Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2010/11

Alberto Peretti

Maggio 2015

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/01/2011

Domanda 1. Dividere il polinomio $P_1(x) = x^3 + 5x - 1$ per il polinomio $P_2(x) = x^2 - 5x$ trovando quoziente e resto

✎

La divisione deve essere effettuata con il metodo generale (divisione di Euclide), in quanto il divisore non è nella forma prevista per poter applicare la regola di Ruffini.

$$
\begin{array}{rrrr|rr}
x^3 & & +5x & -1 & x^2 & -5x \\ \cline{5-6}
-x^3 & +5x^2 & & & x & +5 \\ \cline{1-4}
// & 5x^2 & +5x & -1 & & \\
 & -5x^2 & +25x & & & \\ \cline{2-4}
 & // & 30x & -1 & &
\end{array}
$$

Pertanto il quoziente è $Q(x) = x + 5$ e il resto è $R(x) = 30x - 1$.

Domanda 2. Scrivere la frazione $\dfrac{4}{2^x}$ come potenza di 4

✎

$$\frac{4}{2^x} = \frac{4}{(4^{1/2})^x} = \frac{4}{4^{x/2}} = 4^{1-x/2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$(\log_3 x)^2 - 2 = 0$$

✎

L'argomento x deve essere positivo. Si ha

$$(\log_3 x)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 x = \pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{\pm\sqrt{2}}.$$

Quindi le soluzioni sono $3^{-\sqrt{2}}$ oppure $3^{\sqrt{2}}$ (entrambi sono valori positivi e quindi accettabili).

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2\sqrt{x+1} - 1 < 3$$

✎

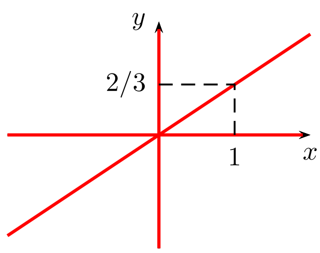
Deve essere $x + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$. Poi si ha

$$2\sqrt{x+1} - 1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3.$$

Pertanto le soluzioni sono $-1 \leq x < 3$, cioè l'intervallo $S = [-1, 3)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3xy^2 - 2x^2y = 0$

✎



Raccogliendo xy l'equazione diventa

$$xy(3y - 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ 3y - 2x = 0.$$

Le soluzioni sono pertanto i punti che stanno su una delle tre rette corrispondenti alle equazioni indicate (l'ultima si può scrivere come $y = \frac{2}{3}x$, che è una retta per l'origine di pendenza minore di 1). Sono raffigurate in rosso qui a fianco.

Domanda 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\ln(x-2)} = \frac{0^+}{\ln 0^+} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$ (precisamente 0^-).

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{x+\sqrt{x}}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+\sqrt{x}} + x \cdot e^{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|1+2x^2| + c = \frac{1}{4}\ln(1+2x^2) + c.$$

Il valore assoluto si può togliere in quanto l'argomento del logaritmo è positivo.

Domanda 9. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{5^{2n+1}}$

✎

Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{5^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{5\cdot 5^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{25^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n.$$

È una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{25}$, quindi la somma è $\frac{1}{1-1/25} = \frac{25}{24}$.

Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x(x+y)}$

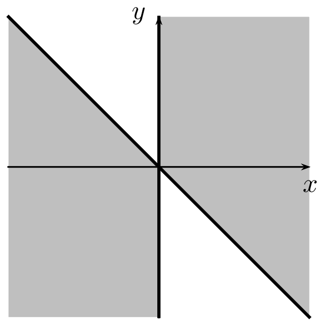
✎

Le condizioni di esistenza sono espresse dai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ x+y \leq 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -x \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq -x \end{cases}$$



Si tratta dei punti che stanno a destra dell'asse y (asse compreso) e contemporaneamente al di sopra della bisettrice del 2° e 4° quadrante (retta compresa), oppure a sinistra dell'asse y e contemporaneamente al di sotto della bisettrice. L'insieme è rappresentato in grigio qui a fianco. Il bordo dell'insieme (punti di frontiera) fa parte dell'insieme.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/01/2011

Domanda 1. Stabilire se il polinomio $P_1(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ è divisibile per il polinomio $P_2(x) = x^2 + 2x$

✎

Possiamo procedere con la divisione di Euclide.

$$\begin{array}{rrr|rr} x^3 & +5x^2 & +6x & x^2 & +2x \\ \cline{4-5} -x^3 & -2x^2 & & x & +3 \\ \cline{1-3} // & 3x^2 & +6x & & \\ & -3x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3} & // & // & & \end{array}$$

Pertanto il polinomio P_1 è divisibile per il polinomio P_2.

Domanda 2. Scrivere $3\sqrt{2}$ come potenza di 3

✎

Possiamo scrivere

$$3\sqrt{2} = 3^{\log_3 3\sqrt{2}} = 3^{1+\log_3 \sqrt{2}}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$3^{4x} - 3^x = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$3^{4x} = 3^x \quad \Leftrightarrow \quad 4x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\log_3(1 - x^2) > 0$$

✎

La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ \log_3(1 - x^2) > \log_3 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ 1 - x^2 > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 < 0. \end{cases}$$

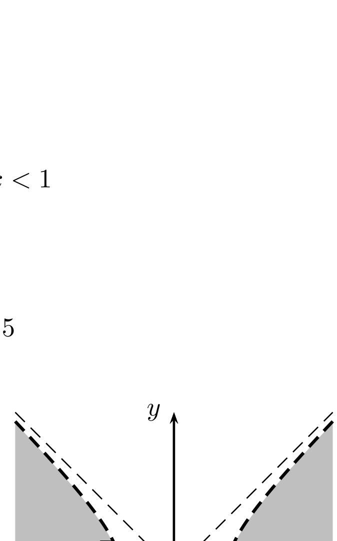
L'ultima disequazione è impossibile e quindi il sistema non ha soluzioni.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 > 5$

✎

L'equazione $x^2 - y^2 = 5$ definisce un'iperbole, la cui equazione canonica è

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1.$$



Si tratta di un'iperbole con asintoti obliqui, i cui rami stanno a destra e a sinistra dell'origine. Le pendenze degli asintoti sono ± 1 e si tratta quindi delle bisettrici dei quadranti. Dato che l'origine non soddisfa la disequazione, la regione definita dalle soluzioni di questa è quella che sta a destra o a sinistra dei rami dell'iperbole. I punti di frontiera non fanno parte dell'insieme, che è raffigurato in grigio qui a fianco.

Domanda 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{\ln(x-2)}$$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{\ln(x-2)} = \frac{-1}{\ln 0^+} = \frac{-1}{-\infty} = 0$ (precisamente 0^+).

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}$

✎

$$f'(x) = D\frac{x^{1/5}}{\ln x} = \frac{\frac{1}{5}x^{-4/5}\ln x - x^{1/5}\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{1}{5}x^{-4/5}\cdot\frac{\ln x - 5}{\ln^2 x}.$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$= \int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

Domanda 9. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+3}$

✎

Nel termine generale della serie possiamo trascurare le costanti. Quindi il termine generale $\frac{n+1}{n^3+3}$, per $n \to +\infty$, è equivalente a $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Dato che quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 2$ e che in questo caso la serie converge, allora per il criterio del confronto converge anche la serie data.

Domanda 10. Calcolare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x, y) = \sqrt{x(x+y)}$

✎

Si tratta di una funzione composta e come tale va derivata (rispetto ad x).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+y)}}\cdot\Big(1\cdot(x+y) + x\cdot 1\Big) = \frac{2x+y}{2\sqrt{x(x+y)}}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/01/2011

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione del polinomio $P_1(x) = x^4+5x^2+6$ per il polinomio $P_2(x) = x^2+3$

✎

Possiamo procedere con la divisione di Euclide.

$$\begin{array}{ccc|cc}
x^4 & +5x^2 & +6 & x^2 & +3 \\ \cline{4-5}
-x^4 & -3x^2 & & x^2 & +2 \\ \cline{1-3}
// & 2x^2 & +6 & & \\
 & -2x^2 & -6 & & \\ \cline{2-3}
 & // & // & &
\end{array}$$

Pertanto il polinomio P_1 è divisibile per il polinomio P_2.

Domanda 2. Scrivere in una sola frazione e, se possibile, semplificare l'espressione $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x}$

✎

Prendendo come denominatore comune $2x$ si ha

$$\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} = \frac{6\sqrt{x}+1}{2x}.$$

Prendendo invece come denominatore comune $2x\sqrt{x}$ si ha

$$\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} = \frac{6x+\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

e in questo caso si può semplificare dividendo sopra e sotto per $\sqrt{x}$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$4x = \frac{3x+1}{x}$$

✎

Occorre porre la condizione di esistenza $x \neq 0$. Poi l'equazione equivale a

$$4x - \frac{3x+1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-3x-1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-3x-1 = 0.$$

Con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado si ha $x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{8} = \frac{3\pm5}{8}$, che dà come soluzioni $x = 1$ oppure $x = -\frac{1}{4}$, che sono entrambe accettabili.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$3e^{1-2x} > 2$$

✎

La disequazione equivale a

$$e^{1-2x} > \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1-2x > \ln\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 1-\ln\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2}\left(1-\ln\frac{2}{3}\right).$$

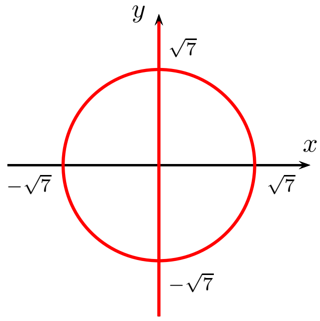
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x(x^2 + y^2 - 7) = 0$

✎

L'equazione ha per soluzioni (rappresentate in rosso qui a fianco)

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 - 7 = 0,$$

ossia i punti che stanno sull'asse y oppure sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{7}$.



Domanda 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right)$$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{+\infty} + \ln \frac{1}{+\infty} = 0^+ + \ln 0^+ = 0 + (-\infty) = -\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^2 \sqrt[5]{x+1}$

✎

$$f'(x) = D\left(x^2(x+1)^{1/5}\right) = 2x(x+1)^{1/5} + x^2 \cdot \frac{1}{5}(x+1)^{-4/5} = \frac{1}{5}x(x+1)^{-4/5}\big(11x + 10\big).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x \ln(2x)\, dx$

✎

L'integrale di deve fare per parti ed è uguale a

$$\ln(2x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{x^2}{4} + c.$$

Domanda 9. Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{1-2n}$

✎

Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{1-2n} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-2n} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n.$$

È una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{16}$, quindi la somma è $4 \cdot \frac{1}{1-1/16} = 4 \cdot \frac{16}{15} = \frac{64}{15}$.

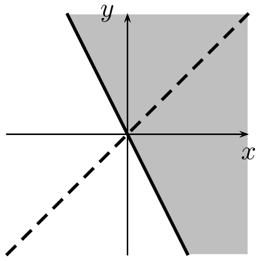
Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{2x + y}}{x - y}$

✎

Le condizioni di esistenza sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x - y \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq -2x \\ y \neq x. \end{cases}$$

Si tratta dei punti che stanno al di sopra della retta di pendenza negativa e che non stanno sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante. I punti sulla retta di equazione $y = -2x$ fanno parte del dominio di f, ad eccezione dell'origine. L'insieme è raffigurato in grigio qui a fianco.



ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 14/01/2011

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = (x+1)e^{1/(1-x)},$$

si determini il suo insieme di definizione e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f. Con le informazioni ottenute si disegni un grafico di f e si indichi l'immagine della funzione.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è $x \neq 1$, quindi l'insieme di definizione è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, 1^-, 1^+ e $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty) \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = (-\infty) \cdot e^0 = (-\infty) \cdot 1 = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = (+\infty) \cdot e^0 = (+\infty) \cdot 1 = +\infty;$$

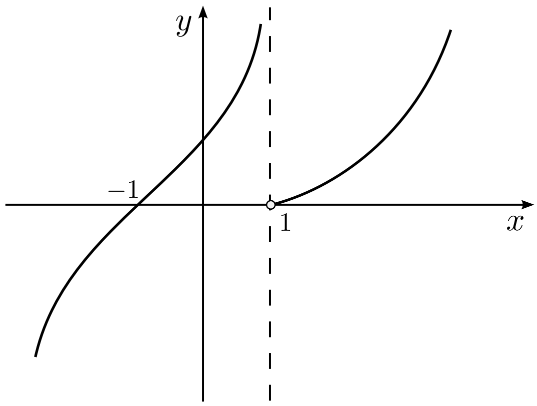
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{1-1^+}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 2 \cdot e^{-\infty} = 0^+;$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{1-1^-}} = 2 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 2 \cdot e^{+\infty} = +\infty.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/(1-x)} + (x+1) \cdot e^{1/(1-x)} \cdot \left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right) \cdot (-1) = e^{1/(1-x)} \left(1 + \frac{x+1}{(1-x)^2}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata, ma solo un possibile grafico, in base alle informazioni ottenute fino a questo punto.



Dal grafico si vede che l'immagine della funzione f è tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (2, -3, 1) \quad , \quad v^2 = (3, -2, 1) \quad , \quad v^3 = (-2, -7, 1)$$

si provi che essi sono linearmente dipendenti. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da essi generato. Si scriva v^3 come combinazione lineare di v^1 e v^2. Si trovi infine un vettore w ortogonale a v^1 e v^2.

✎

Per provare la dipendenza dei vettori ci sono due modi possibili e li illustro entrambi.

Uno è attraverso la definizione. I tre vettori sono l.d. se e solo se il vettore nullo si può scrivere come loro combinazione lineare in modo non banale, cioè con coefficienti della combinazione non tutti nulli. Quindi

$$av^1 + bv^2 + cv^3 = 0 \tag{1}$$

con a, b, c non tutti nulli. La (1) equivale a scrivere

$$a(2,-3,1)+b(3,-2,1)+c(-2,-7,1)=(0,0,0) \quad \text{e cioè} \quad (2a+3b-2c,-3a-2b-7c,a+b+c)=(0,0,0).$$

Quest'ultima equivale al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2a+3b-2c=0 \\ -3a-2b-7c=0 \\ a+b+c=0. \end{cases}$$

Potremmo usare ora il metodo generale per risolvere i sistemi lineari, ma possiamo anche risolverlo per sostituzione. Ricavando c dalla 3^{a} equazione si ha

$$\begin{cases} c=-a-b \\ 2a+3b-2c=0 \\ -3a-2b-7c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 2a+3b+2a+2b=0 \\ -3a-2b+7a+7b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ 4a+5b=0 \\ 4a+5b=0. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono uguali e quindi il sistema equivale a

$$\begin{cases} c=-a-b \\ 4a+5b=0 \end{cases}$$

ed è chiaro che ha soluzioni non banali, ad esempio $a=5$, $b=-4$, $c=-1$. Quindi esistono combinazioni lineari non banali dei tre vettori dati che sono uguali al vettore nullo e pertanto i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Un modo alternativo, e molto più comodo e veloce, per provare la dipendenza di v^1, v^2, v^3 è considerare la matrice formata dai tre vettori

$$V=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e osservare che } \det V=0.$$

Da questo si ricava che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da generato da v^1, v^2 e v^3 è il massimo numero di vettori indipendenti che possiamo trovare nell'insieme $\{v^1,v^2,v^3\}$ e coincide con il rango della matrice V. Dato che $\det V=0$ il rango non è 3 e possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante 5, quindi diverso da zero. La dimensione del sottospazio è quindi 2.

Scrivere v^3 come combinazione lineare di v^1 e v^2 significa scrivere

$$v^3=av^1+bv^2 \quad \text{trovando quali sono i coefficienti.} \tag{2}$$

La (2) equivale a

$$(-2,-7,1)=a(2,-3,1)+b(3,-2,1) \quad \text{e cioè} \quad (-2,-7,1)=(2a+3b,-3a-2b,a+b).$$

Quest'ultima equivale al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2a+3b=-2 \\ -3a-2b=-7 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a+3-3a=-2 \\ -3a-2+2a=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ -a=-5 \\ -a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-4. \end{cases}$$

Quindi $v^3=5v^1-4v^2$.

Troviamo ora un vettore w ortogonale a v^1 e v^2. Sia $w=(x,y,z)$. Il vettore w deve avere prodotto interno nullo con v^1 e v^2. Quindi

$$\begin{cases} \langle w,v^1\rangle=0 \\ \langle w,v^2\rangle=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \big\langle (x,y,z),(2,-3,1)\big\rangle=0 \\ \big\langle (x,y,z),(3,-2,1)\big\rangle=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+z=0. \end{cases}$$

Ricavando ad esempio z dalla prima e sostituendo nella seconda si ha

$$\begin{cases} z=-2x+3y \\ 3x-2y-2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x+3y \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-5x. \end{cases}$$

Quindi, ad esempio, un vettore ortogonale a v^1 e v^2 è $w = (1, -1, -5)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x-y} \cdot \ln(xy)$$

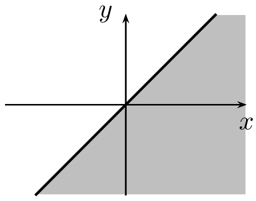
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se tale insieme è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si disegni la curva di livello 0 di f. Si calcoli infine il gradiente di f.

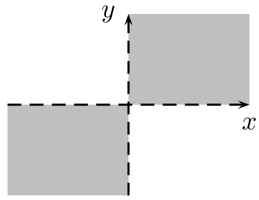
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

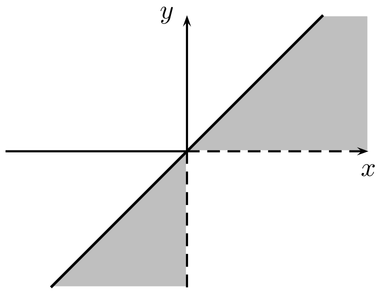
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x \\ xy > 0. \end{cases}$$

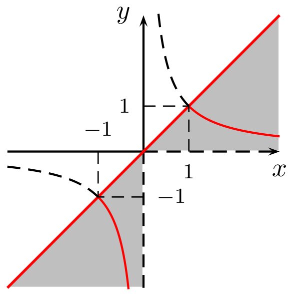
La prima disequazione è verificata nei punti che stanno al di sotto della bisettrice del primo e terzo quadrante, retta compresa. La seconda disequazione è verificata nei punti del primo oppure del terzo quadrante, frontiera esclusa. I due insiemi sono raffigurati in grigio, separatamente, qui sotto.





Dobbiamo ora fare l'intersezione dei due insiemi e il risultato, cioè il dominio della funzione f, è quindi questo:





Il dominio di f non è né aperto né chiuso, dato che alcuni punti di frontiera appartengono all'insieme e altri no.

La curva di livello 0 di f è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, cioè $\sqrt{x-y} \cdot \ln(xy) = 0$. L'equazione equivale a

$$\sqrt{x-y} = 0 \quad \vee \quad \ln(xy) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x - y = 0 \quad \vee \quad xy = 1.$$

La prima definisce la bisettrice del primo e terzo quadrante, la seconda l'iperbole con centro l'origine, asintoti dati dagli assi cartesiani e rami che stanno nel primo o terzo quadrante. La curva di livello zero è rappresentata in rosso nella figura di destra qui sopra.

Infine il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot \ln(xy) + \sqrt{x-y} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{\ln(xy)}{2\sqrt{x-y}} + \frac{\sqrt{x-y}}{x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot (-1)\ln(xy) + \sqrt{x-y} \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = -\frac{\ln(xy)}{2\sqrt{x-y}} + \frac{\sqrt{x-y}}{y}.$$

E poi naturalmente $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/01/2011

Domanda 1. Trovare gli zeri del polinomio $P(x) = x^7 + x^2$

✎

Il polinomio si può così fattorizzare

$$x^7 + x^2 = x^2(x^5 + 1).$$

Il primo fattore si annulla per $x = 0$ e il secondo se $x^5 = -1$, cioè per $x = -1$. Quindi gli zeri sono $x = 0$ oppure $x = -1$.

Domanda 2. Usando le proprietà delle potenze scrivere in altri due modi diversi l'espressione e^{2-3x}

✎

Alcuni modi equivalenti sono ad esempio

$$e^{2-3x} = e^2 \cdot e^{-3x} = \frac{e^2}{e^{3x}} = \frac{e^2}{(e^3)^x} = \frac{e^2}{(e^x)^3}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2^{2x} - 2^x = 6$$

✎

L'equazione equivale a $2^{2x} - 2^x - 6 = 0$. Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad un'equazione intera di secondo grado. Con il cambio di variabile $2^x = t$ l'equazione diventa

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+2)(t-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \ \vee \ t = 3.$$

Le soluzioni vanno quindi cercate nelle x per cui

$$2^x = -2 \ \vee \ 2^x = 3.$$

La prima è impossibile, dato che la funzione esponenziale è sempre positiva. La seconda equivale a $x = \log_2 3$, che è quindi l'unica soluzione.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 3$$

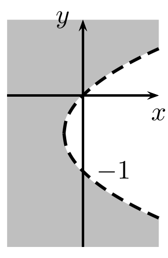
✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq 1$. Poi la disequazione equivale alla

$$\frac{x+2}{x-1} - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2-3x+3}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x+5}{x-1} \geq 0.$$

Questa a sua volta equivale a

$$\begin{cases} -2x+5 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2x+5 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x < 1. \end{cases}$$



Pertanto le soluzioni sono $1 < x \leq \frac{5}{2}$ (il secondo sistema non ha soluzioni), ossia l'intervallo $S = (1, \frac{5}{2}]$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^2 - x + y > 0$

✎

La disequazione equivale a

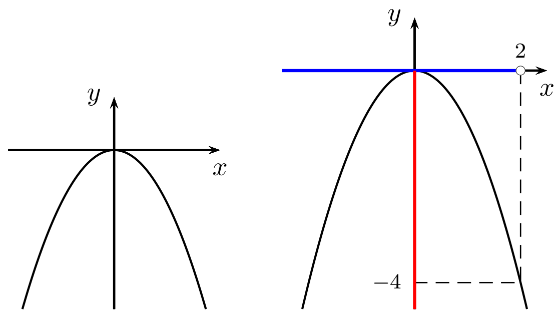
$$x < y^2 + y \quad \text{cioè} \quad x < y(y+1).$$

L'equazione corrispondente definisce la parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso destra, passante per l'origine e per il punto $(0, -1)$. La disequazione individua la regione che sta alla sinistra della parabola, parabola esclusa. È rappresentata in grigio nella figura qui sopra.

Domanda 6. Determinare l'immagine dell'intervallo $(-\infty, 2)$ attraverso la funzione $f(x) = -x^2$

✎

Ecco qui sotto il grafico di f. L'intervallo $(-\infty, 2)$ è rappresentato sull'asse x in blu. I valori corrispondenti attraverso la funzione formano l'intervallo raffigurato in rosso, cioè l'intervallo $(-\infty, 0]$.



Domanda 7. Calcolare il $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{x-3}}{x-2}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{x-3}}{x-2} = \dfrac{e^{2^+-3}}{2^+-2} = \dfrac{e^{-1}}{0^+} = +\infty \quad$ (il numeratore è positivo).

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^2 \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

✎

Si tratta di un prodotto, con una funzione composta nel secondo fattore.

$$f'(x) = 2x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int (x^2 + e^{5x})\,\mathrm{d}x$

✎

Si ha

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}e^{5x} + c.$$

Domanda 10. Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Il determinante di A è -3. La matrice dei complementi algebrici di A è

$$A_{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice aggiunta è} \quad A^\star = A_{\mathrm{CA}} \quad \text{in quanto simmetrica.}$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star = -\frac{1}{3} A^\star = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/01/2011

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2$

✎

Si può intanto raccogliere x^2.

$$P(x) = x^2(2x^2 + 5x - 3).$$

Ora cerchiamo gli zeri del polinomio tra parentesi.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -3.$$

Quindi

$$P(x) = x^2 \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3). \text{ [1]}$$

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{e^{2-x}}{e^{3x+2}}$

✎

Applicando le proprietà delle potenze si ha

$$\frac{e^{2-x}}{e^{3x+2}} = e^{2-x-(3x+2)} = e^{2-x-3x-2} = e^{-4x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2^{x^2} \cdot 2^x = 4$$

✎

L'equazione si può riscrivere così

$$2^{x^2+x} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+2) = 0.$$

Le soluzioni sono quindi $x = 1 \ \vee \ x = -2$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$3\ln(1+4x) < 5$$

✎

C'è la condizione di esistenza $1 + 4x > 0$, cioè $x > -\frac{1}{4}$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(1+4x) < \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 4x < e^{5/3} \quad \Leftrightarrow \quad 4x < e^{5/3} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{4}(e^{5/3} - 1).$$

Pertanto le soluzioni sono $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}(e^{5/3} - 1)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(x+1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

✎

L'equazione è già nella forma canonica. Si tratta di un'ellisse di centro $(-1, 0)$ e semiassi $a = 1$ e $b = 2$. La raffigurazione dell'ellisse è riportata in fondo nella pagina successiva.

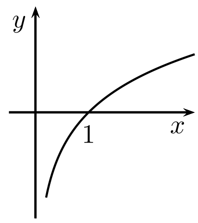
---

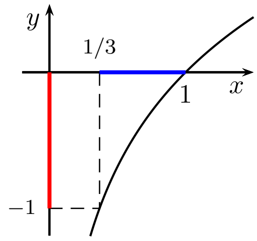
[1] Si ricordi che se il polinomio $ax^2 + bx + c$ ha gli zeri x_1 e x_2, allora esso si fattorizza in $a(x - x_1)(x - x_2)$. Questo è il motivo del 2 che compare nella scomposizione.

Domanda 6. Determinare l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{3}, 1)$ attraverso la funzione $f(x) = \log_3 x$

✎

È bene disegnare un grafico di f.





Dal grafico si vede che l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{3}, 1)$ (in blu) è l'intervallo aperto di estremi $f(\frac{1}{3}) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ e $f(1) = 0$. Pertanto l'immagine è l'intervallo $(-1, 0)$ (in rosso).

Domanda 7. Calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{1+x}}{4^{1-x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{1+x}}{4^{1-x}} = \frac{3^{1+\infty}}{4^{1-\infty}} = \frac{3^{+\infty}}{4^{-\infty}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^3+1}\right)$

✎

Si tratta di una funzione composta.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^3+1}} \cdot \frac{2x(x^3+1) - (x^2+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+4x}}\,\mathrm{d}x$

✎

Integrale quasi immediato.

$$= \int (3+4x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4(3+4x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{(3+4x)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{1}{2}\sqrt{3+4x} + c.$$

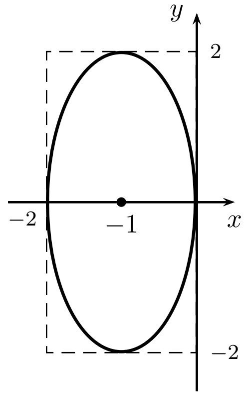
Domanda 10. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla prima riga.

$$\det A = 2\cdot(-2+7) + 3\cdot(3+2) + 1\cdot(-21-4) = 2\cdot 5 + 3\cdot 5 - 25 = 0.$$

Ecco a fianco la raffigurazione dell'ellisse della Domanda 5.



ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/01/2011

Domanda 1. Senza effettuare la divisione tra i polinomi, dire se $P(x) = 3x^3 - 11x + 2$ è divisibile per $x + 2$

✎

Il divisore $x + 2$ è nella forma $x - a$ (con $a = -2$), quindi in base al teorema di Ruffini P è divisibile per $x + 2$ se e solo se $P(-2) = 0$. Risulta

$$P(-2) = 3 \cdot (-8) - 11 \cdot (-2) + 2 = -24 + 22 + 2 = 0 \quad \text{e quindi } P \text{ è divisibile per } x + 2.$$

Domanda 2. Nella frazione $\dfrac{\sqrt[3]{x^4 + x}}{x}$ portare sotto radice il denominatore e semplificare la quantità sotto radice

✎

Si ha

$$\frac{\sqrt[3]{x^4 + x}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x^4 + x}{x^3}} = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x^2}}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\log_2(x^2 + 7x) = 3$$

✎

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 + 7x > 0 \text{ (condizione di esistenza)} \\ \log_2(x^2 + 7x) = \log_2 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 7) > 0 \\ x^2 + 7x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -7 \ \vee \ x > 0 \\ (x - 1)(x + 8) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni $x = 1$ e $x = -8$ sono entrambe accettabili nelle condizioni di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$x^2 + x > 12$$

✎

La disequazione equivale a

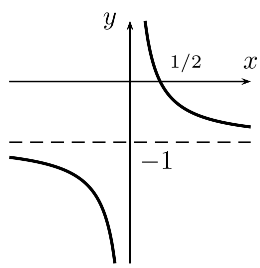
$$x^2 + x - 12 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3)(x + 4) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4 \ \vee \ x > 3, \quad \text{quindi l'insieme } (-\infty, -4) \cup (3, +\infty).$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x + 2xy = 1$

✎

L'equazione equivale a

$$2x(1 + y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(y + 1) = \frac{1}{2}.$$

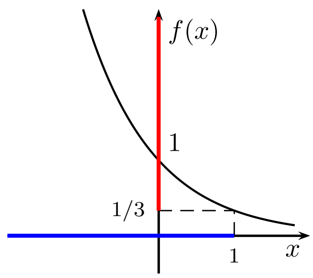


Si tratta di un'iperbole traslata con centro in $(0, -1)$, asintoti dati dall'asse y e dalla retta di equazione $y = -1$ e rami che stanno nei corrispondenti del 1º e 3º quadrante.

Domanda 6. Determinare l'immagine dell'intervallo $(-\infty, 1)$ attraverso la funzione $f(x) = 3^{-x}$

✎

È bene disegnare un grafico di f. Dal grafico si vede che l'immagine dell'intervallo $(-\infty, 1)$ (in blu) è l'intervallo aperto che va da $f(1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ a $+\infty$, cioè $(\frac{1}{3}, +\infty)$ (in rosso).



Domanda 7. Calcolare il $\lim_{x\to1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-1}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{\ln(x-1)}{x^2-1} = \frac{\ln(1^+-1)}{(1^+)^2-1} = \frac{\ln 0^+}{1^+-1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^3+x}$

✎

Derivata di un quoziente.

$$\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x^3+x) - \ln(x+1)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x}\right) \mathrm{d}x$

✎

Si può scrivere

$$= \int \left(x^{1/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^{4/3}}{4/3} + \frac{1}{3}\cdot \ln|x| + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{3}\ln|x| + c.$$

Domanda 10. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Osservando che le prime due righe di A sono opposte, il rango non può essere 3. Il rango è 2 dato che (ad esempio) il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 3)$, cioè il determinante della sottomatrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ formata da 2ª e 3ª riga e 1ª e 2ª colonna è diverso da zero.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/01/2011

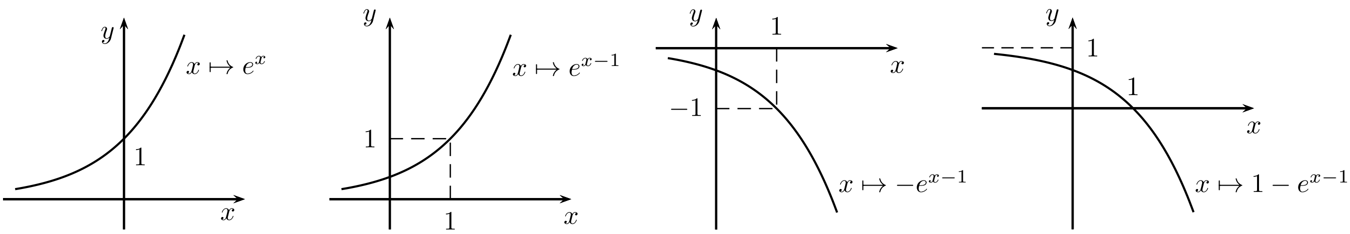
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ 1 - e^{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

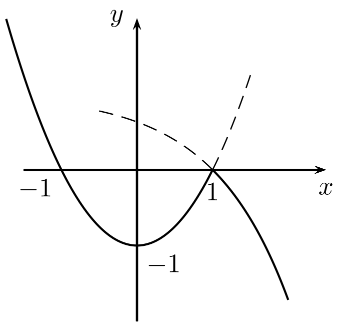
si disegni il suo grafico usando le trasformazioni elementari. Usando le definizioni, si dica poi se la funzione f è continua e derivabile in tutto il suo dominio. Si calcoli infine l'integrale di f sull'intervallo $[-1, 2]$.

✎

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ attraverso due diverse espressioni (è una funzione definita a tratti). La prima ha per grafico una parabola, esattamente la parabola di equazione $y = x^2$ "abbassata di 1". La seconda è un po' più elaborata e qui sotto sono riportati i passaggi relativi alle trasformazioni necessarie.



Occorre usare il grafico della parabola nell'intervallo $(-\infty, 1]$ e il grafico della funzione esponenziale nell'intervallo $(1, +\infty)$. Pertanto il grafico della funzione f è il seguente (il grafico è ovviamente il tratto continuo)



Vediamo ora la continuità.

La funzione f è certamente continua per ogni x diverso da 1. Questo perché possiamo affermare che in un opportuno intorno di questi punti la funzione coincide con una funzione elementare (un polinomio se $x < 1$ o la funzione esponenziale se $x > 1$). Faccio notare che anche nel punto 1 la funzione è una funzione elementare (in particolare in questo caso il polinomio) ma che non è vero che in un intorno di 1 la funzione sia il polinomio, dato che nell'intorno destro è la funzione esponenziale. Questo impedisce di ricavarne la continuità in base alla continuità delle funzioni elementari. In poche parole, se consideriamo il punto $x = 1$, la funzione a sinistra è una certa funzione elementare, ma a destra è *un'altra* funzione elementare, e quindi non è necessariamente continua in $x = 1$.

Dobbiamo allora studiare la continuità in $x = 1$ attraverso la definizione, cioè verificare se

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) \quad \text{oppure no.}$$

Possiamo però affermare che f è sicuramente continua in 1 da sinistra, dato che in un intorno sinistro di 1 coincide con il polinomio. Si ha poi

$$f(1) = (x^2 - 1\Big|_{x=1} = 0 \;^{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1 - e^{x-1}) = 0.$$

[2]Uso la notazione $(x^2 - 1\Big|_{x=1}$ con il significato di "la funzione $x^2 - 1$ calcolata in $x = 1$". Si osservi che è la notazione usata anche per la restrizione di una funzione di due variabili lungo un curva e si noti anche che il concetto è in effetti lo stesso.

Pertanto f è continua in 1 anche da destra e dunque continua in 1.

Passiamo alla derivabilità.

Analogamente a quanto detto sulla continuità possiamo dire che la funzione f è certamente derivabile per ogni x diverso da 1, con le stesse motivazioni di prima, ricordando che le funzioni elementari sono anche derivabili dove esistono. La derivabilità in $x = 1$ non è invece garantita e va studiata.

Possiamo intanto affermare che la derivata di f è

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ -e^{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

e si noti che ho tolto il segno di "=" dalla prima disuguaglianza. Lasciarlo significherebbe affermare che per $x = 1$ la derivata esiste e si ottiene dal valore del polinomio, cosa che al momento non possiamo dire.

Ora i limiti destro e sinistro della derivata ci forniscono rispettivamente la derivata destra e la derivata sinistra di f in $x = 1$. Si ha

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 1$ (c'è un punto angoloso, la cui presenza tra l'altro era abbastanza evidente già dal grafico).

Infine l'integrale di f sull'intervallo $[-1, 2]$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (1 - e^{x-1})\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right|_{-1}^{1} + \left(x - e^{x-1}\right|_{1}^{2} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) + (2 - e) - (1 - 1) \\ &= \frac{2}{3} - 2 + 2 - e = \frac{2}{3} - e. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (0, 3, -1) \quad , \quad v^2 = (3, -2, 4) \quad , \quad v^3 = (6, 5, 5)$$

si stabilisca se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si determini la dimensione e una base del sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ da essi generato. Si scriva v^1 come combinazione lineare di v^2 e v^3. Si dica infine se anche il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene al sottospazio S.

✎

Per stabilire se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti ci sono due modi possibili e li illustro entrambi.

Attraverso la definizione. I tre vettori sono l.i. se e solo se il vettore nullo si può scrivere come loro combinazione lineare soltanto in modo banale, cioè con coefficienti della combinazione tutti nulli. Scriviamo quindi una combinazione lineare di v^2, v^2, v^3 e la poniamo uguale al vettore nullo:

$$av^1 + bv^2 + cv^3 = 0. \tag{3}$$

La (3) equivale a scrivere

$$a(0, 3, -1) + b(3, -2, 4) + c(6, 5, 5) = (0, 0, 0) \quad \text{e cioè} \quad (3b + 6c, 3a - 2b + 5c, -a + 4b + 5c) = (0, 0, 0).$$

Quest'ultima equivale al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3b + 6c = 0 \\ 3a - 2b + 5c = 0 \\ -a + 4b + 5c = 0. \end{cases}$$

Potremmo usare ora il metodo generale per risolvere i sistemi lineari, ma possiamo anche risolverlo per sostituzione. Ricavando dalla 1ª equazione b si ha

$$\begin{cases} b = -2c \\ 3a + 4c + 5c = 0 \\ -a - 8c + 5c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -2c \\ 3a + 9c = 0 \\ -a - 3c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -2c \\ a = -3c \\ a = -3c. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono uguali e quindi il sistema equivale a

$$\begin{cases} b = -2c \\ a = -3c \end{cases}$$

ed è chiaro che ha soluzioni non banali, ad esempio $a = -3$, $b = -2$, $c = 1$. Quindi esistono combinazioni lineari non banali dei tre vettori dati che sono uguali al vettore nullo e pertanto i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Un modo alternativo, molto più veloce, è considerare la matrice formata dai tre vettori

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e calcolare} \quad \det V = \ (1^{\text{a}} \text{ riga}) \ -3(15-24) - 1(15+12) = 0.$$

Da questo si ricava che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da generato da v^1, v^2 e v^3 è il massimo numero di vettori indipendenti che possiamo trovare nell'insieme $\{v^1, v^2, v^3\}$ e coincide con il rango della matrice V. Dato che $\det V = 0$ il rango non è 3 e possiamo dire che è 2 osservando che ad esempio la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ha determinante -9, quindi diverso da zero. La dimensione del sottospazio è quindi 2.

Una base di questo sottospazio è formata da due vettori indipendenti, scelti opportunamente nell'insieme $\{v^1, v^2, v^3\}$. Il minore di V utilizzato per stabilire che il rango è 2 ci dice anche che v^1 e v^2 sono l.i. e quindi formano una base del sottospazio. In realtà possiamo osservare che anche le altre possibili coppie di vettori, cioè $\{v^1, v^3\}$ e $\{v^2, v^3\}$ formano una base, dato che tutte le coppie sono l.i.

Dobbiamo ora stabilire se il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene al sottospazio S generato dai tre vettori dati.

Possiamo farlo usando la definizione, cioè cercando di scrivere $(1, 1, 1)$ come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3, oppure usando un altro metodo, in realtà molto più veloce.

Con la definizione possiamo però ugualmente ridurre un po' i calcoli, osservando che il sottospazio è sì lo spazio delle combinazioni lineari di v^1, v^2, v^3, ma coincide con lo spazio delle combinazioni lineari dei soli v^1 e v^2, dato che v^3 dipende dai primi due. Quindi possiamo scrivere

$$(1, 1, 1) = a(0, 3, -1) + b(3, -2, 4) \quad \text{cercando quali sono i coefficienti.} \tag{4}$$

La (4) equivale a

$$(1, 1, 1) = (3b, 3a - 2b, -a + 4b)$$

e questo equivale al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3b = 1 \\ 3a - 2b = 1 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 1/3 \\ 3a = 5/3 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 1/3 \\ a = 5/9 \\ -a + 4b = 1 \end{cases}$$

che è però impossibile perché la terza equazione non è soddisfatta con i valori di a e b dati dalle prime due. Quindi il vettore $(1, 1, 1)$ non appartiene al sottospazio S.

Il metodo alternativo alla definizione fa uso del concetto di rango di una matrice e dei suoi svariati significati in termini di dipendenza dei vettori.

Se formiamo una matrice con righe date da v^1, v^2 e il nuovo vettore $(1, 1, 1)$

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vediamo che } \det V' = -2$$

e quindi le tre righe sono indipendenti. Pertanto non è possibile scrivere $(1,1,1)$ come c.l. di v^1 e v^2 e cioè $(1,1,1)$ non appartiene al sottospazio S.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{(x+1)\ln y}$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se tale insieme è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si disegni in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si calcoli infine il gradiente di f.

✎

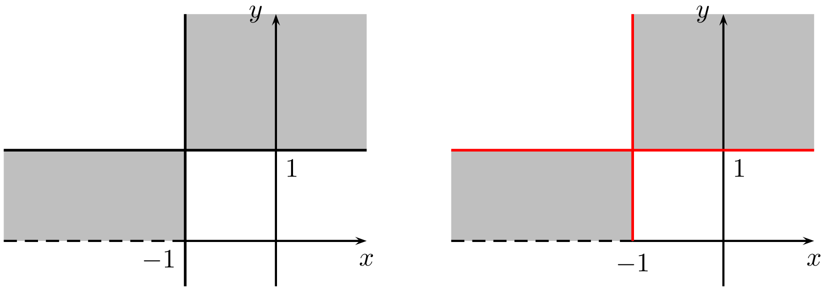
Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y > 0 \\ (x+1)\ln y \geq 0. \end{cases}$$

Il sistema equivale a

$$\begin{cases} y > 0 \\ (x+1) \geq 0 \\ \ln y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y > 0 \\ (x+1) \leq 0 \\ \ln y \leq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y > 0 \\ x \leq -1 \\ y \leq 1. \end{cases}$$

La prima disequazione restringe per entrambi i sistemi le soluzioni ai punti che stanno al di sopra dell'asse x. Le altre poi portano a definire gli insiemi evidenziati in grigio qui sotto a sinistra



Il dominio di f non è né aperto né chiuso, dato che alcuni punti di frontiera appartengono all'insieme e altri no.

Dobbiamo ora trovare in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si ha

$$\sqrt{(x+1)\ln y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)\ln y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1=0 \quad \vee \quad \ln y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad \vee \quad y=1.$$

Si tratta quindi dei punti che stanno sulle rette di equazione $x=-1$ oppure $y=1$, che sono rappresentate in rosso nella figura sopra a destra.

Infine il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)\ln y}} \cdot \ln y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)\ln y}} \cdot \frac{x+1}{y}.$$

Poi naturalmente $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 07/02/2011

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^4 - 16x^2$

✎

Si ha
$$x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16) = x^2(x-4)(x+4).$$

Domanda 2. Nell'espressione $2^{x+1} - 4^x$ raccogliere 2^x

✎

Si ha
$$2^{x+1} - 4^x = 2^x\left(\frac{2^{x+1}}{2^x} - \frac{2^{2x}}{2^x}\right) = 2^x\left(2^{x+1-x} - 2^{2x-x}\right) = 2^x\left(2 - 2^x\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione
$$3(\ln x)^2 = 27$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi si ha
$$3(\ln x)^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\pm 3}.$$
Le soluzioni sono quindi $x = e^3$ oppure $x = e^{-3}$, accettabili entrambe.

Domanda 4. Risolvere la disequazione
$$\frac{5}{x+1} < \frac{2}{x+1} + 1$$

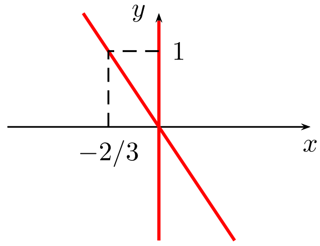
✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi si ha
$$\frac{5}{x+1} < \frac{2}{x+1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x+1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5-2-x-1}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x+1} > 0.$$
La disequazione equivale a
$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \end{cases}$$
Pertanto le soluzioni sono date dall'insieme $S = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x^2 + 2xy = 0$

✎

L'equazione equivale alla
$$x(3x+2y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \quad \vee \quad y = -\frac{3}{2}x,$$
che individuano nel piano l'insieme dei punti che stanno o sulla retta di equazione $x = 0$, cioè l'asse y, oppure sulla retta di equazione $y = -\frac{3}{2}x$, retta per l'origine di pendenza $-\frac{3}{2}$. Per un grafico più preciso si osservi che $-\frac{3}{2} < -1$ e quindi la retta è più ripida della bisettrice del 2° e 4° quadrante.



Domanda 6. Scrivere la funzione composta $f(g(x))$ delle due funzioni $f(x) = \ln(x^2 + x)$ e $g(x) = e^x$

✎

Si ha

$$f(g(x)) = \ln\big((g(x))^2 + g(x)\big) = \ln\big((e^x)^2 + e^x\big) = \ln\big(e^{2x} + e^x\big)\,.$$

Domanda 7. Calcolare il $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-\frac{1}{x})}{e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-\frac{1}{x})}{e^x} = \dfrac{\ln(-\frac{1}{-\infty})}{e^{-\infty}} = \dfrac{\ln(0^+)}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

✎

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2x(x+1)}.$$

Domanda 9. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$

✎

Per $n \to +\infty$ il termine generale $\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ è equivalente a $\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, cioè $\frac{1}{n^{4/3}}$. Questo è il termine generale di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = \frac{4}{3}$, la quale converge dato che $\alpha > 1$. Quindi anche la serie data converge per il criterio del confronto asintotico.

Domanda 10. Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

✎

Si può osservare che le prime due colonne sono dipendenti, dato che sono opposte. Questo implica che ogni sottomatrice 3×3 di A che contenga le prime due colonne avrà certamente determinante nullo. Le uniche sottomatrici 3×3 che possono avere determinante non nullo sono quelle che non le contengono entrambe. Consideriamo ad esempio quella formata dalle ultime tre colonne. Calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto il rango di A non è 3. Possiamo concludere che è 2 grazie ad esempio alla sottomatrice 2×2 formata dalle prime due righe e dalle ultime due colonne.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 07/02/2011

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - x$

✎

Possiamo intanto raccogliere x e si ha

$$P(x) = x(x^2 - x - 1). \quad \text{Ora con la formula risolutiva} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto

$$P(x) = x\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Domanda 2. Scrivere in una sola frazione e, se possibile, semplificare $\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

✎

Possiamo prendere come denominatore comune x^2 e considerare che $x^2 = \sqrt{x} \cdot x\sqrt{x}$. Quindi

$$\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{3 + 2x\sqrt{x}}{x^2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2e^{x^2} = 8$$

✎

L'equazione equivale a

$$e^{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \ln 4, \text{ che è un numero positivo.}$$

Le soluzioni sono quindi $x = \sqrt{\ln 4}$ oppure $x = -\sqrt{\ln 4}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{1-x}{2x+1} < 1$$

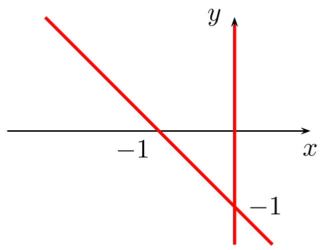
✎

C'è la condizione di esistenza $2x + 1 \neq 0$, cioè $x \neq -\frac{1}{2}$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{1-x}{2x+1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x-2x-1}{2x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3x}{2x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2x+1} > 0.$$

Questa equivale a

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x < 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Pertanto le soluzioni sono date dall'insieme $S = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + xy + x = 0$

✎

L'equazione equivale alla

$$x(x + y + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = -x - 1,$$

che individuano nel piano l'insieme dei punti che stanno o sulla retta di equazione $x = 0$, cioè l'asse y, oppure sulla retta di equazione $y = -x - 1$, retta parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante e abbassata di 1 rispetto a quella. L'insieme delle soluzioni è raffigurato in rosso nella figura qui sopra.

Domanda 6. Scrivere la funzione composta $f(g(x))$ delle due funzioni $f(x) = e^{x^2+x}$ e $g(x) = \ln x$

✎

Si ha

$$f(g(x)) = e^{(g(x))^2+g(x)} = e^{(\ln x)^2+\ln x}, \text{ che volendo si può scrivere come } x^{1+\ln x}.$$

Domanda 7. Calcolare il $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-\frac{1}{x})}{e^{1/x}}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-\frac{1}{x})}{e^{1/x}} = \frac{\ln(-\frac{1}{-\infty})}{e^{1/(-\infty)}} = \frac{\ln(0^+)}{e^0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(3x + 2 - \sqrt{x})$

✎

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3x + 2 - \sqrt{x}} \cdot \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Domanda 9. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n} + 3}$

✎

Nel termine generale a denominatore la costante è trascurabile rispetto alla potenza. Quindi possiamo affermare che il termine generale è equivalente a $\frac{1}{2^{2n}}$, per $n \to +\infty$. Ora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$, pertanto convergente. Per il criterio del confronto asintotico anche la serie data converge.

Domanda 10. Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Si può osservare che la seconda e la quarta colonna sono uguali. Questo implica che ogni sottomatrice 3×3 di A che le contenga entrambe avrà certamente determinante nullo. Le uniche sottomatrici 3×3 che possono avere determinante non nullo sono quelle che non le contengono entrambe. Consideriamo ad esempio quella formata dalle prime tre colonne. Calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto il rango di A non è 3. Possiamo concludere che è 2 grazie ad esempio alla sottomatrice 2×2 formata dalle ultime due righe e dalle prime due colonne.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 07/02/2011

Domanda 1. Trovare gli zeri del polinomio $P(x) = x^4 - 5x^2$

✎

Il polinomio si può scomporre in
$$P(x) = x^2(x^2 - 5) = x^2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$
Quindi gli zeri di P sono $x = 0$, $x = \sqrt{5}$ e $x = -\sqrt{5}$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x}$

✎

Possiamo raccogliere $\sqrt{x}$ a numeratore e x a denominatore e poi semplificare:
$$\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{x(x - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x - 1)}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione
$$2\sqrt{x^2} = 8$$

✎

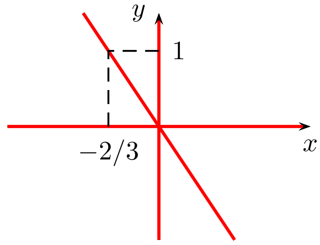
Non ci sono condizioni di esistenza, dato che x^2 è sempre non negativo. L'equazione equivale a
$$\sqrt{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \text{oppure} \quad x = -4.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione
$$\frac{x + 1}{2 - x} > 1$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq 2$. Poi la disequazione equivale alla
$$\frac{x + 1}{2 - x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1 - 2 + 2x}{2 - x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x - 1}{2 - x} > 0.$$
Questa a sua volta equivale a
$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 2. \end{cases}$$
Pertanto le soluzioni sono $\frac{1}{3} < x < 2$ (il secondo sistema non ha soluzioni), ossia l'intervallo $S = (\frac{1}{2}, 2)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x^2y + 2xy^2 = 0$



✎

Raccogliendo xy l'equazione diventa
$$xy(3x + 2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ 3x + 2y = 0.$$
Le soluzioni sono pertanto i punti che stanno su una delle tre rette corrispondenti alle equazioni indicate (l'ultima si può scrivere come $y = -\frac{3}{2}x$, che è una retta per l'origine di pendenza $-\frac{3}{2}$).

Domanda 6. Scrivere la funzione composta $f(g(x))$ delle due funzioni $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$ e $g(x) = \ln x$

✎

Si ha
$$f(g(x)) = \frac{1-g(x)}{1+(g(x))^2} = \frac{1-\ln x}{1+\ln^2 x}.$$

Domanda 7. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(e^x + \ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(e^x + \ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = e^{-\infty} + \ln\left(-\frac{1}{-\infty}\right) = 0 + \ln 0^+ = 0 - \infty = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(x^2\sqrt{x}+3\right)$

✎

È una funzione composta. Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}+3}\cdot\left(2x\sqrt{x} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Domanda 9. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+\sqrt{n}}$

✎

Nel termine generale della serie $\sqrt{n}$ è trascurabile rispetto ad n^3, per $n \to +\infty$. Quindi il termine generale $\frac{1}{n^3+\sqrt{n}}$, per $n \to +\infty$, è equivalente a $\frac{1}{n^3}$. Dato che quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 3$ e che in questo caso la serie converge, allora per il criterio del confronto converge anche la serie data.

Domanda 10. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Si può osservare che le prime due colonne sono dipendenti, dato che sono opposte. Questo implica che ogni sottomatrice 3×3 di A che contenga le prime due colonne avrà certamente determinante nullo. Le uniche sottomatrici 3×3 che possono avere determinante non nullo sono quelle che non le contengono entrambe. Consideriamo ad esempio quella formata dalle ultime tre colonne. Calcoliamo

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \text{ (sviluppare rispetto alla seconda riga o alla terza colonna).}$$

Pertanto il rango di A è 3.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 09/02/2011

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln(3x) + \frac{3}{x-3}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza) e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si trovino i punti stazionari e con le informazioni ottenute si disegni un grafico di f. Si calcoli infine l'integrale di f sull'intervallo $[1, 2]$.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Quindi il dominio è l'insieme $D = (0, 3) \cup (3, +\infty)$.
I limiti significativi sono dunque 0 da destra, 3 da destra e da sinistra e infine $+\infty$. Ecco il calcolo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(0^+) + \frac{3}{0-3} = -\infty - 1 = -\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) + \frac{3}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \ln 9 + \frac{3}{3^+ - 3} = \ln 9 + \frac{3}{0^+} = \ln 9 + \infty = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \ln 9 + \frac{3}{3^- - 3} = \ln 9 + \frac{3}{0^-} = \ln 9 - \infty = -\infty;$$

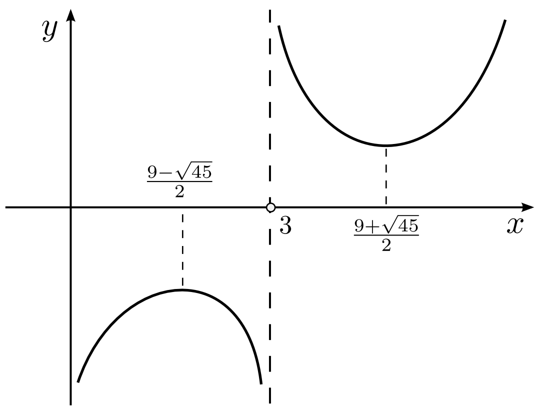
La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 - \frac{3}{(x-3)^2} = \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-3)^2}.$$

Troviamo i punti stazionari annullando la derivata.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{3}{(x-3)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{3}{(x-3)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 9 = 0.$$

Le soluzioni di questa sono $x = \frac{9\pm\sqrt{45}}{2}$, entrambe accettabili quali punti stazionari. Si noti che $\frac{9-\sqrt{45}}{2}$ sta nell'intervallo $(0, 3)$, mentre $\frac{9+\sqrt{45}}{2}$ sta nell'intervallo $(3, +\infty)$, come ci si poteva aspettare.
Con le informazioni fin qui ottenute possiamo disegnare ad esempio il grafico che segue:



Va osservato che questo è un possibile grafico, coerente con i limiti e i punti stazionari ottenuti. In realtà non sappiamo se nel punto di massimo la funzione è negativa e positiva nel punto di minimo. Si può verificare che è così con una calcolatrice.[3]

Calcoliamo ora l'integrale di f sull'intervallo $[1,2]$. Calcoliamo intanto l'integrale indefinito, osservando che l'integrale della frazione è immediato, mentre l'integrale del logaritmo si può fare per parti. Abbiamo

$$\int \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-3| + c.$$

Poi

$$\int \ln(3x)\,\mathrm{d}x = \ln(3x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(3x) - x + c.$$

Pertanto

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(3x) - x + 3\ln|x-3| + c.$$

Si osservi che non si deve togliere il valore assoluto, dato che nell'intervallo $(0,3)$, e quindi nell'intervallo di integrazione $[1,2]$ l'argomento del secondo logaritmo è negativo. Si ha allora

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \Big(\ln(3x) + \frac{3}{x-3}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big(x\ln(3x) - x + 3\ln|x-3|\Big|_1^2 = (2\ln 6 - 2) - (\ln 3 - 1 + 3\ln 2) = \ln\tfrac{3}{2} - 1.$$

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -x+2y-z \\ x+y \end{pmatrix}$$

si determinino la dimensione e una base dell'immagine di f e del nucleo di f.

✎

Anzitutto scriviamo la matrice di rappresentazione della trasformazione lineare f:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensione di $\mathrm{Im}f$ coincide con il rango di A. Possiamo osservare che le prime due righe di A sono opposte, quindi dipendenti, e pertanto il rango non è 3. Il rango è 2, ad esempio osservando che il minore complementare dell'elemento di posto $(1,1)$, cioè il determinante della sottomatrice formata con le ultime due righe e le ultime due colonne è diverso da zero. Quindi

$$\dim \mathrm{Im}f = r(A) = 2.$$

Il minore che ci ha permesso di dire che il rango è 2 ci dice anche che le ultime due colonne di A sono linearmente indipendenti e quindi formano una base dell'immagine di f. Pertanto possiamo affermare che

$$\text{una base di Im}f \text{ è } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La domanda conclusiva fa riferimento al nucleo della trasformazione f, argomento che non è più nel programma. Dato però che si tratta sostanzialmente delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A, possiamo intendere la domanda come "calcolare la dimensione e una base del sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$", cioè del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

[3]Si trova $x_1 = \frac{9-\sqrt{45}}{2} \approx 1.15$, $x_2 = \frac{9+\sqrt{45}}{2} \approx 7.85$, $f(x_1) \approx -0.38$ e $f(x_2) \approx 3.77$.

Anzitutto, dato che il rango di A è 2, abbiamo un'equazione da eliminare e una variabile che diventa parametro. Possiamo eliminare la seconda equazione (o la prima, indifferentemente, non la terza però) e possiamo far diventare parametro la variabile z. Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} x - 2y = -z \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \text{con matrici} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -z \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ora, con la regola di Cramer, abbiamo:

$$x = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -z & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{z}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{z}{3}$$

Pertanto le soluzioni sono

$$S = \left\{ \left(-\frac{z}{3}, \frac{z}{3}, z\right) \ : \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \ : \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

La dimensione del sottospazio S è 1 e una sua base è formata dal vettore $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln x + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 - 1}$$

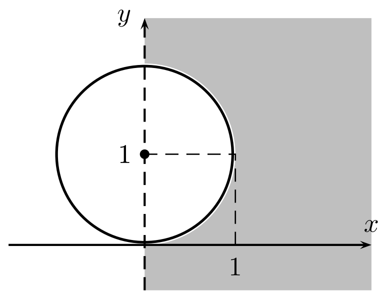
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio e si dica se tale insieme è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f. Si dica infine se il punto $(1,1)$ appartiene alla curva di livello 0 della funzione f.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 1. \end{cases}$$

La prima disequazione individua l'unione del primo e quarto quadrante (aperti), mentre la seconda individua la regione all'esterno della circonferenza di centro il punto $(0,1)$ e raggio 1, compresa la circonferenza stessa. L'intersezione delle due regioni porta al dominio rappresentato qui sotto in grigio.



Il dominio di f non è né aperto né chiuso, dato che alcuni punti di frontiera appartengono all'insieme ma altri no.

Il gradiente di f è il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 - 1}} \ , \ \frac{y-1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2 - 1}} \right).$$

Ultima domanda: il punto $(1,1)$ appartiene o no alla curva di livello 0 della funzione f? Non serve determinare la curva di livello 0 per rispondere. (Sarebbe tra l'altro impossibile perché non saremmo in grado di risolvere l'equazione $f(x,y) = 0$.) Dato che la curva di livello 0 di f è l'insieme dei punti in cui f vale zero, la domanda equivale a: "nel punto $(1,1)$ la funzione vale 0 oppure no?". Calcolando $f(1,1)$ si ottiene banalmente 0 e quindi la risposta è sì.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 01/06/2011

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x - 1 + x^3 - x^2$

✎

Possiamo scrivere, con un doppio raccoglimento,

$$P(x) = x - 1 + x^2(x - 1) = (x - 1)(1 + x^2).$$

Domanda 2. Nell'espressione $e^{x+1} - e^{x^2}$ raccogliere e^x

✎

Si ha

$$e^{x+1} - e^{x^2} = e^x \left(\frac{e^{x+1}}{e^x} - \frac{e^{x^2}}{e^x} \right) = e^x(e - e^{x^2-x}).$$

Domanda 3. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

✎

Possiamo intanto scomporre il polinomio raccogliendo x:

$$2x^3 - 2x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x + 1)(x - 2) = 0,$$

da cui le soluzioni sono $x = 0$, $x = -1$, oppure $x = 2$.

Domanda 4. Trovare le soluzioni della disequazione

$$\frac{x - 1}{3x + 1} < 1$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x \neq -\frac{1}{3}$. Poi si ha

$$\frac{x - 1}{3x + 1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 1}{3x + 1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 1 - 3x - 1}{3x + 1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x - 2}{3x + 1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1}{3x + 1} > 0.$$

Ora le soluzioni sono per i valori esterni, cioè per $x < -1$ oppure $x > -\frac{1}{3}$.

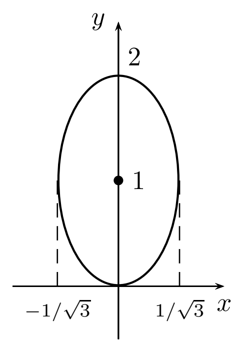
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $3x^2 + (y - 1)^2 = 1$

✎

Ricordando l'equazione canonica dell'ellisse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, conviene riscrivere l'equazione data in

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + (y - 1)^2 = 1,$$

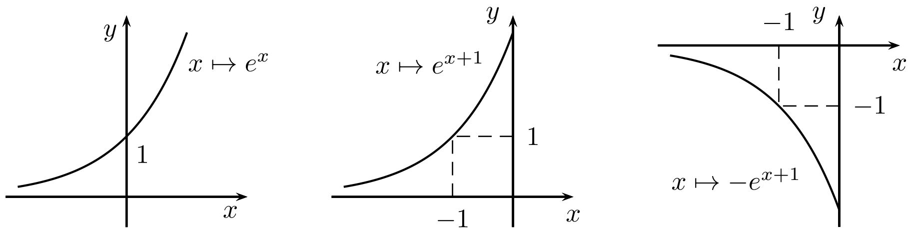
da cui si ricava che l'equazione definisce l'ellisse di centro $(0, 1)$ e semiassi $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $b = 1$, raffigurata a fianco.



Domanda 6. Usando le trasformazioni elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = -e^{x+1}$

✎

Partendo dal grafico della funzione esponenziale, si hanno le seguenti trasformazioni grafiche:



Domanda 7. Calcolare il $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{1+3^{-x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{1+3^{-x}} = \frac{2^{-\infty}}{1+3^{+\infty}} = \frac{0}{1+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = 3x + \ln(3x) + \dfrac{1}{3x}$

✎

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{3x} \cdot 3 - \frac{1}{(3x)^2} \cdot 3 = 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^2}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \left(3x + \frac{x}{3x^2+1}\right) \mathrm{d}x$

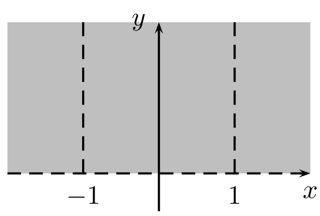
✎

$$\int \left(3x + \frac{x}{3x^2+1}\right) \mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6} \ln(3x^2+1) + c.$$

Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x, y) = \dfrac{1+\ln^2 y}{1-x^2}$

✎

Le condizioni di esistenza sono espresse dal sistema



$$\begin{cases} y > 0 \\ 1 - x^2 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Il dominio è raffigurato in grigio a fianco.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 03/06/2011

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2\ln x}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza) e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si dica se ci sono punti stazionari. Con le informazioni ottenute si disegni un grafico di f. Sulla base del grafico si determini infine l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume al variare di x nel dominio.

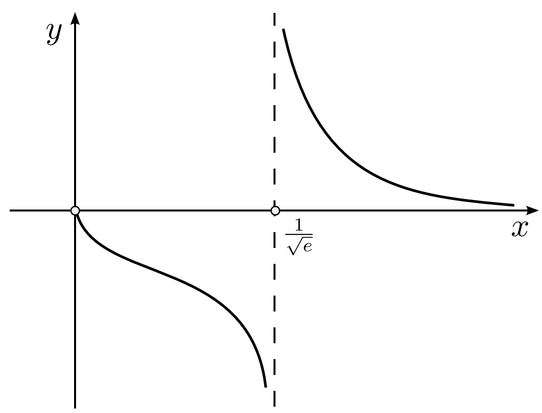
✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + 2\ln x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{cases}$$

Quindi il dominio è l'insieme $D = (0, \frac{1}{\sqrt{e}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$.

I limiti significativi sono dunque 0 da destra, $\frac{1}{\sqrt{e}}$ da destra e da sinistra e infine $+\infty$. Ecco il calcolo:



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{e possiamo dire } 0^+;$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \text{e possiamo dire } 0^-;$$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{\sqrt{e}})^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad [4]$$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{\sqrt{e}})^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 + 2\ln x)^2} \cdot \frac{2}{x}.$$

Non ci sono evidentemente punti stazionari, dato che la derivata non può annullarsi. Non è richiesto lo studio della derivata, ma è evidente che questa dove esiste è negativa e quindi la funzione f negli intervalli in cui è definita è decrescente.

Con le informazioni fin qui ottenute possiamo disegnare ad esempio il grafico qui sopra.

Sulla base del grafico possiamo rispondere all'ultima domanda. I valori che la funzione può assumere sono tutti i valori reali, ad eccezione di zero. Possiamo scrivere quindi $f(D) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (0, 3, 6) \quad , \quad v^2 = (3, -2, 5) \quad , \quad v^3 = (-1, 4, 5)$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si determinino la dimensione e una base del sottospazio da essi generato. Infine, detta V la matrice formata dai tre vettori disposti in colonna e detta f la trasformazione lineare rappresentata da V, si dica se esistono vettori v diversi dal vettore nullo per cui $f(v)$ è uguale al vettore nullo.

✎

Per stabilire se questi tre vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usiamo il metodo più veloce. Calcoliamo il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori. Dato che nel seguito viene usata la matrice V formata dai vettori in colonna, usiamo fin da subito la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \qquad \text{Si ha } \det V = (1^{\text{a}} \text{ colonna}) \; -3 \cdot (15 + 5) + 6 \cdot (12 - 2) = -3 \cdot 20 + 6 \cdot 10 = 0.$$

[4]Si osservi che il punto $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è stato escluso dal dominio poiché annulla il denominatore. Quindi, se x tende a $\frac{1}{\sqrt{e}}$, il denominatore tende a zero. Possiamo inoltre affermare che se x tende a $(\frac{1}{\sqrt{e}})^+$, il denominatore tende a 0^+, dato che la funzione a denominatore è crescente. Si osservi anche che in generale, se ho una funzione g continua e crescente tale che $g(a) = 0$, allora $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0^+$.

Quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Essi generano un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione pari al rango di V, che è evidentemente 2, grazie ad esempio al minore complementare dell'elemento di posto $(3,3)$ (cioè il determinante della sottomatrice formata con le prime due righe e le prime due colonne di V, che vale -9).

Una base di S è ad esempio formata dai primi due vettori, che sono linearmente indipendenti per quanto osservato qui sopra.

Per rispondere all'ultima domanda c'è un modo molto veloce. Sia dunque f la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice V, una trasformazione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$. L'esistenza di vettori v diversi dal vettore nullo per cui $f(v)$ è uguale al vettore nullo equivale all'esistenza di soluzioni non banali del sistema omogeneo $f(x) = 0$, cioè $Vx = 0$. Per dire se esistono soluzioni non banali di un sistema omogeneo quadrato basta conoscere il determinante della matrice. Infatti per il teorema di Cramer il sistema ha l'unica soluzione banale se e solo se $\det V \neq 0$. Quindi nel nostro caso, dato che $\det V = 0$, possiamo affermare che esistono soluzioni non banali e quindi la risposta alla domanda è sì.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln y + \sqrt{x - y^2 + 1}$$

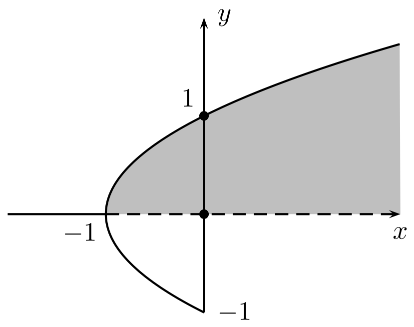
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se i punti $(0,0)$ e $(0,1)$ sono entrambi di frontiera per il dominio di f. Si calcoli infine il gradiente di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y > 0 \\ x - y^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x \geq y^2 - 1. \end{cases}$$

La prima disequazione individua l'unione del primo e secondo quadrante (aperti), mentre la seconda individua la regione a destra della parabola di equazione $x = y^2 - 1$, parabola con asse coincidente con l'asse x, concavità rivolta verso destra, che incontra l'asse y nei punti $(0,-1)$ e $(0,1)$. L'intersezione delle due regioni porta al dominio rappresentato qui sotto in grigio.



I punti $(0,0)$ e $(0,1)$ sono entrambi di frontiera per il dominio di f, anche se il secondo appartiene all'insieme mentre il primo no.

Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x - y^2 + 1}} \, , \; \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x - y^2 + 1}} \right).$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 27/06/2011

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^6 + 16x^3 + 64$

✎

Osservando che si tratta del quadrato di un binomio, possiamo intanto scrivere

$$x^6 + 16x^3 + 64 = (x^3 + 8)^2.$$

Ora il termine tra parentesi si può ulteriormente scomporre, essendo la somma di due cubi.[5] Pertanto si ha

$$x^6 + 16x^3 + 64 = (x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2$$

e il secondo termine tra parentesi non è ulteriormente scomponibile.

Domanda 2. Scrivere la frazione $\frac{9}{3^x}$ come potenza di 9

✎

Possiamo scrivere

$$\frac{9}{3^x} = \frac{9}{(9^{1/2})^x} = \frac{9}{9^{x/2}} = 9^{1-x/2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$4(\ln x)^2 = 16$$

✎

C'è intanto la condizione di esistenza $x > 0$. Si ha poi

$$4(\ln x)^2 = 16 \quad\Leftrightarrow\quad (\ln x)^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = \pm 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = e^{\pm 2}$$

Le soluzioni, entrambe accettabili, sono quindi $x = e^2$ oppure $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$3 \cdot 2^{x^2-1} < 24$$

✎

Si ha

$$3 \cdot 2^{x^2-1} < 24 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{x^2-1} < 8 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{x^2-1} < 2^3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 1 < 3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 < 4 \quad\Leftrightarrow\quad -2 < x < 2.$$

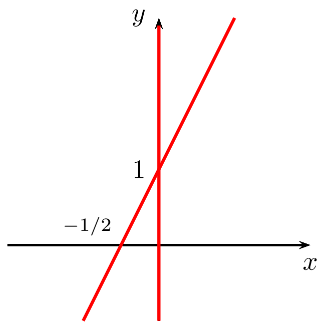
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x^3 - x^2y + x^2 = 0$

✎

Possiamo raccogliere x^2 e l'equazione diventa

$$x^2(2x - y + 1) = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x = 0 \quad\text{oppure}\quad y = 2x + 1,$$

che individuano due rette nel piano, come raffigurato a fianco.

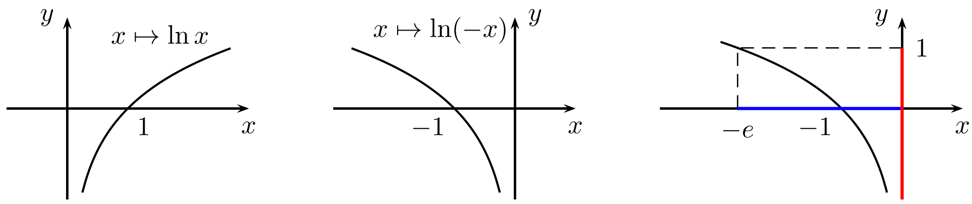


[5]Si ricordi che $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$. Quindi nel nostro caso $x^3 + 8 = x^2 - 2x + 4$.

Domanda 6. Dopo aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = \ln(-x)$, determinare l'immagine dell'intervallo $(-e, 0)$ attraverso f

✎

Con le trasformazioni grafiche elementari, partendo da $\ln x$, si hanno i grafici qui sotto. L'immagine dell'intervallo $(-e, 0)$ (in blu) è l'intervallo $(-\infty, 1)$, evidenziato in rosso nel grafico di destra.



Domanda 7. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to e^+}\left(\ln x + \frac{x-e}{\ln(x-e)}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to e^+}\left(\ln x + \frac{x-e}{\ln(x-e)}\right) = \ln e + \frac{e^+ - e}{\ln(e^+ - e)} = 1 + \frac{0^+}{\ln 0^+} = 1 + \frac{0^+}{-\infty} = 1 + 0 = 1.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{x-\frac{1}{x}}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{x-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int\left(\sqrt{5x} + \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) \mathrm{d}x$

✎

La cosa più semplice è scrivere

$$= \int\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{5}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2\sqrt{5}}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{x} + c.$$

Si poteva però anche risolverli come integrali quasi immediati dividendo e moltiplicando per l'opportuna costante.[6]

Domanda 10. Calcolare il prodotto delle due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

✎

Il prodotto righe per colonne porta alla matrice

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 5 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

[6] Intendo

$$\int\sqrt{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5(5x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{(5x)^{3/2}}{3/2} + c \quad \text{e} \quad \int\frac{1}{\sqrt{5x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int 5(5x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\frac{(5x)^{1/2}}{1/2} + c,$$

forme leggermente diverse ma equivalenti delle primitive trovate sopra.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 29/06/2011

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(-x) - 1}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza) e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si dica se ci sono punti stazionari. Con le informazioni ottenute si disegni un grafico di f. Si dica perché alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, -1]$ e si dica infine che cosa afferma la tesi del teorema.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} -x > 0 \\ \ln(-x) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \ln(-x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -x \neq e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -e \end{cases}$$

Quindi il dominio è l'insieme $D = (-\infty, -e) \cup (-e, 0)$.

I limiti significativi sono dunque $-\infty$, $-e$ da destra e da sinistra e infine 0 da sinistra. Ecco il calcolo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(+\infty) - 1} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(0^+) - 1} = 1 + \frac{1}{-\infty} = 1 + 0 = 1;$$

$$\lim_{x\to(-e)^+} f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(e^-) - 1} = 1 + \frac{1}{1^- - 1} = 1 + \frac{1}{0^-} = 1 - \infty = -\infty; \quad [7]$$

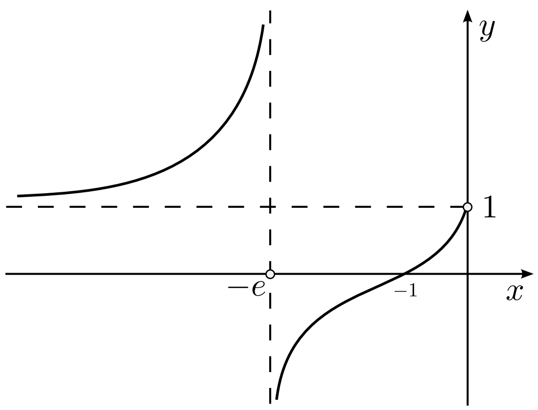
$$\lim_{x\to(-e)^-} f(x) = 1 + \frac{1}{\ln(e^+) - 1} = 1 + \frac{1}{1^+ - 1} = 1 + \frac{1}{0^+} = 1 + \infty = +\infty.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{\big(\ln(-x) - 1\big)^2} \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x\big(\ln(-x) - 1\big)^2}.$$

Non ci sono evidentemente punti stazionari, dato che la derivata non può annullarsi. Non è richiesto lo studio della derivata, ma è evidente che questa dove esiste è positiva, dato che nel dominio x è negativo, e quindi la funzione f negli intervalli in cui è definita è crescente.

Con le informazioni fin qui ottenute possiamo disegnare ad esempio il grafico che segue:



Passiamo all'ultima domanda, relativa all'applicabilità del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, -1]$.

[7] Si osservi che in generale se x tende ad un certo a diciamo da destra, allora $-x$ tende a $-a$ da sinistra. Quindi nel nostro caso (in cui $a = -e$) se x tende a $-e$ da destra, allora $-x$ tende ad e da sinistra.

Dato che la funzione f è continua nell'intervallo $(-e, 0)$, in quanto composizione di funzioni elementari, allora essa è continua anche nell'intervallo $[-2, -1]$, che è un sottoinsieme dell'altro. Dato che $[-2, -1]$ è un intervallo chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass è applicabile.

La tesi del teorema è che la funzione f nell'intervallo $[-2, -1]$ assume i valori del suo estremo inferiore e del suo estremo superiore in tale intervallo, o equivalentemente che f ha in $[-2, -1]$ un punto di massimo e un punto di minimo (globali). Non è richiesto di verificare la tesi, ma comunque osserviamo che, essendo f crescente in $[-2, -1]$, gli estremi della funzione sono rispettivamente i valori assunti agli estremi dell'intervallo, cioè $f(-2)$ ed $f(-1)$ e che quindi i punti di minimo e di massimo sono rispettivamente $x_m = -2$ e $x_M = -1$.

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (2, -1, -1) \quad , \quad v^2 = (1, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (1, 1, -2)$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si determinino la dimensione e una base del sottospazio da essi generato. Infine, detta A la matrice formata dai tre vettori disposti in riga, si risolva con il metodo di riduzione e la regola di Cramer il sistema lineare $Ax = 0$.

✎

Per stabilire se questi tre vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usiamo il metodo più veloce. Calcoliamo il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori. Dato che nel seguito viene usata la matrice A formata dai vettori disposti in riga, usiamo fin da subito la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \text{Si ha } \det V = \ (2^{\text{a}} \text{ riga}) \ -1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0.$$

Quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Essi generano un sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ di dimensione pari al rango di A, che è evidentemente 2, grazie ad esempio al minore complementare dell'elemento di posto $(3, 3)$ (cioè il determinante della sottomatrice formata con le prime due righe e le prime due colonne di A, che vale 1).

Una base di S è ad esempio formata dai primi due vettori, che sono linearmente indipendenti per quanto osservato qui sopra.

Passiamo all'ultima domanda. Si chiede di risolvere il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Con metodo di riduzione si intende quello generale studiato per risolvere i sistemi lineari, cioè il metodo che porta anzitutto ad identificare, in base al rango, se esistono equazioni dipendenti da eliminare dal sistema e successivamente se esistono variabili da trasformare in parametri. Fatta questa riduzione il sistema diventa quadrato, con possibile presenza di parametri, e viene risolto in funzione di questi.

Quindi, tornando ad osservare che il rango è 2 grazie (ad esempio) al minore complementare dell'elemento di posto $(3, 3)$, possiamo eliminare la terza equazione e trasformare in parametro la terza variabile. Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} 2x - y = z \\ x = z \end{cases} \qquad \text{con matrici} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & z \\ 1 & 0 & z \end{array}\right).$$

Per risolvere il sistema possiamo in generale utilizzare la regola di Cramer, anche se in questo caso, dato che $x = z$, una semplice sostituzione nella prima equazione porta ad avere anche $y = z$. Quindi le soluzioni sono date dal sottospazio

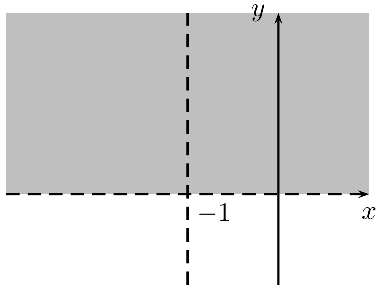
$$S_0 = \Big\{ \big(z, z, z\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ z\big(1, 1, 1\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione
$$f(x,y) = \frac{y}{x^3+1} + \ln y$$
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si consideri infine la serie di termine generale $f(n,1)$, cioè la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n,1)$, e se ne studi il carattere.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema
$$\begin{cases} y > 0 \\ x^3+1 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x^3 \neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 0 \\ x \neq -1. \end{cases}$$

La prima disequazione individua l'unione del primo e secondo quadrante (aperti), mentre la seconda esclude dal dominio la retta di equazione $x = -1$. La regione è quella rappresentata qui sotto in grigio.



Il gradiente di f è
$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{(x^3+1)^2} \cdot 3x^2 \ , \ \frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{y} \right).$$

Passiamo alla serie.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n,1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \ln 1 \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1}.$$

Dato che nel termine generale di quest'ultima a denominatore la costante è trascurabile rispetto alla potenza, per $n \to +\infty$, possiamo affermare che il termine generale della serie data
$$\frac{1}{n^3+1} \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{1}{n^3}, \ \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi per uno dei criteri di confronto (confronto asintotico) possiamo dire che le due serie hanno lo stesso carattere. Dato che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ è una serie armonica generalizzata di parametro $\alpha = 3 > 1$ essa converge e pertanto converge anche la serie data.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 19/09/2011

Domanda 1. Fattorizzare l'espressione $xe^x + x^2e^x$ raccogliendo x^3e^x

✎

Si ha

$$xe^x + x^2e^x = x^3e^x\left(\frac{xe^x}{x^3e^x} + \frac{x^2e^x}{x^3e^x}\right) = x^3e^x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 2. Completare il quadrato nell'espressione $x^2 + 5x + 1$, scrivendola nella forma $(x + a)^2 + b$

✎

$$x^2 + 5x + 1 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}.$$

Domanda 3. Trovare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$1 + x + \frac{1}{x} = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq 0$. Poi abbiamo

$$1 + x + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + x^2 + 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 = 0.$$

L'ultima equazione non ha soluzioni dato che il discriminante è negativo. Quindi l'equazione data non ha soluzioni.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 > \log_2(1 + 2x)$$

✎

Tenendo conto della condizione di esistenza la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1 + 2x > 0 \\ \log_2(1 + 2x) < \log_2 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 1 + 2x < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono date dall'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Domanda 5. Determinare la pendenza della retta di equazione $3x - 2y + 1 = 0$

✎

Basta scrivere l'equazione nella forma $y = mx + q$, ottenuta la quale la pendenza è data da m.

$$3x - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Quindi la pendenza è $\frac{3}{2}$.

Domanda 6. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2} = \frac{e^{-\infty+1}}{(-\infty)^2} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(3x + 2\sqrt{x}\right)$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{3x+2\sqrt{x}} \cdot \left(3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{3x+2\sqrt{x}} \cdot \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x\sqrt[5]{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x\sqrt[5]{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+1)^{6/5}}{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{24}\sqrt[5]{(2x^2+1)^6} + c.$$

Domanda 9. Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n} = 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{6^n} = 5\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Trattandosi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{5}{6}$, la serie converge.

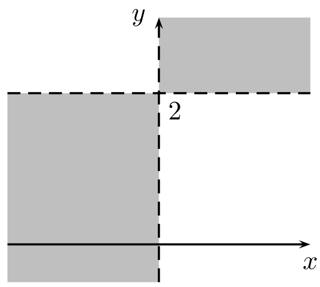
Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x, y) = \ln\left(x(y-2)\right)$

✎

La condizione di esistenza è $x(y-2) > 0$, che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 2. \end{cases}$$

La regione è raffigurata in grigio qui a fianco.



ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 21/09/2011

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(1 - x^2\right)$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza), si calcolino i limiti significativi e, con le informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si calcoli poi la derivata di f. Si dica infine se la tangente al grafico di f nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$ ha pendenza positiva, negativa o nulla.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi il dominio è l'insieme $D = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

I limiti significativi sono dunque -1 da destra, 0 da destra e da sinistra e infine 1 da sinistra. Relativamente al calcolo del limite a $(-1)^+$ si osservi che se x è in prossimità di -1 da destra significa che in valore assoluto x è minore di 1 e quindi x^2 risulta anch'esso minore di 1. Pertanto se x tende a $(-1)^+$ allora x^2 tende a 1^-.

Questa "inversione" non c'è se x tende a 1^-, perché allora in valore assoluto x è minore di 1 e quindi anche x^2 risulta minore di 1.

Ecco il calcolo dei limiti:

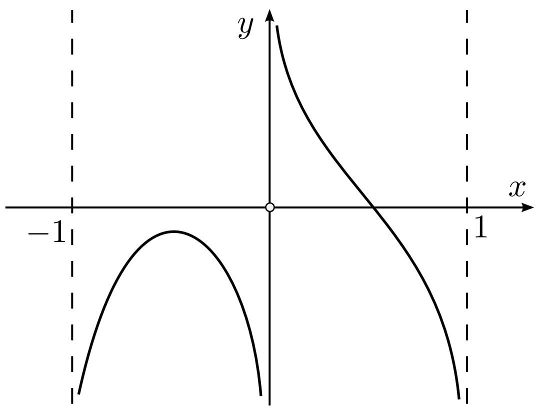
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -1 + \ln(1 - 1^-) = -1 + \ln 0^+ = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 + \ln(1 - 1^-) = -1 + \ln 0^+ = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} + \ln 1 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} + \ln 1 = -\infty.$$

Viene richiesto subito un possibile grafico, che può essere il seguente:



La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x).$$

Vediamo l'ultima domanda. Dato che la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$ non è altro che la derivata di f in $x = \frac{1}{2}$, basta calcolare $f'(\frac{1}{2})$. Si potrebbe osservare che per tutte le x dell'intervallo $(0, 1)$ la derivata è negativa. Comunque il calcolo diretto fornisce

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = -4 - \frac{4}{3} < 0.$$

Quindi la pendenza è negativa, come si poteva intuire dal grafico (anche se non si poteva escludere un punto di flesso orizzontale, quindi con pendenza nulla).

ESERCIZIO 2. Dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = (0, 1, -1, 0) \quad , \quad v^2 = (1, 0, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (-1, 1, -1, 0)$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ da essi generato. Infine, detta A la matrice formata dai tre vettori disposti in *riga*, si dica se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha soluzioni non banali (cioè non nulle).

✎

Per stabilire se questi tre vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati. Vediamo entrambi i metodi.

Con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di v^1, v^2, v^3 e poniamola uguale al vettore nullo.

$$av^1 + bv^2 + cv^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(1, 0, 0, -1) + c(-1, 1, -1, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, -a, 0) + (b, 0, 0, -b) + (-c, c, -c, 0) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b - c, a + c, -a - c, -b) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a + c = 0 \\ -a - c = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Potevamo in alternativa costruire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenuta disponendo i vettori in riga. Le tre righe risultano indipendenti se e solo se il rango di A è 3. Si noti che la 2ª e 3ª colonna sono opposte e quindi dipendenti. Le sottomatrici 3×3 che le contengono entrambe hanno certamente determinante nullo. La sottomatrice ottenuta con la 1ª, 2ª e 4ª colonna ha determinante uguale a 1. Quindi il rango di A è 3 e pertanto le sue righe sono l.i.

I vettori v^1, v^2, v^3 generano un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione pari al rango di A, quindi 3.

Passiamo all'ultima domanda. Si chiede di dire se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha soluzioni non banali.

Possiamo rispondere trovando tutte le soluzioni del sistema oppure andando diritti al punto. Il sistema omogeneo ha certamente soluzioni (dato che ha la soluzione banale). La dimensione del sottospazio S delle soluzioni è data dalla semplice formula $n - r(A)$, dove n è il numero di incognite del sistema, in questo caso 4. Pertanto la dimensione di S è 1. Possiamo dunque affermare che S contiene vettori diversi dal vettore nullo, dato che un sottospazio di dimensione 1 contiene infiniti elementi.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + 2x - y} + \ln\big(x + 2y\big)$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si scriva infine la restrizione di f sui punti del dominio che stanno sull'asse x.

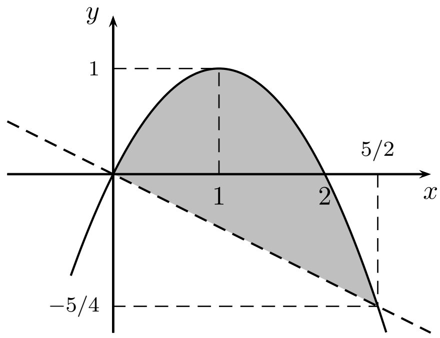
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} -x^2 + 2x - y \geq 0 \\ x + 2y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \leq -x^2 + 2x \\ y > -\frac{x}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \leq -x(x - 2) \\ y > -\frac{x}{2}. \end{cases}$$

La prima disequazione individua la regione al di sotto della parabola di equazione $y = -x(x-2)$, parabola con concavità verso il basso che incontra l'asse x in $x = 0$ e $x = 2$. La seconda disequazione individua il semipiano al di sopra della retta di equazione $y = -\frac{x}{2}$, retta per l'origine di pendenza $-\frac{1}{2}$.

La regione è quella rappresentata qui sotto in grigio.



Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x-y}} + \frac{1}{x+2y} \;,\; \frac{-1}{2\sqrt{-x^2+2x-y}} + \frac{2}{x+2y} \right).$$

La restrizione di f sui punti del dominio che stanno sull'asse x (indicati in blu in nella figura) si ottiene dall'espressione di f ponendo $y = 0$:

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = \sqrt{-x^2+2x} + \ln x \quad \text{con } x \in (0,2].$$