;
- se $b^2 - 4ac > 0$, si hanno le due soluzioni che la formula fornisce.

6.2.1 Un breve richiamo sulla radice di un numero reale

Significato della scrittura $\sqrt{2}$ (*radice quadrata di* 2).
È quel numero **positivo** che elevato al quadrato mi dà 2. Quindi $\sqrt{4} = 2$.
Con la stessa logica si definisce la *radice n-esima* di un numero reale a

$\sqrt[n]{a}$ = quel numero **positivo** che elevato alla n mi dà a. Pertanto $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

A volte la radice è un numero "semplice", a volte è un numero "difficile".

$$\sqrt[3]{8} \qquad , \qquad \sqrt{3}$$

[3]Il motivo è la cosiddetta *legge dell'annullamento del prodotto*. È una proprietà valida nei numeri reali. Dice che se il prodotto di due numeri è zero allora deve necessariamente essere zero uno dei due numeri. La cosa può sembrare banale e siamo abituati a darla per scontata. Ci sono però strutture algebriche in cui questa legge non vale e ne vedremo una durante il corso.

Esempi

$$2-3x=3-2x \qquad , \qquad \frac{1}{2}x+1=\frac{2}{3}x-1$$

Se si pensa che per tutte le equazioni ci sia modo di risolverle si sbaglia. Con le equazioni polinomiali, che sono le più semplici, basta considerare quelle di 3° grado e la difficoltà aumenta parecchio. Con quelle di 4° grado ancora di più e poi si può dimostrare che dal 5° grado in su non esiste alcun metodo di risoluzione.

Esempio (piccola anticipazione) Consideriamo l'equazione

$$\frac{1}{x}+x=1.$$

Attenzione,

(i) non è un'equazione polinomiale

(ii) poi dobbiamo dire che x (la soluzione) non può essere zero

(iii) con questa condizione, possiamo fare un denominatore comune

$$\frac{1}{x}+x-1=0 \quad , \quad \frac{1+x^2-x}{x}=0$$

e ora (**regola generale**), se vogliamo che una frazione sia zero, la condizione equivalente è che il **numeratore** sia zero.

Pertanto, con la condizione $x \neq 0$, l'equazione data equivale alla

$$1+x^2-x=0 \text{ (equazione di 2° grado), cioè } x^2-x+1=0,$$

che sappiamo come afffrontare.

L'esempio mostra come si affrontano di solito le equazioni "nuove" (che vedremo nel corso): si cerca di ricondurle a quelle che sappiamo risolvere, cioè quelle di 1° o 2° grado.

Come semplice ultimo esempio consideriamo l'equazione

$$x^3+x^2-x=0 \text{ (equazione polinomiale di 3° grado).}$$

Questa, pur essendo una di quelle potenzialmente difficili, in realtà è facile in quanto si può fare il raccoglimento

$$x(x^2+x-1)=0$$

e quindi, per la legge di annullamento del prodotto, equivale a

$$x=0 \qquad \text{oppure} \qquad x^2+x-1=0.$$

Quindi, oltre alla soluzione nulla (che qui è accettabile), abbiamo le possibili soluzioni della seconda equazione, di 2° grado:

$$x=\frac{-1\mp\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato tre soluzioni:

$$x=0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

7 Risoluzione di qualche tipologia di disequazioni

Le equazioni sono scritture del tipo

$$A(x) > B(x) \quad , \quad A(x) < B(x) \quad , \quad A(x) \geq B(x) \quad , \quad A(x) \leq B(x),$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni nella variabile x.
Anche per le disequazioni il problema è trovare per quali valori di x le due espressioni rispettano la condizione indicata. Disequazioni "strette" e disequazioni "larghe".

Come per le equazioni vediamo qui soltanto un paio di casi basilari, le disequazioni di 1° e di 2° grado. Durante il corso vedremo altri tipi di disequazioni.

7.1 Disequazioni di 1° grado

Sono quelle che, con passaggi analoghi a quelli delle equazioni di 1° grado si possono trasformare in

$$ax + b > 0 \quad , \quad ax + b < 0 \quad , \quad ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b \leq 0,$$

con le solite considerazioni su quali sono parametri e variabile. Ad esempio

$$-2x + 1 < 0.$$

Come si risolve (modi possibili):

- $$-2x + 1 < 0 \quad ; \quad (1 < 2x) \quad ; \quad 2x > 1 \quad ; \quad x > \frac{1}{2}$$
- $$-2x + 1 < 0 \quad ; \quad -2x < -1 \quad ; \quad x > \frac{1}{2}$$

Regole generali per le disequazioni:

(i) si "porta a sinistra e a destra" come con le equazioni

(ii) (novità) se moltiplico/divido tutto per un numero *negativo* devo cambiare il *verso* della disequazione

7.2 Disequazioni di 2° grado

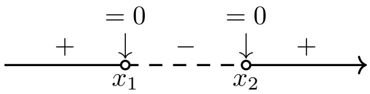
Le disequazioni di 2° grado hanno come forma generale

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0, \text{ dove } a, b, c \text{ sono numeri fissati e } a \neq 0.$$

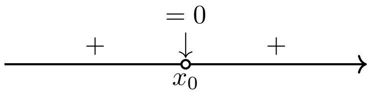
Ricetta per la risoluzione della disequazione:

(i) si fa in modo di avere a *positivo*

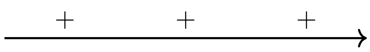
(ii) si ricordano queste "regole" che forniscono il **segno** del polinomio $ax^2 + bx + c$:



se ci sono 2 soluzioni



se c'è una sola soluzione



se non ci sono soluzioni

8 Un pizzico di... logaritmi

Problema. Sostituire ai puntini:

$$2^{\overset{?}{\cdots}} = 8 \qquad , \qquad 2^{\overset{?}{\cdots}} = 1 \qquad , \qquad 2^{\overset{?}{\cdots}} = \frac{1}{4} \qquad , \qquad \left(2^{\overset{?}{\cdots}} = \sqrt{2}\right)$$

Quello che abbiamo trovato si chiama **logaritmo**.
Significato di

$$\log_b a \qquad \text{, che si legge “logaritmo in base } b \text{ di } a\text{”.}$$

Indica l'*esponente* che devo dare alla *base* b per ottenere l'*argomento* a. Quindi

$$b^{\log_b a} = a$$

Chi è il

$$\log_b(b^a)\ ? \qquad \text{Ovvio, è } a.$$

I logaritmi, con le loro proprietà, hanno varie applicazioni. Un proprietà (ne vedremo altre) è questa:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y.$$

Trasformano quindi relazioni *moltiplicative* in relazioni *additive*. Per questo motivo, ad esempio, servono per le cosiddette “scale logaritmiche”: dati legati tra loro da relazioni moltiplicative, se rappresentati in scala logaritmica, diventano dati legati da relazioni additive.

Per vedere i logaritmi in tutta la loro estensione servono le potenze in tutti i casi possibili, cioè con esponenti di qualunque natura, non solo esponenti naturali o interi.

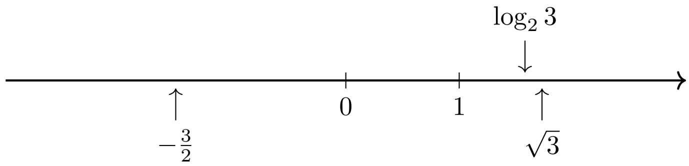
$$\log_2 8 = 3, \text{ in quanto } 2^3 = 8, \text{ ma chi è il } \log_2 3\text{?? È un numero “difficile”.}$$

Qualche altro esercizio.

$$\log_{10} 100 \qquad , \qquad \log_2 128 \qquad , \qquad \log_{1/3} 9 \qquad , \qquad \log_{1/2} \frac{1}{8}$$

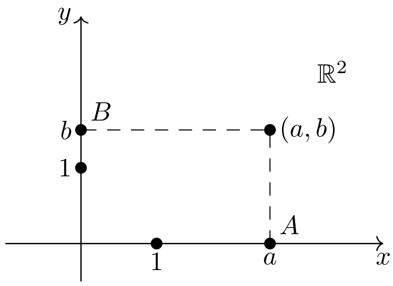
9 Rappresentazione nel piano cartesiano

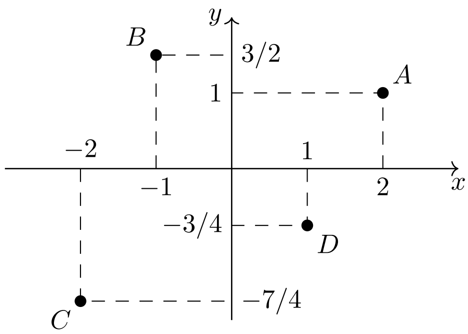
Parliamo ora di rappresentazione geometrica dei numeri.
I numeri reali (e quindi anche i naturali, gli interi, i razionali) si possono rappresentare su di una retta. Per convenzione si disegna questa retta in orizzontale, con orientamento da sinistra a destra.



Reali *positivi*, reali *negativi*,...

Spesso è importante rappresentare **coppie** di numeri reali. Le indichiamo con (x, y), dove x e y sono appunto numeri reali.
Per rappresentare le coppie di numeri reali usiamo il piano (*piano cartesiano*, come retta cartesiana è quella di prima).





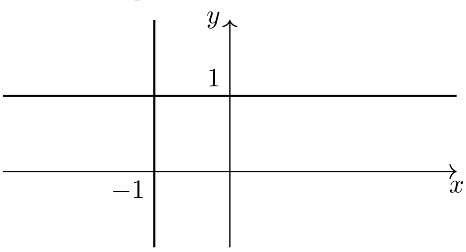
Abbiamo ora due assi cartesiani, uno orizzontale (asse delle *ascisse*, o delle x) e l'altro verticale (asse delle *ordinate*, o delle y), facendo riferimento alla coppia (x, y). Quindi attenzione al significato di questo (prima e seconda *componente* della coppia)! Per convenzione (e convenienza) le due rette sono perpendicolari e fissiamo la stessa unità di misura sui due assi.
Nella figura a destra sono rappresentati i punti

$$A = (2, 2) \quad , \quad B = (-1, \tfrac{3}{2}) \quad , \quad C = (-2, -\tfrac{7}{4}) \quad , \quad D = (1, -\tfrac{3}{4})$$

L'*origine* e i quattro *quadranti*.

9.1 Equazioni e piano cartesiano

Ora, se abbiamo ad esempio una retta nel piano cartesiano, vogliamo trovare un modo per scriverla in forma *algebrica*, non geometrica.
Facile esempio:



Le due rette possono essere scritte attraverso le due equazioni

$$x = -1 \quad \text{(quella verticale)} \quad \text{e} \quad y = 1 \quad \text{(quella orizzontale)}.$$

Quindi l'idea è che ci sia una relazione tra le curve nel piano (oggetti geometrici) e le equazioni (oggetti algebrici). Detto in termini più precisi, l'idea è che i punti della curva siano le soluzioni dell'equazione.
Si tratta della *geometria analitica*.

Ma, quali equazioni? Quelle in x, y, cioè quelle in *due* variabili, non quelle che abbiamo visto prima. Riflettiamo su questo aspetto: le equazioni in una variabile hanno per soluzione qualcosa del tipo $x = \ldots$, soluzioni che possiamo rappresemntare sulla retta. Le equaizoni in due variabili hanno per soluzione qualcosa del tipo $(x, y) = \ldots$, e le possiamo rappresentare sul piano.

Qui mi limito a presentare il caso delle rette. Durante il corso vedremo poi curve più complicate. Una cosa che si intuisce facilmente è questa: curve semplici sono associate a equazioni semplici e curve complicate sono associate a equazioni complicate. Le rette sono curve semplici.

9.2 Rette

Le equazioni di 1° grado in due variabili (x e y) sono quelle che si possono scrivere nella forma

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad \text{con } a, b, c \text{ numeri reali fissati, } a, b \text{ non entrambi nulli.}$$

Fondamentale capire questo: le soluzioni di questa equazione sono tutte le coppie (x, y) che soddisfano l'equazione (cioè le coppie (x, y) per cui $ax + by + c = 0$). Quante sono? Facile, infinite!

Cominciamo con alcuni casi particolari.

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora possiamo riscrivere l'equazione nella forma

  $$y = -\frac{c}{b}$$

  e quindi le soluzioni della nostra equazione sono tutte le coppie in cui la seconda componente vale appunto $-\frac{c}{b}$. Si tratta quindi di tutte le coppie del tipo $(x, -\frac{c}{b})$, dove x può essere un numero reale qualunque. La rappresentazione sul piano di tale insieme è la retta di ordinata $-\frac{c}{b}$, quindi una retta orizzontale.

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, allora riscriviamo l'equazione nella forma

  $$x = -\frac{c}{a};$$

  le soluzioni sono le coppie di prima componente $-\frac{c}{a}$, cioè delle coppie del tipo $(-\frac{c}{a}, y)$, dove y può essere un numero reale qualunque. Quindi la rappresentazione sul piano di tale insieme è la retta di ascissa $-\frac{c}{a}$, cioè una retta verticale.

Se invece $a \neq 0$ e $b \neq 0$, abbiamo il caso generale.
Si può verificare facilmente che la rappresentazione dell'insieme di soluzioni dell'equazione in questo caso è ancora una retta, questa volta "obliqua".
Pertanto le equazioni di primo grado definiscono (individuano) rette. Vedremo subito che vale anche il viceversa.

Osservazioni Ricordiamo che, data l'equazione nel caso generale $ax + by + c = 0$, è possibile riscrivere l'equazione nelle due forme (equivalenti)

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}.$$

Solitamente si preferisce la prima forma in quanto "esprime esplicitamente y in funzione di x" (cioè l'ordinata in funzione dell'ascissa), e per pura questione di abitudine preferiamo fare questo piuttosto che il contrario. Ma tra breve impareremo a fare altrettanto naturalmente anche la rappresentazione di x in funzione di y.
La scrittura esplicita di y in funzione di x nel caso dell'equazione di primo grado si può quindi dare nella forma

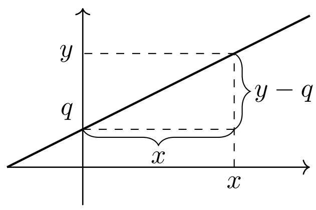
$$y = mx + q$$

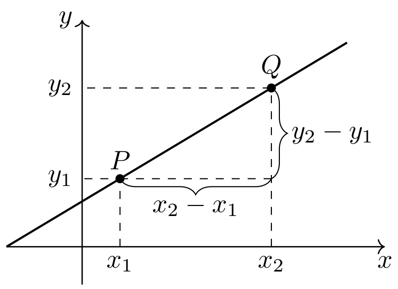
(ovviamente basta porre $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$). Importante è l'interpretazione geometrica dei due parametri m e q:

- ▷ q (più facile e meno importante) è legato alla posizione del punto di intersezione della retta con l'asse y (si dice l'*ordinata o altezza all'origine* della retta): se $q = 0$ la retta incontra l'asse y nell'origine, se $q > 0$ tale punto di intersezione sta al di sopra dell'origine, se $q < 0$ tale punto sta al di sotto dell'origine. Tanto più grande è il valore di q, tanto più lontano dall'origine la retta incontra l'asse y.
- ▷ m (fondamentale) è detto *coefficiente angolare* della retta ed è legato all'angolo (da cui l'aggettivo "angolare") che la retta forma con l'asse x, ossia alla *pendenza* della retta: se $m > 0$ la retta è "bassa a sinistra e alta a destra", mentre se $m < 0$ accade il contrario (non può essere in questo caso $m = 0$ perché $a \neq 0$).

  Inoltre tanto più è grande il valore di m, tanto più pendente (ripida) è la retta.

Si osservi anche che la forma esplicita ($y = mx + q$) non si può ottenere se $b = 0$. Abbiamo visto prima che si tratta in questo caso di una retta verticale: e infatti c'è qualche problema nel definire la pendenza di tali rette.
Cerchiamo di capire perché m ha il significato che è stato detto. Possiamo anzitutto osservare che dall'equazione $y = mx + q$ possiamo ricavare, se $x \neq 0$, che $m = \frac{y-q}{x}$. Aiutandoci con la figura qui a fianco, vediamo allora che questo quoziente altro non è che il rapporto tra la variazione delle ordinate sulla retta e la variazione delle ascisse corrispondenti nel passare dal punto di ascissa zero al punto di ascissa x.





Più in generale (figura a sinistra), è il rapporto tra la variazione delle ordinate e la variazione delle ascisse nel passaggio da un qualunque punto P sulla retta ad un altro punto Q sulla retta.
Detto in termini più immediati: è questo rapporto:

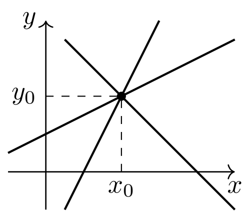
$$\frac{\text{di quanto mi alzo lungo la retta}}{\text{di quanto mi sposto sulle } x}$$

Si capisce facilmente che il risultato è quello che intendiamo con pendenza della retta.

9.3 Rette passanti per un punto assegnato

Per un punto assegnato (x_0, y_0) passano ovviamente infinite rette. Ora che sappiamo il significato del parametro m, possiamo facilmente scrivere l'equazione di queste rette. Non è difficile capire che l'equazione è

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$ [4]



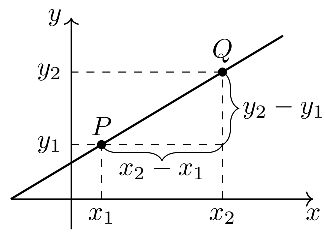
Osservazione In realtà l'equazione scritta dà tutte le rette passanti per (x_0, y_0), ad eccezione di quella verticale, che ha equazione $x = x_0$.
Dovrebbe ora essere chiaro che possiamo determinare anche il parametro m se abbiamo un'informazione in più, che potrebbe essere o la conoscenza diretta della pendenza oppure il passaggio per un altro punto del piano.

Esempio Scrivere l'equazione delle rette passanti per il punto $(-1, 2)$.
Senza molti commenti, si tratta dell'equazione $y - 2 = m(x + 1)$.

[4] Ci si arriva o pensando che è $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, oppure pensando che il punto (x_0, y_0) è soluzione dell'equazione (entrambi i membri sono nulli) e si tratta certamente dell'equazione di una retta di pendenza m. Tutte le condizioni sono dunque rispettate.

9.4 Rette passanti per due punti assegnati

Supponiamo che i due punti siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2). La condizione di passaggio per il primo punto porta a scrivere l'equazione



$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

ma sappiamo anche che $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Quindi si trova

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Osservazione Anche qui l'equazione scritta esclude un caso possibile: infatti vale solo se $x_1 \neq x_2$. Nel caso si abbia $x_1 = x_2$, cioè punti con la stessa ascissa, la retta è ovviamente verticale e la sua equazione è $x = x_1$ (o $x = x_2$).

9.5 Rette parallele e rette perpendicolari

Vediamo ora due semplici questioni, legate sempre ai coefficienti angolari delle rette: in particolare parliamo di rette parallele e rette perpendicolari.

- *Rette parallele* in forma esplicita hanno lo stesso coefficiente angolare.

  Vediamo un'applicazione di questo fatto in un semplice esercizio: scrivere l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e passante per il punto $(3, 2)$. Scriviamo la retta in forma esplicita: $y = 2x + 1$. La retta parallela avrà allora equazione esplicita del tipo $y = 2x + q$. Imponendo il passaggio per il punto $(3, 2)$ si deve avere $2 = 2 \cdot 3 + q$, da cui $q = -4$. L'equazione cercata è quindi $y = 2x - 4$. Si poteva anche osservare direttamente che si tratta della retta di pendenza 2 passante per il punto $(3, 2)$ e quindi è la retta di equazione $y - 2 = 2(x - 3)$.

- *Rette perpendicolari* in forma esplicita hanno coefficienti angolari m e m' legati dalla relazione $mm' = -1$ (da cui $m' = -1/m$).

  Vediamo anche qui un'applicazione in un esercizio: scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e passante per il punto $(3, 2)$. La retta in forma esplicita è $y = 2x + 1$. La retta perpendicolare avrà equazione esplicita del tipo $y = -\frac{1}{2}x + q$. Imponendo il passaggio per il punto $(3, 2)$ si deve avere $2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + q$, da cui $q = \frac{7}{2}$. L'equazione cercata è quindi $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Osservazione Se è abbastanza naturale capire che rette parallele hanno la stessa pendenza, non è forse altrettanto naturale capire la relazione che lega le pendenze di due rette perpendicolari, a parte forse il fatto che se uno dei coefficienti angolari è positivo, l'altro deve essere negativo.

Esempi Per il momento abbiamo visto che le equazioni di primo grado individuano nel piano delle rette. Ci si chiede a questo punto se vale anche il viceversa, se cioè ogni retta del piano sia l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado. La risposta è affermativa, ma la corrispondenza tra equazioni di primo grado e rette *non* è biunivoca, come si potrebbe inizialmente pensare: un'equazione individua una sola retta, ma la stessa retta è soluzione di molte (infinite) equazioni. Questo è naturale, dato che una certa equazione ne ha infinite altre equivalenti ad essa. Ad esempio le due equazioni

$$x - 2y + 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad -2x + 4y - 6 = 0$$

sono equivalenti, cioè hanno lo stesso insieme di soluzioni e cioè individuano la stessa retta.[5]

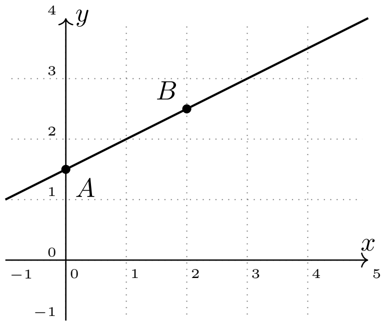
Sono utili due tipi di esercizi: data un'equazione, disegnare la retta che rappresenta le sue soluzioni e, data una retta nel piano, trovare un'equazione che la individui.
Vediamo il tutto su di un esempio. Consideriamo l'equazione di prima, $x - 2y + 3 = 0$. Vogliamo disegnare la retta corrispondente.

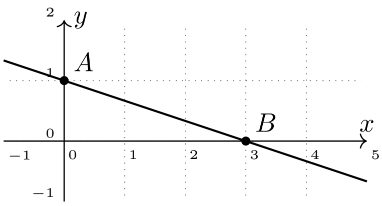
[5]La seconda si ottiene dalla prima moltiplicando ambo i membri per -2.

Si può fare ad esempio così: scriviamo l'equazione nella forma esplicita

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Sappiamo ora che $m = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$. Quindi la retta nell'origine "è alta" $\frac{3}{2}$ (passa per il punto A in figura) e ha pendenza $\frac{1}{2}$, cioè se mi sposto di 2 sulle x mi alzo di 1 sulle y (passa per il punto B in figura).



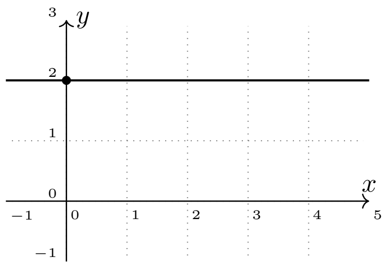


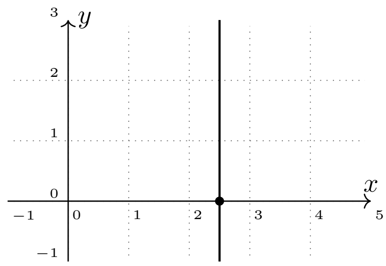
Viceversa, se abbiamo la retta raffigurata qui a sinistra e vogliamo trovarne un'equazione, basta intanto trovare due punti che stanno sulla retta, qui ad esempio $A = (0, 1)$ e $B = (3, 0)$. Usando l'equazione della retta per due punti e sostituendo le coordinate si ha

$$y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 0), \text{ cioè } y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

Ma anche, ancora più direttamente, si ricava subito dalla figura che $q = 1$ e $m = -\frac{1}{3}$. Da questa, volendo, si può trovare un'equazione generale, ad esempio $x + 3y - 3 = 0$.

È chiaro che se la retta data è orizzontale o verticale è molto più semplice trovarne l'equazione. Ad esempio, con le due rette raffigurate qui sotto





è immediato che le due equazioni sono (rispettivamente) $y = 2$ e $x = 5/2$.

9.6 Disequazioni nel piano

Un'abilità importante, da acquisire durante il corso, è il saper gestire disequazioni nel piano. Facciamo solo un breve accenno, con riferimento alle rette. Possiamo trovarci in queste situazioni:

$$ax + by + c > 0 \quad , \quad ax + by + c < 0 \quad , \quad ax + by + c \geq 0 \quad , \quad ax + by + c \leq 0.$$

La cosa più semplice da fare è ricavare la y, se possibile, cioè se $b \neq 0$. Fatto questo, ci troviamo in uno dei casi (attenzione al cambio di verso, quando necessario)

$$y > mx + q \quad , \quad y < mx + q \quad , \quad y \geq mx + q \quad , \quad y \leq mx + q.$$

Non è difficile intuire che la regione individuata da ciascuna di queste disequazioni è un *semipiano*, dato che disuguaglianze del tipo

$$y > \ldots \quad \text{oppure} \quad y \geq \ldots$$

significano "al di sopra della retta" e disuguaglianze del tipo

$$y < \ldots \quad \text{oppure} \quad y \leq \ldots$$

significano "al di sotto della retta", con la particolarità che, se la disuguaglianza è del tipo

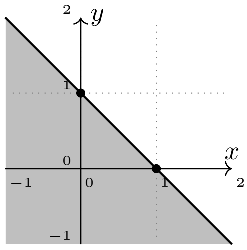
$$y > \ldots \quad \text{oppure} \quad y < \ldots \qquad \text{(disuguaglianza } \textit{stretta}\text{)}$$

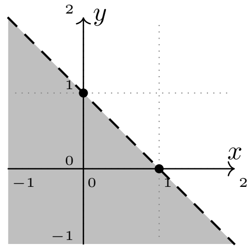
l'insieme delle soluzioni non contiene la retta, mentre, se la disuguaglianza è del tipo

$$y \geq \ldots \quad \text{oppure} \quad y \leq \ldots \qquad \text{(disuguaglianza } \textit{larga}\text{)}$$

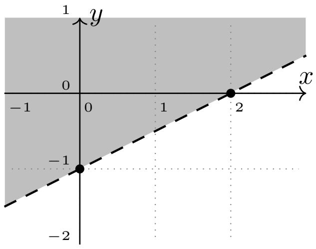
l'insieme contiene la retta.

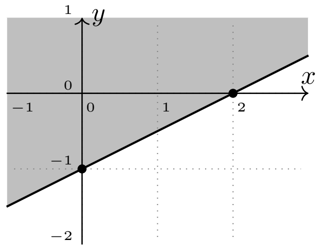
Esempi
Consideriamo la disequazione
$$x + y - 1 \leq 0.$$
Esplicitiamo la y, scrivendo
$$y \leq -x + 1.$$
L'equazione corrispondente ($y = -x + 1$) individua la retta di pendenza $m = -1$, passante per il punto $(0, 1)$. La disequazione ha quindi come soluzioni tutti i punti del piano che stanno al di sotto della retta, compresa la retta stessa. L'insieme è rappresentato nella figura qui sotto a sinistra in grigio. Di solito, per indicare che i punti della retta fanno parte dell'insieme, si usa per la retta un tratto continuo.
Se la disequazione fossa stata $x + y - 1 < 0$, avremmo avuto ovviamente solo i punti strettamante al di sotto della retta e in questo caso si usa per la retta un tratteggio, come nella figura qui sotto a destra.



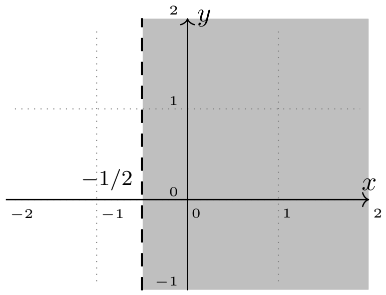


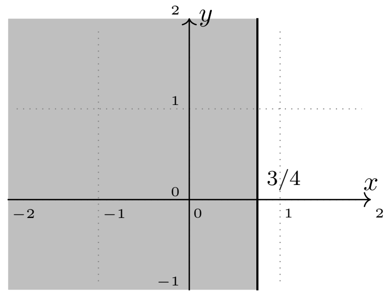
Consideriamo la disequazione
$$x - 2y - 2 < 0.$$
Esplicitando la y otteniamo
$$2y > x - 2 \quad \text{cioè} \quad y > \frac{1}{2}x - 1.$$
L'equazione corrispondente ($y = \frac{1}{2}x - 1$) individua la retta di pendenza $m = \frac{1}{2}$, passante per il punto $(0, -1)$. La disequazione ha quindi come soluzioni tutti i punti del piano che stanno al di sopra della retta, esclusa la retta stessa. L'insieme è rappresentato nella figura qui sotto a sinistra in grigio. La retta è tratteggiata.
Se la disequazione fossa stata $x - 2y - 2 \leq 0$, avremmo avuto come soluzioni anche i punti sulla retta e quindi avremmo usato un tratto continuo per disegnare la retta, come nella figura qui sotto a destra.





Resta solo da considerare il caso in cui sia impossibile ricavare la y dalla disequazione. Questo si ha quando $b = 0$, cioè la disequazione è del tipo
$$ax + c > 0 \quad , \quad ax + c < 0 \quad , \quad ax + c \geq 0 \quad , \quad ax + c \leq 0.$$
Ma allora la nostra disequazione si può scrivere come
$$x \gtreqless -\frac{c}{a}$$
e pertanto la regione in questi casi è sempre un semipiano, ma con "bordo" verticale. Ad esempio, con le disequazioni
$$2x + 1 > 0 \qquad \text{oppure} \qquad 4x - 3 \leq 0$$
si ha rispettivamente
$$x > -\frac{1}{2} \qquad \text{oppure} \qquad x \leq \frac{3}{4}$$
e quindi i due insiemi rispettivamente a sinistra e a destra in grigio qui sotto.





10 Un po' di terminologia

espressione significa una scrittura di carattere matematico, che di solito coinvolge lettere, ma non necessariamente

quantità, termine vengono usati, indifferentemente, per indicare una certa parte di un'espressione

fattore anche fattore moltiplicativo, è, in un'espressione, una quantità che ne moltiplica altre

addendo addendo è invece una quantità additiva, cioè che si somma (o si sottrae) ad altre

reciproco il reciproco di una certa quantità x è $\frac{1}{x}$; esiste solo se $x \neq 0$; a volte si confonde con "*inverso*", che ha però un significato molto più ampio

primo e secondo membro in una equazione (disequazione) 1° membro è quello che c'è a sinistra dell'$=$ ($\gtreqless$); 2° membro è quello che c'è a destra dell'$=$ ($\gtreqless$)

raccogliere in una espressione significa prendere una certa quantità e fare in modo che questa moltiplichi il resto, ma senza cambiare il valore dell'espressione

argomento termine usato in presenza di particolari scritture, per indicare una parte dell'espressione stessa alla quale viene applicata una certa "funzione". Ad esempio

in $\sqrt{x}$, x è l'argomento della radice ; in $\log_b x$, x è l'argomento del logaritmo

quindi una quantità sulla quale opera una certa funzione[6]

portare a numeratore/denominatore in una frazione, significa far comparire a numeratore/denominatore una certa quantità che inizialmente compare a denominatore/numeratore, ma senza cambiare il valore della frazione

[6] Studieremo a fondo durante il corso il significato del termine *funzione*.