Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2011/12

Alberto Peretti

Maggio 2015

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 10/01/2012

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $12x^4 - 3x^2$

✎

Il polinomio si può così scomporre

$$12x^4 - 3x^2 = 3x^2(4x^2 - 1) = 3x^2(2x - 1)(2x + 1).$$

Domanda 2. Nell'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ raccogliere $\sqrt[4]{x}$

✎

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = x^{1/3} + x^{1/4} = x^{1/4}\big(x^{1/3-1/4} + 1\big) = x^{1/4}\big(x^{1/12} + 1\big) = \sqrt[4]{x}\big(\sqrt[12]{x} + 1\big).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x = \frac{1}{x+1} + 1$$

✎

Occorre porre la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi l'equazione equivale a

$$x - \frac{1}{x+1} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x - 1 - x - 1}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Le soluzioni sono quindi $x = -\sqrt{2}$ oppure $x = \sqrt{2}$, entrambe accettabili.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 - \ln(2 - 3x) > 0$$

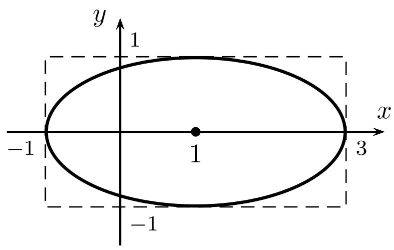
✎

C'è la condizione di esistenza $2 - 3x > 0$. La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 2 - 3x > 0 \\ \ln(2 - 3x) < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ 2 - 3x < e \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > \frac{2-e}{3}. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono date dall'intervallo $\left(\frac{2-e}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 - 1 = 0$



✎

L'equazione si può riscrivere nella forma

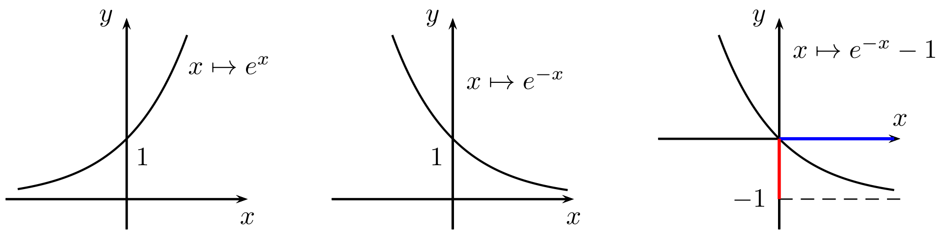
$$\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1,$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse di centro $(1, 0)$ e semiassi $a = 2$ e $b = 1$. La raffigurazione dell'ellisse è riportata a fianco.

Domanda 6. Disegnando il grafico, determinare l'immagine dell'intervallo $[0, +\infty)$ attraverso la funzione $f(x) = e^{-x} - 1$

✎

Le trasformazioni che portano al grafico sono queste:



Dal grafico si vede che l'immagine dell'intervallo $[0, +\infty)$ (in blu) è l'intervallo $(-1, 0]$ (in rosso).

Domanda 7. Calcolare il $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \cdot e^{+\infty} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln^2 x + \sqrt{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \big(\ln x + 4 \big).$$

Domanda 9. Indicare un vettore non nullo che sia ortogonale al vettore $(1, 2, 3)$

✎

I vettori ortogonali a $(1, 2, 3)$ sono i vettori (x, y, z) tali che $x + 2y + 3z = 0$. Uno di questi è ad esempio il vettore $(1, 1, -1)$.

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = x^2 \sqrt[3]{y}$

✎

La funzione si può scrivere come $f(x, y) = x^2 y^{1/3}$. Il gradiente è

$$\nabla f(x, y) = \left(2xy^{1/3} \ , \ x^2 \cdot \frac{1}{3} y^{-2/3} \right) = \left(2x \sqrt[3]{y} \ , \ \frac{x^2}{3 \sqrt[3]{y^2}} \right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 13/01/2012

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza), si calcolino i limiti significativi e, con le sole informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si calcoli poi la derivata di f. Si calcoli quindi $\int_{-e}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli infine, attraverso la definizione, $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è $x \neq 0$, quindi l'insieme di definizione è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, 0^-, 0^+ e $+\infty$.

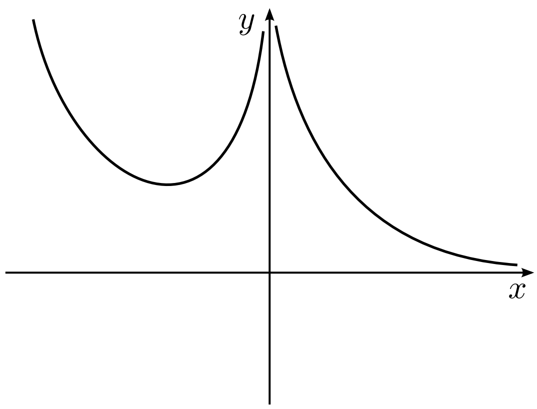
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + e^{-\infty} = 0^+ + 0^+ = 0^+;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{(-\infty)^2} + e^{+\infty} = \frac{1}{+\infty} + e^{+\infty} = 0 + \infty = +\infty;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} + e^0 = +\infty + 1 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{(0^-)^2} + e^0 = \frac{1}{0^+} + e^0 = +\infty + 1 = +\infty.$$

Un possibile grafico è il seguente:



Faccio osservare che il fatto che la funzione è positiva in tutto il suo dominio può essere dedotto dall'espressione di $f(x)$, somma di due quantità positive per ogni x.
La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} - e^{-x}.$$

Calcoliamo l'integrale definito.

$$\int_{-e}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x} - e^{-x}\right|_{-e}^{-1} = (1-e) - \left(\frac{1}{e} - e^e\right) = e^e + 1 - e - \frac{1}{e}.$$

Ora l'integrale generalizzato.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} - e^{-x}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} - e^{-b} + 1 + \frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{1}{e}.$$

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si dica se le colonne di A sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica se le righe di A sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si determini la dimensione del sottospazio generato dalle righe di A e si dica se il sottospazio generato dalle colonne di A è tutto $\mathbb{R}^3$. Infine si dica se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha soluzioni non banali (cioè soluzioni non nulle).

✎

Possiamo affermare che le colonne sono certamente linearmente dipendenti, dato che si tratta di 4 vettori in $\mathbb{R}^3$.[1]

Per stabilire se le righe r^1, r^2, r^3 sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati. Vediamo entrambi i metodi.

Con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di r^1, r^2, r^3 e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0,0,1,-1) + b(0,0,2,1) + c(1,-1,1,1) = (0,0,0,0).$$

Questo significa

$$(0,0,a,-a) + (0,0,2b,b) + (c,-c,c,c) = (0,0,0,0) \quad \text{cioè} \quad (c,-c,a+2b+c,-a+b+c) = (0,0,0,0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ -c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto le righe sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Potevamo in alternativa affermare che le tre righe risultano indipendenti se e solo se il rango di A è 3. La sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne ha determinante uguale a -3 e quindi il rango di A è 3 e pertanto le sue righe sono l.i.

La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di A è uguale al rango di A e quindi è uguale a 3.

Anche il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A ha dimensione 3 e quindi necessariamente è tutto $\mathbb{R}^3$.

Per dire se il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha soluzioni non banali, cioè soluzioni non nulle, può bastare determinare la sua dimensione. Questa è data da $n - rA$, dove n è il numero di variabili del sistema, in questo caso 4. Quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 e pertanto ci sono soluzioni non banali.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = x - \ln\Big(4 - (x-1)^2 - y^2\Big)$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si trovino infine gli eventuali punti stazionari di f.

✎

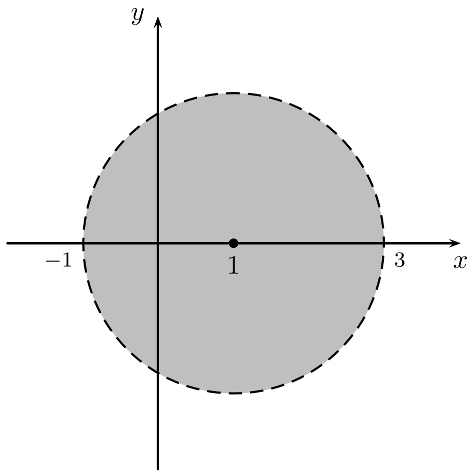
La condizione per l'esistenza della funzione f è

$$4 - (x-1)^2 - y^2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + y^2 < 4,$$

che individua il cerchio (aperto) di centro $(1,0)$ e raggio 2.

La regione è quella rappresentata qui sotto in grigio.

[1] Ricordo che un insieme formato da più vettori di quella che è la dimensione dello spazio al quale essi appartengono è sicuramente un insieme di vettori dipendenti, dato che la dimensione è appunto il massimo numero di vettori indipendenti che si possono trovare in quello spazio.



Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(1 - \frac{-2(x-1)}{4-(x-1)^2-y^2}\ ,\ -\frac{-2y}{4-(x-1)^2-y^2}\right).$$

Per determinare i possibili punti stazionari possiamo osservare anzitutto che la derivata parziale di f rispetto ad y si annulla solo per $y = 0$. Quindi i punti stazionari vanno cercati tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 + \frac{2(x-1)}{4-(x-1)^2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2(x-1)}{4-(x-1)^2} = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ 2(x-1) = (x-1)^2 - 4. \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione di secondo grado poniamo $x - 1 = t$, per cui l'equazione diventa $t^2 - 2t - 4 = 0$, che fornisce le soluzioni $t = 1 \pm \sqrt{5}$, e quindi $x - 1 = 1 \pm \sqrt{5}$, cioè $x = 2 \pm \sqrt{5}$. Le soluzioni del sistema sono quindi i due punti $(2-\sqrt{5}, 0)$ e $(2+\sqrt{5}, 0)$. Soltanto il primo appartiene al dominio della funzione. Quindi $(2-\sqrt{5}, 0)$ è l'unico punto stazionario.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/01/2012

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 + 5x + \frac{1}{4}$, scrivendolo nella forma $(x + a)^2 + b$

✎

$$x^2 + 5x + \frac{1}{4} = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 6.$$

Domanda 2. Ridurre allo stesso denominatore l'espressione $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \dfrac{1}{x \ln x}$

✎

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x} \ln^2 x + 2}{2x \ln x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\log_2(x + 1) + 1 = 0$$

✎

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \text{ (condizione di esistenza)} \\ \log_2(x + 1) = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ \log_2(x + 1) = \log_2 \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La soluzione è quindi $x = -\frac{1}{2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-1)} > \frac{1}{x-1}$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 1 + 2 - x}{x(x-1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x(x-1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1) > 0.$$

Quindi le soluzioni sono per $x < 0$ oppure $x > 1$.

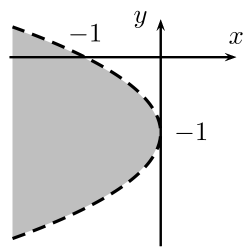
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x + (y + 1)^2 < 0$

✎

La disequazione equivale alla

$$x < -(y + 1)^2,$$

che individua la regione che sta alla sinistra della parabola di equazione $x = -(y+1)^2$, parabola con asse orizzontale, vertice nel punto $(0, -1)$ e concavità rivolta verso sinistra. La regione è rappresentata in grigio nella figura a fianco. La frontiera è esclusa.

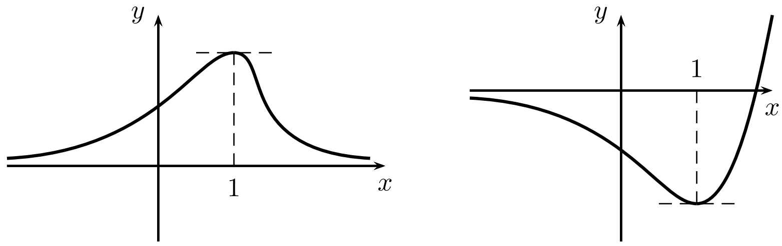


Domanda 6. Disegnare il grafico di una funzione f per la quale valgano le proprietà

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(1) = 0$$

✎

Attenzione, viene richiesto un grafico, non un'espressione analitica. Le due proprietà richieste si possono esprimere a parole dicendo che la funzione, oltre a tendere a zero per x che tende a $-\infty$, deve avere un grafico con tangente di pendenza nulla (tangente orizzontale) nel punto di ascissa $x = 1$. Fornisco due possibili grafici con le proprietà richieste.



Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{x-x^2}$

✎

Possiamo scrivere f come $f(x) = x^{1/3}e^{x-x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}e^{x-x^2} + x^{1/3}e^{x-x^2}(1-2x).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

✎

Possiamo scrivere

$$\int \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln^{-3} x\,dx = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + c = -\frac{1}{2\ln^2 x} + c.$$

Domanda 9. Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Anzitutto $\det A = -2$ e quindi A è invertibile. Poi si ha

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x\ln^2(2x+y)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln^2(2x+y) + x\cdot 2\ln(2x+y)\cdot\frac{2}{2x+y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot 2\ln(2x+y)\cdot\frac{1}{2x+y}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 27/01/2012

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza), si calcolino i limiti significativi e, con le sole informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si calcoli poi la derivata di f. Si scriva infine l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa e.

✎

Le condizioni di esistenza per la funzione f sono espresse dal seguente sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Il dominio di f è quindi l'insieme $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: 0^+, 1^-, 1^+ e $+\infty$.

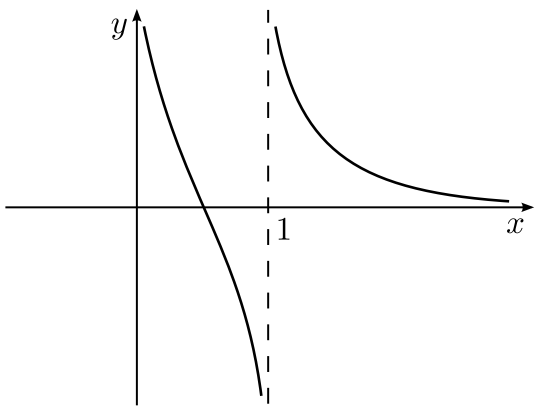
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{\ln(0^+)} + \frac{1}{0^+} = \frac{1}{-\infty} + \infty = 0 + \infty = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{\ln(1^-)} + 1 = \frac{1}{0^-} + 1 = -\infty + 1 = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{\ln(1^+)} + 1 = \frac{1}{0^+} + 1 = +\infty + 1 = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0^+ + 0^+ = 0^+.$$

Un possibile grafico è il seguente:



La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2 \ln^2 x}\Big(x + \ln^2 x\Big).$$

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa e è

$$y = f(e) + f'(e)(x - e) = 1 + \frac{1}{e} - \frac{e+1}{e^2}(x - e).$$

ESERCIZIO 2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V generato dai vettori

$$v^1 = (0, 1, -2) \quad , \quad v^2 = (1, -1, 1) \quad , \quad v^3 = (2, 1, -4).$$

Si determini la dimensione di V e si indichi una base di V. Si dica se il vettore $w = (3, -1, -1)$ appartiene al sottospazio V e, in caso affermativo, si scriva w come combinazione lineare dei vettori v^1, v^2, v^3. Si trovi infine in V un vettore ortogonale a v^1.

✎

Il sottospazio V generato dai tre vettori è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di v^1, v^2, v^3. La dimensione di V è uguale al rango della matrice formata con i tre vettori.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \text{(prima riga)} \; -1 \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 0$$

e quindi il rango è 2 grazie ad esempio al minore principale di NW del secondo ordine, che vale -1.

Pertanto la dimensione di V è 2.

Una base di questo sottospazio è formata da due vettori indipendenti, scelti opportunamente nell'insieme $\{v^1, v^2, v^3\}$. Il minore utilizzato per stabilire che il rango è 2 ci dice anche che v^1 e v^2 sono l.i. e quindi formano una base del sottospazio.

Consideriamo ora il vettore $w = (3, -1, -1)$. Accostandolo a v^1 e v^2, che sono linearmente indipendenti, otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ che ha ancora determinante nullo.}$$

Quindi w dipende da v^1 e v^2 e pertanto appartiene a V, il sottospazio da essi generato.

Possiamo quindi scrivere w come combinazione lineare di v^1 e v^2. Poniamo $w = av^1 + bv^2$. Questa equivale a

$$(3, -1, -1) = a(0, 1, -2) + b(1, -1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad (3, -1, -1) = (0, a, -2a) + (b, -b, b) \quad \Leftrightarrow \quad (3, -1, -1) = (b, a - b, -2a + b),$$

che risulta vero per $a = 2$ e $b = 3$. Quindi $w = 2v^1 + 3v^2$. Faccio osservare che la domanda era di scrivere w come c.l. di v^1, v^2, v^3 e quindi, per rispondere esattamente alla domanda, banalmente possiamo scrivere $w = 2v^1 + 3v^2 + 0v^3$.

L'ultima richiesta è di trovare in V un vettore ortogonale a v^1. Abbiamo appena visto che i vettori di V, cioè le c.l. di v^1 e v^2, si scrivono come $(b, a - b, -2a + b)$, con a e b parametri reali arbitrari. Allora vogliamo che un vettore di questo tipo abbia un prodotto interno nullo con v^1, cioè

$$\big\langle (b, a - b, -2a + b), (0, 1, -2) \big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + 4a - 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{5}{3}a.$$

Ad esempio, con $a = 3$ e $b = 5$ si ottiene il vettore $(5, -2, -1)$. Va anche detto che, non essendo nella domanda richiesto che il vettore cercato sia diverso dal vettore nullo, si poteva rispondere molto più direttamente che il vettore nullo è certamente un vettore di V ed è certamente ortogonale a v^1.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{-x - y} + \ln(1 - xy)$$

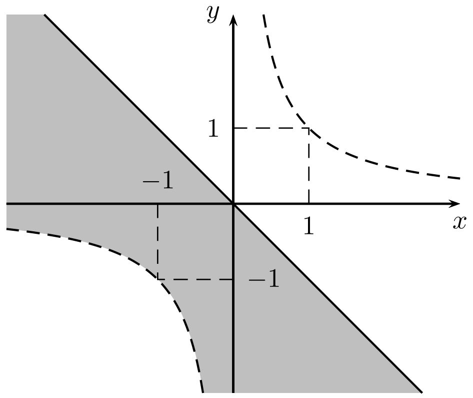
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si dica infine se il punto $(-1, 0)$ è un punto stazionario di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} -x - y \geq 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \leq -x \\ xy < 1. \end{cases}$$

La prima disequazione definisce il semipiano che sta al di sotto della bisettrice del secondo e quarto quadrante, retta compresa. La seconda disequazione definisce la regione compresa tra i rami dell'iperbole di equazione $xy = 1$, iperbole esclusa. L'intersezione dei due insiemi fornisce il dominio della funzione f, rappresentato in grigio nella figura che segue.



Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x-y}} - \frac{y}{1-xy} \ , \ -\frac{1}{2\sqrt{-x-y}} - \frac{x}{1-xy} \right).$$

Il punto $(-1,0)$ non è stazionario per la funzione f, dato che si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = -\frac{1}{2}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 07/02/2012

Domanda 1. Scomporre in fattori il polinomio $x^4 + x^3 - x^2 + 1$ usando la regola di Ruffini (cercare prima uno zero del polinomio nell'insieme $\{-1, 1\}$)

✎

Anzitutto troviamo lo zero del polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$. Il suggerimento è di cercare nell'insieme $\{-1, 1\}$. Si ha $P(1) = 2$ e $P(-1) = 0$. Pertanto -1 è lo zero cercato e a questo punto il teorema di Ruffini dice che il polinomio $P(x)$ è divisibile per il monomio $x + 1$. Con la regola di Ruffini abbiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Quindi la scomposizione richiesta è $P(x) = (x + 1)(x^3 - x + 1)$.

Domanda 2. Scomporre in fattori l'espressione $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{e^x}{x}$ raccogliendo $\dfrac{1}{x^2}$

✎

$$\frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{e^x}{x} \cdot x^2\right) = \frac{1}{x^2}\Big(1 + xe^x\Big).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$3e^{x+1} - 2 = 0$$

✎

$$3e^{x+1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1} = e^{\ln \frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = \ln \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln \frac{2}{3} - 1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 > 0$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Si tratta poi di una disequazione logaritmica riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $\log_2 x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 + t - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t - 1)(t + 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < -2 \ \lor \ t > 1.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$\log_2 x < -2 \ \lor \ \log_2 x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 x < \log_2 \frac{1}{4} \ \lor \ \log_2 x > \log_2 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{4} \ \lor \ x > 2,$$

che però, tenendo conto della condizione di esistenza, diventano

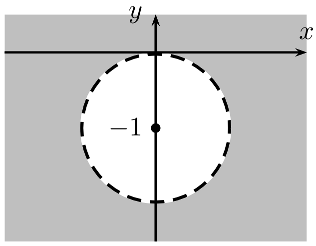
$$0 < x < \frac{1}{4} \ \lor \ x > 2, \text{ cioè l'insieme } \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (2, +\infty).$$

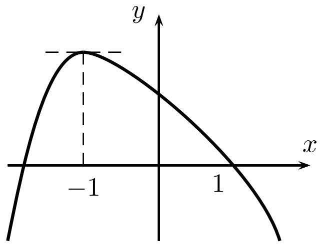
Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 + y^2 + 2y > 0$

✎

L'equazione corrispondente $x^2 + y^2 + 2y = 0$ può essere l'equazione di una circonferenza. Dobbiamo però verificare che in effetti sia così, identificando centro e raggio. Con il completamento del quadrato si ha

$$x^2 + y^2 + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2y + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 1)^2 = 1.$$





È in effetti l'equazione di una circonferenza, di centro $(0, -1)$ e raggio 1. Pertanto la disequazione proposta definisce la regione di piano all'esterno della circonferenza, frontiera esclusa. L'insieme è rappresentato qui sopra a sinistra.

Domanda 6. Disegnare il grafico di una funzione f per la quale valgano le proprietà

$$f'(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 0$$

✎

Attenzione, viene richiesto un grafico, non un'espressione analitica. Le due proprietà richieste si possono esprimere a parole dicendo che la funzione deve assumere valore zero per $x = 1$ e deve avere un grafico con tangente di pendenza nulla (tangente orizzontale) nel punto di ascissa $x = -1$. Un possibile grafico con le proprietà richieste è raffigurato qui sopra a destra.

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$

✎

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln^2 x - x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}.$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, \mathrm{d}x$

✎

Si osservi anzitutto che la derivata del denominatore è $2e^{2x}$, e quindi siamo in presenza di un integrale "quasi immediato" del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x$ non appena ci procuriamo la costante 2 all'interno dell'integrale. Possiamo quindi dividere e moltiplicare per 2 e si ha

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(1 + e^{2x}\right) + c \text{ (il valore assoluto si può togliere).}$$

Domanda 9. Nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2, 3)$

✎

Il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2, 3)$ è per definizione il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la 2ª riga e la 3ª colonna, cambiato di segno in quanto "il posto $(2, 3)$ è dispari".[2]

Quindi la risposta è $(-1) \cdot (-1 + 2) = -1$.

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = (2x + y^2)e^{2y}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{2y} + (2x + y^2) \cdot 2e^{2y}.$$

[2] Ricordo che in generale si definisce complemento algebrico dell'elemento di posto (i, j) la quantità $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, dove M_{ij} è il minore complementare e cioè il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna. Si usa dire "posto dispari" quando la somma $i + j$ è dispari.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 10/02/2012

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x - 1}$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza), si calcolino i limiti significativi e, con le sole informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si calcoli poi la derivata di f. Si provi infine che alla funzione f è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo $[\frac{1}{e}, 2]$ e si dica che cosa si può quindi affermare.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e. \end{cases}$$

Quindi il dominio è l'insieme $D = (0, e) \cup (e, +\infty)$.

I limiti significativi sono dunque 0 da destra, e da destra e da sinistra e infine $+\infty$. Ecco il calcolo:

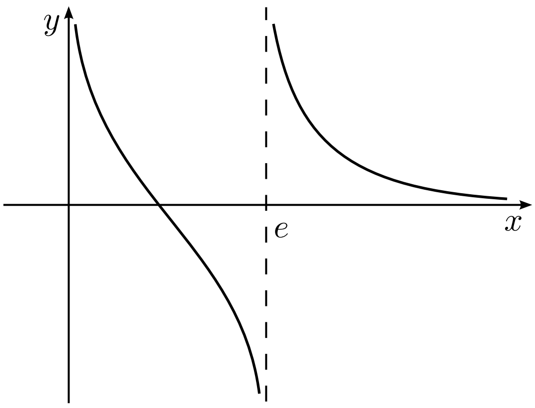
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{\ln(0^+) - 1} = +\infty + \frac{1}{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{\ln(+\infty) - 1} = 0^+ + \frac{1}{+\infty} = 0^+ + 0^+ = 0^+;$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{\ln(e^+) - 1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{0^+} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{\ln(e^-) - 1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Con le informazioni fin qui ottenute possiamo disegnare ad esempio il grafico che segue:



La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\ln x - 1)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Per provare che è applicabile il teorema degli zeri dobbiamo verificare che sono vere le ipotesi del teorema, e cioè che la funzione f è continua nell'intervallo (che è chiuso e limitato) $[\frac{1}{e}, 2]$ e che inoltre i valori di f agli estremi dell'intervallo hanno segno opposto.

La funzione è certamente continua dove esiste, cioè nell'insieme D, dato che è una somma di funzioni elementari (o composte di funzioni elementari). Dopo aver osservato che l'intervallo $[\frac{1}{e}, 2]$ è interamente contenuto nel dominio di f, possiamo affermare che f è continua in $[\frac{1}{e}, 2]$. Si osservi che $[\frac{1}{e}, 2] \subset (0, e)$.

I valori di f agli estremi sono

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} + \frac{1}{\ln\frac{1}{e} - 1} = e - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln 2 - 1}.$$

Con una calcolatrice[3] si trova che in effetti $f(\frac{1}{e}) = 2.22$ e $f(2) = -2.76$. Le ipotesi sono pertanto verificate.

A questo punto possiamo affermare che anche la tesi del teorema è vera e cioè esiste un punto interno all'intervallo $[\frac{1}{e}, 2]$ in cui la funzione si annulla. In realtà tale punto è $x = 1$, ma è un "caso fortunato".[4]

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Si dica tra quali spazi opera la trasformazione e scriva la sua matrice di rappresentazione. Si determini il rango di f e si indichi una base dell'immagine di f. Si provi infine che il vettore $w = (100, 99, 1)$ appartiene a tale immagine, scrivendolo come combinazione lineare dei vettori della base indicata.

✎

La trasformazione f è definita in $\mathbb{R}^3$ e assume i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, pertanto possiamo scrivere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

La matrice che rappresenta f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di f è la dimensione della sua immagine (un sottospazio di $\mathbb{R}^3$) e coincide con il rango della matrice A. Calcoliamo intanto il determinante di A. Sviluppando rispetto alla prima riga si ha

$$\det A = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Il rango di A non è 3 e possiamo dire che è 2 grazie ad esempio al minore principale di NO di ordine 2, che è -1.

L'immagine è quindi un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Una sua base è data da una coppia di generatori indipendenti. Dato che le colonne di A sono generatori dell'immagine, basta identificare due colonne indipendenti nella matrice A. Ancora grazie al minore di NO usato poco fa possiamo dire che le prime due colonne formano una base dell'immagine di f. Quindi scrivo

$$\text{base di Im}f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per provare infine che il vettore $w = (100, 99, 1)$ appartiene all'immagine di f scriviamolo come combinazione lineare dei vettori della base trovata. Questo significa porre

$$(100, 99, 1) = a(1, 0, 1) + b(0, -1, 1) \quad \text{cioè} \quad (100, 99, 1) = (a, -b, a + b).$$

Questa scrittura equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} a = 100 \\ -b = 99 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

che non richiede nemmeno di essere risolto in quanto i valori di a e b forniti dalle prime due equazioni soddisfano la terza. Quindi è provato che w sta nell'immagine di f.

---

[3] Faccio notare che si può anche evitare di usare la calcolatrice. Si ha infatti $f(\frac{1}{e}) > 0$ in quanto $e > \frac{1}{2}$ e $f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln 2 - 1} < 0$, dato che la disuguaglianza equivale a $\frac{1}{2} < \frac{1}{1 - \ln 2}$, questa a $2 > 1 - \ln 2$ e questa a sua volta a $\ln 2 > -1$, che è evidentemente vera.

[4] Spiego entrambi gli aspetti, cioè come si trova la soluzione e perché è un caso fortunato. L'equazione è $\frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x - 1} = 0$ ed equivale a $\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - \ln x}$ e quindi a $x = 1 - \ln x$ e infine a $\ln x = 1 - x$. Ora aiutandosi con un semplice disegno dei due grafici ci si accorge che l'intersezione si ha per $x = 1$.

Si tratta però di un caso molto particolare. Basterebbe avere un'equazione lievemente modificata come $\ln x = 2 - x$ per trovarsi nell'impossibilità di risolvere analiticamente l'equazione, dato che presenta un caso per cui non abbiamo un metodo esatto di risoluzione.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{xy} + \ln(x - y^2)$$

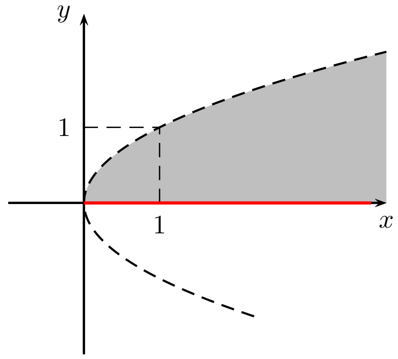
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio e si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto nè chiuso. Si calcoli poi il gradiente di f. Si scriva la restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio e si dica infine se in qualche punto dell'asse x tale restrizione si annulla.

✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ x - y^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x > y^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x > y^2. \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni. Il primo fornisce l'insieme raffigurato in grigio qui sotto



Il dominio di f non è né aperto né chiuso, dato che alcuni punti di frontiera appartengono all'insieme ma altri no.

Il gradiente di f è il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y + \frac{1}{x - y^2} \ , \ \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x - \frac{2y}{x - y^2} \right).$$

La restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio, indicati in rosso nella figura qui sopra, si ottiene ponendo nell'espressione di f $y = 0$. Si ha

$$f\Big|_{y=0} = \ln x.$$

Tale restrizione si annulla se e solo se $\ln x = 0$, cioè se e solo se $x = 1$. Il punto $(1,0)$ appartiene in effetti al dominio di f e quindi è una risposta accettabile.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 01/06/2012

Domanda 1. Scomporre in fattori il polinomio $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$ usando la regola di Ruffini (cercare prima uno zero del polinomio nell'insieme $\{-2, -1, 1, 2\}$)

✎

Anzitutto troviamo lo zero del polinomio $P(x) = x^4+x^3-x^2+1$. Il suggerimento è di cercare nell'insieme $\{-2, -1, 1, 2\}$. Si ha $P(-2) = 0$ (risulta poi $P(-1) = -1$, $P(1) = 9$ e $P(2) = 44$). Pertanto -2 è lo zero cercato e a questo punto il teorema di Ruffini dice che il polinomio $P(x)$ è divisibile per il monomio $x + 2$. Con la regola di Ruffini abbiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & & -2 & 0 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Quindi la scomposizione richiesta è $P(x) = (x + 2)(x^3 + x + 1)$.

Domanda 2. Scomporre in fattori l'espressione $x^2e^{x+1} - \frac{1}{x}e^{-x}$ raccogliendo xe^x

✎

$$x^2e^{x+1} - \frac{1}{x}e^{-x} = xe^x\left(\frac{x^2e^{x+1}}{xe^x} - \frac{\frac{1}{x}e^{-x}}{xe^x}\right) = xe^x\left(ex - \frac{1}{x^2e^{2x}}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2 \cdot 5^{2x} + 5^x - 1 = 0$$

✎

Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $5^x = t$ l'equazione diventa

$$2t^2 + t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 \ \vee \ t = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$5^x = -1 \ \vee \ 5^x = \frac{1}{2}.\quad \text{La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione } x = \log_5 \frac{1}{2}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} > 1$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 1 - x - 1}{x + 1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x}{x + 1} > 0.$$

Questa equivale ai sistemi

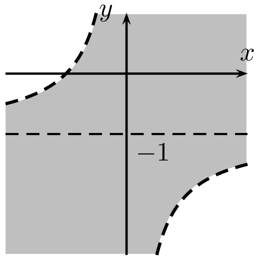
$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \ \vee \ x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1. \end{cases}$$

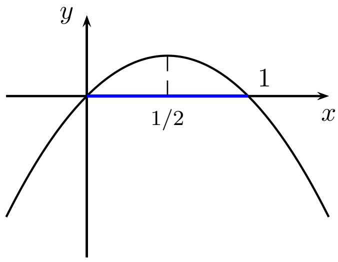
Il secondo sistema è impossibile, mentre il primo fornisce le soluzioni, che sono date dall'insieme $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x(y+1)+1>0$

✎

L'equazione corrispondente $x(y+1)+1=0$ equivale a $x(y+1)=-1$ e individua l'iperbole di centro $(0,-1)$, asintoti dati dall'asse y e dalla retta di equazione $y=-1$, iperbole che sta nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante rispetto al centro. La disequazione è verificata dal centro e quindi individua la parte del piano che, rispetto ai rami dell'iperbole, contiene il centro. La frontiera (i punti sull'iperbole) è esclusa. La rappresentazione è qui sotto a sinistra in grigio.





Domanda 6. Determinare il punto di massimo e il massimo della funzione $f(x)=-x(x-1)$ nell'intervallo $[0,1]$

✎

Il grafico di f è una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che incontra l'asse x nei punti di ascissa 0 e 1. Il grafico è qui sopra a destra.

Dal grafico si vede che in corrispondenza dei punti dell'intervallo $[0,1]$ il punto di massimo è in $x=\frac{1}{2}$ e il massimo di f, cioè il valore massimo che f assume, è pertanto $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=\dfrac{1}{xe^{x^2}}$

✎

$$f'(x)=-\frac{1}{(xe^{x^2})^2}\Big(1\cdot e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x\Big)=-\frac{1+2x^2}{x^2e^{x^2}}.$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

✎

L'integrale si può fare per parti (si noti che non è un integrale quasi immediato).

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c.$$

Domanda 9. Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$, calcolare il prodotto $A\cdot A^T$

✎

Il prodotto (righe per colonne) di A per A trasposta è

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&5&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)=\dfrac{y}{\ln x}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y}{x\ln^2 x}\qquad\text{e}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\ln x}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/06/2012

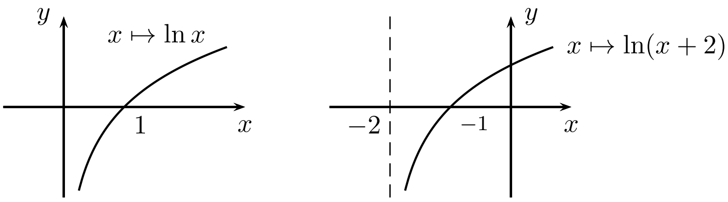
ESERCIZIO 1. Data la funzione

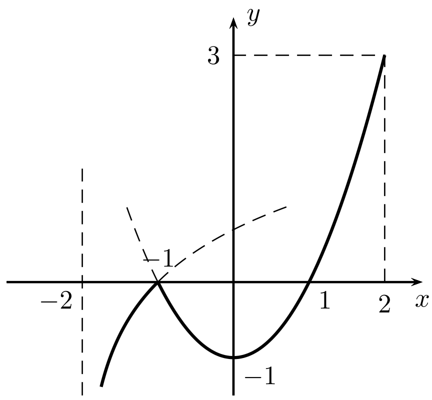
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & \text{se } -2 < x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } -1 \le x \le 2, \end{cases}$$

se ne disegni il grafico, servendosi delle trasformazioni grafiche elementari. Si dica se la funzione è limitata inferiormente/superiormente nell'intervallo dato. Si indichino i punti a in cui risulta $f(a) = 0$ e i punti b in cui $f'(b) = 0$. Si dica se ci sono punti dell'intervallo $(-2, 2]$ in cui la funzione f non è continua o non è derivabile, motivando adeguatamente la risposta.

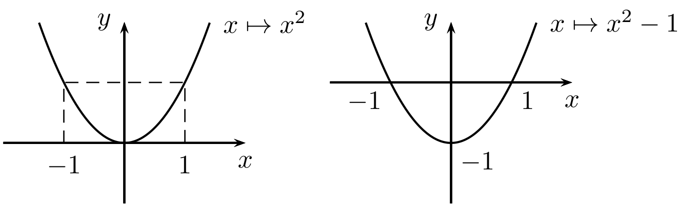
✎

La trasformazione della funzione logaritmica è la seguente





La trasformazione della funzione potenza x^2 è la seguente



Pertanto il grafico della funzione f è quello riportato qui sopra a destra.

Dal grafico di f risulta evidente che la funzione non è limitata inferiormente (si ha $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$) mentre è limitata superiormente.[5]

Sempre dal grafico possiamo vedere che esistono "due punti a" in cui la funzione si annulla e sono $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$. Inoltre, ancora dal grafico, è evidente l'esistenza di un punto stazionario, cioè un punto b in cui la derivata si annulla e si tratta di $b = 0$ (il punto di minimo della parabola).

Chiudiamo con le domande su continuità e derivabilità.

Anzitutto possiamo dire che dal grafico risulta che la f è continua nell'intervallo in cui è definita. Ricordo che per motivare la cosa in modo più rigoroso dobbiamo dire quanto segue.

La funzione f è certamente continua negli intervalli $(-2, -1)$ e $(-1, 2]$,[6] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = -1$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo però affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = -1$ da destra, in quanto in un intorno destro di -1 coincide con il polinomio. Quindi è sufficiente verificare la continuità da sinistra. Faccio notare che da sinistra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = -1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a sinistra del punto essa coincide con la funzione logaritmica.

La continuità da sinistra è data dall'uguaglianza tra

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \ln(x+2) = \ln 1 = 0.$$

[5] Non si cada nel frequente errore di pensare che la funzione sia illimitata superiormente pensando "a tutta la parabola". La funzione f viene definita nell'intervallo $(-2, 2]$ e quindi "in $x = 2$ finisce".

[6] Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo aperto $(-2, -1)$, cioè in tutti i punti x, con $-2 < x < -1$ e nell'intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra $(-1, 2]$, e cioè in tutti i punti x, con $-1 < x \le 2$. Primo: in $x = 2$ si intende che la continuità c'è da sinistra (la funzione a destra di 2 non è definita). Secondo (e più importante): non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda il punto $x = -1$, che quindi andrà studiato successivamente.

Passiamo alla derivabilità. Possiamo intanto dire che dal grafico pare esserci un punto di non derivabilità in $x = -1$. Per provarlo possiamo, in modo simile a prima, dire intanto che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-2, -1)$ e $(-1, 2)$, coincidendo con funzioni elementari. Sfruttando appunto la derivabilità in questi punti possiamo poi scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{se } -2 < x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x < 2. \end{cases}$$

Pertanto avremo[7]

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{1}{x+2} = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} 2x = -2.$$

Quindi f non è derivabile in $x = -1$ (c'è un punto angoloso).

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Si dica in quale spazio è definita la trasformazione e in quale spazio ha i suoi valori. Si scriva poi la sua matrice di rappresentazione. Si determini il rango di T e si indichi una base dell'immagine di T. Si dica infine se tra i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ almeno uno appartiene all'immagine di T.

✎

La trasformazione T è definita in $\mathbb{R}^2$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, cioè possiamo scrivere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

La matrice di rappresentazione della trasformazione lineare T è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango di T, cioè la dimensione dell'immagine di T, coincide con il rango della matrice A, che risulta essere 2 grazie ad esempio al minore che si ottiene dalle ultime due righe (che vale -3).

Dato che le due colonne della matrice A sono indipendenti, una base di ImT è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per stabilire se un vettore fondamentale appartiene all'immagine di T possiamo procedere in almeno due modi: cercare di scriverlo come combinazione lineare dei vettori della base appena trovata, oppure scoprire se dipende o no da quei vettori usando il concetto di rango.

Illustro i due modi. Consideriamo il primo vettore fondamentale $u^1 = (1, 0, 0)$. Scriverlo come combinazione lineare di $(1, -1, 1)$ e $(-2, 2, 1)$ significa scrivere

$$(1,0,0) = a(1,-1,1) + b(-2,2,1) \quad \Leftrightarrow \quad (1,0,0) = (a,-a,a) + (-2b,2b,b) \quad \Leftrightarrow \quad (1,0,0) = (a-2b, -a+2b, a+b),$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ -a + 2b = 0 \\ a + b = 0, \end{cases}$$

sistema evidentemente impossibile in quanto le prime due equazioni sono incompatibili.

[7] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

Lo stesso si può fare ora con gli altri due vettori fondamentali $u^2 = (0, 1, 0)$ e $u^3 = (0, 0, 1)$.

Vediamo ora l'altro metodo, applicato di nuovo al primo vettore fondamentale $u^1 = (1, 0, 0)$. Possiamo accostare u^1 come terza colonna agli altri due vettori e scrivere la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è -3 e quindi i tre vettori sono indipendenti. Pertanto questo conferma che u^1 non si può scrivere come c.l. dei due vettori della base. Con u^2 otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ il cui determinante è ancora } -3$$

e con u^3 otteniamo invece la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ il cui determinante questa volta è } 0.$$

Quindi u^3 dipende dagli altri due e pertanto appartiene all'immagine di T.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y(x+1)} + \ln(1 - y^2)$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli poi il gradiente di f. Si dica infine se la funzione ha punti stazionari.

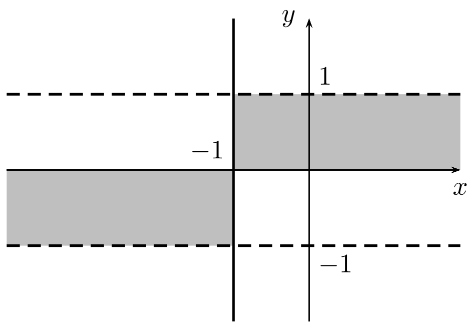
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} y(x+1) \geq 0 \\ 1 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ y^2 < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 0 \\ x+1 \leq 0 \\ y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 0 \\ x \leq -1 \\ -1 < y < 1. \end{cases}$$

Si noti che la terza disequazione è la stessa nei due sistemi (in quanto l'argomento del logaritmo deve essere positivo), mentre la positività dell'argomento della radice si può avere con entrambi i fattori positivi oppure con entrambi i fattori negativi.

Il dominio di f è raffigurato in grigio qui sotto.



Il dominio di f non è né aperto né chiuso, dato che alcuni punti di frontiera appartengono all'insieme e altri no.

Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{2\sqrt{y(x+1)}} \, , \, \frac{x+1}{2\sqrt{y(x+1)}} - \frac{2y}{1-y^2} \right).$$

Non ci sono punti stazionari. Basta osservare che la derivata parziale rispetto ad x non può annullarsi, dato che il numeratore y non può essere nullo in quanto si annullerebbe anche il denominatore.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/06/2012

Domanda 1. Si dica quale dei polinomi

$$(x+1) \quad , \quad (x-1)$$

è un divisore del polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$

✎

Si può rispondere in due modi: effettuando la divisione (si può usare in entrambi i casi la regola di Ruffini) oppure usando il teorema di Ruffini. Vediamo questa seconda strada.
Detto P il polinomio dato, basta calcolare $P(1)$ e $P(-1)$ e stabilire quale dei due vale zero. Si ha

$$P(1) = 3 - 5 + 1 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad P(-1) = 3 + 5 + 1 + 1 = 10.$$

Quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Domanda 2. Nell'espressione $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ raccogliere $\sqrt{x}$

✎

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x^{1/2} + x^{1/3} = x^{1/2}\big(1 + x^{1/3-1/2}\big) = x^{1/2}\big(1 + x^{-1/6}\big) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$(1 - t^2)(1 - e^{-t}) = 0$$

✎

L'equazione equivale a (legge di annullamento del prodotto)

$$1 - t^2 = 0 \ \vee \ 1 - e^{-t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 1 \ \vee \ e^{-t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 1 \ \vee \ t = 0.$$

Le soluzioni sono pertanto date dall'insieme $S = \{-1, 0, 1\}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$$

✎

Occorre porre la condizione di esistenza $x \neq 0$. Poi l'equazione equivale a

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2} < 0.$$

Il numeratore si annulla per $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ed è negativo per valori interni. Quindi la disequazione equivale a

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

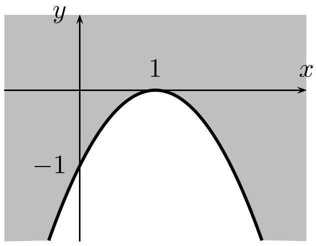
Le soluzioni sono quindi date dall'insieme $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - 2x + y + 1 \geq 0$

✎

La disequazione equivale a

$$y \geq -x^2 + 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq -(x^2 - 2x + 1) \quad \Leftrightarrow \quad y \geq -(x-1)^2.$$

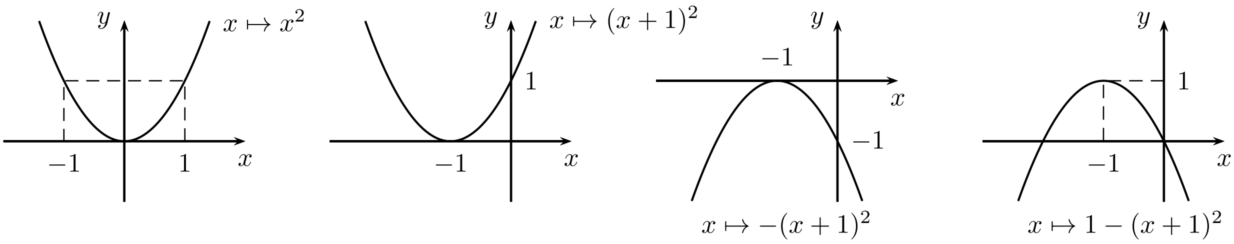


L'equazione corrispondente individua nel piano la parabola con asse verticale dato dalla retta $x = 1$, concavità rivolta verso il basso e vertice nel punto $(1, 0)$. La disequazione individua la regione di piano che sta al di sopra della parabola, frontiera compresa. La regione è raffigurata in grigio qui sopra.

Domanda 6. Usando le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - (x + 1)^2$

✎

Il grafico si può ottenere a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$ con le trasformazioni indicate qui sotto



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{-e^{-x}}$

✎

Con l'algebra dei limiti $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{-e^{-x}} = \frac{\ln(\frac{1}{+\infty})}{-e^{-\infty}} = \frac{\ln(0^+)}{-0^+} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \big(e^{-x} - x\big)^4$

✎

$$f'(x) = 4\big(e^{-x} - x\big)^3 \cdot \big(- e^{-x} - 1\big).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

✎

Possiamo scrivere
$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \ln^{-2} x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^{-1} x}{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

Domanda 10. Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3$

✎

La matrice è
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 18/06/2012

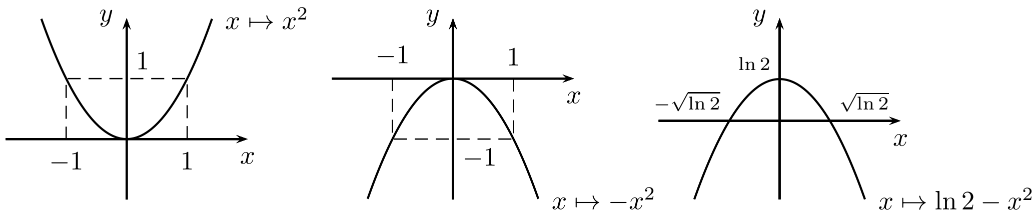
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln 2 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(2-x) & \text{se } 0 < x < 2, \end{cases}$$

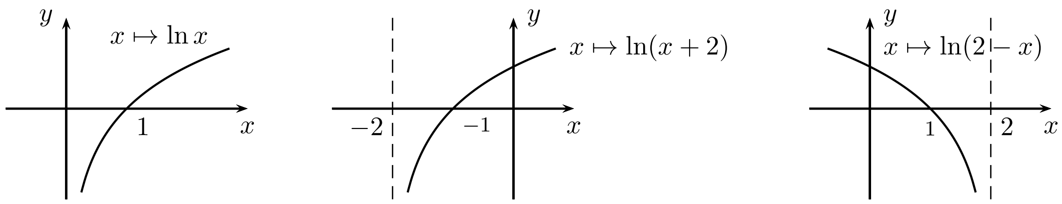
se ne disegni il grafico, servendosi delle trasformazioni grafiche elementari. Si dica, sulla base del grafico, se la funzione è continua nell'intervallo dato e si confermi quanto trovato usando la definizione. Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

✎

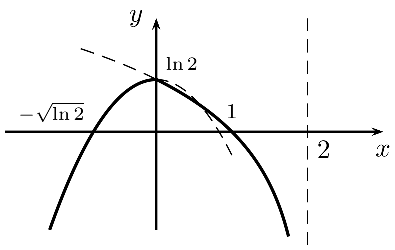
Il grafico della funzione $x \mapsto \ln 2 - x^2$ si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$ con le trasformazioni qui raffigurate



Il grafico della funzione $x \mapsto \ln(2-x)$ si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto \ln x$ con le trasformazioni qui raffigurate



Pertanto il grafico della funzione f è questo.



Dal grafico possiamo intuire che la funzione è continua. È però richiesto di confermarlo usando la definizione.

Possiamo intanto affermare che la funzione f è certamente continua negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, 2)$,[8] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = 0$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo però affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 0$ da sinistra, in quanto in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione logaritmica.

La continuità da destra è data dall'uguaglianza tra

$$f(0) = \ln 2 - 0 = \ln 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(2-x) = \ln 2.$$

L'ultima domanda è se è applicabile alla funzione f il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$.

[8]Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo aperto $(-\infty, 0)$, cioè in tutti i punti x, con $x < 0$ e nell'intervallo aperto $(0, 2)$, e cioè in tutti i punti x, con $0 < x < 2$. Attenzione. Non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda il punto $x = 0$, che quindi andrà studiato successivamente.

Abbiamo appena verificato che la funzione è continua e quindi restano le altre due ipotesi, e cioè che f è derivabile nei punti interni dell'intervallo e che assume lo stesso valore agli estremi. La cosa più semplice è sicuramente verificare se il valore agli estremi è lo stesso.

$$f(-1) = \ln 2 - 1 \quad \text{e} \quad f(1) = 0$$

e quindi questa condizione non è verificata e il teorema non è applicabile.

Illustro comunque lo svolgimento anche nel caso uno pensi di verificare la derivabilità.

Sicuramente la funzione è derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, trattandosi di funzioni elementari.

Il grafico suggerisce che potrebbe esserci un punto di non derivabilità in $x = 0$. Sfruttando la derivabilità nei punti $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo[9]

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ (c'è un punto angoloso) e questo è un altro motivo per cui il teorema di Rolle non è applicabile.

ESERCIZIO 2. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v^1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v^2 = (0, 2, 1) \quad , \quad v^3 = (3, 4, -1).$$

Si provi che essi sono linearmente dipendenti. Si scriva il vettore nullo come combinazione lineare non banale di v^1, v^2, v^3. Detto V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai tre vettori, si determini la dimensione e una base di V.

✎

Per provare che v^1, v^2, v^3 sono linearmente dipendenti il metodo più semplice è calcolare il determinante della matrice che si ottiene accostando i tre vettori (dato che tale matrice risulta quadrata).

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \text{(prima riga) } 1 \cdot (-6) - 1 \cdot (-6) = 0.$$

Questo prova che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Scriviamo il vettore nullo come combinazione lineare non banale di v^1, v^2, v^3.

$$(0, 0, 0) = a(1, 0, -1) + b(0, 2, 1) + c(3, 4, -1) \quad \Leftrightarrow \quad (0, 0, 0) = (a, 0, -a) + (0, 2b, b) + (3c, 4c, -c)$$

Questa equivale a

$$(0, 0, 0) = (a + 3c, 2b + 4c, -a + b - c) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + 3c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \\ -a + b - c = 0. \end{cases}$$

Ricavando c dalla terza equazione e sostituendo nelle altre si ha

$$\begin{cases} c = b - a \\ a + 3b - 3a = 0 \\ 2b + 4b - 4a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = b - a \\ 3b - 2a = 0 \\ \cancel{6b - 4a = 0} \end{cases}$$

che ha ad esempio la soluzione non banale $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$. (La 2^{a} e 3^{a} equazioni sono dipendenti.)

[9] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

Il sottospazio V generato dai tre vettori è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di v^1, v^2, v^3. La dimensione di V è uguale al rango della matrice formata con i tre vettori, che è 2 grazie ad esempio al minore principale di NW del secondo ordine, che vale 2. Pertanto la dimensione di V è 2.

Una base di questo sottospazio è formata da due vettori indipendenti, scelti opportunamente nell'insieme $\{v^1, v^2, v^3\}$. Il minore utilizzato per stabilire che il rango è 2 ci dice anche che v^1 e v^2 sono l.i. e quindi

$$\{v^1, v^2\} \text{ è una base del sottospazio.}$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\big(x+2y\big) + \ln\big(2x - x^2 - y^2\big)$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcolino le derivate parziali della funzione f. Si scriva infine la restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio della funzione.

✎

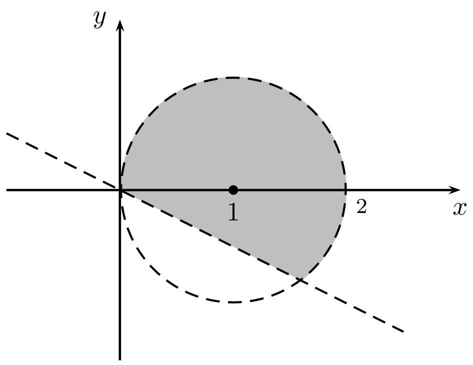
Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x+2y>0 \\ 2x-x^2-y^2>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > -\frac{1}{2}x \\ x^2+y^2-2x<0. \end{cases}$$

La prima disequazione individua il semipiano al di sopra della retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$. Per la seconda serve qualche calcolo per individuare centro e raggio della (possibile) circonferenza. Si ha

$$x^2+y^2-2x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1+y^2<1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2<1,$$

che individua allora il cerchio (aperto) di centro $(1,0)$ e raggio 1. L'intersezione delle due regioni è raffigurata qui sotto



Il dominio di f è aperto, dato che tutti i punti di frontiera non appartengono all'insieme.

Le derivate parziali della funzione f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+2y} + \frac{2-2x}{2x-x^2-y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x+2y} + \frac{-2y}{2x-x^2-y^2}.$$

La restrizione di f ai punti dell'asse x contenuti nel dominio, indicati in blu nella figura, si ottiene ponendo nell'espressione di f $y=0$. Si ha

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = \ln x + \ln\big(2x - x^2\big) \quad \text{con } 0<x<2.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 11/09/2012

Domanda 1. Completando il quadrato, riscrivere il polinomio

$$x^2 - 5x + 1$$

✎

$$x^2 - 5x + 1 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 1 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}.$$

Domanda 2. Ridurre allo stesso denominatore l'espressione

$$\frac{e^x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}$$

✎

$$\frac{e^x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} = \frac{e^{2x} + \sqrt{x}}{xe^x}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$1 - 2e^{x^2} = 0$$

✎

$$1 - 2e^{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \ln\frac{1}{2}.$$

Ora attenzione. A destra abbiamo una quantità negativa e quindi l'equazione è impossibile.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$1 - \log_2(x^2 - 1) > 0$$

✎

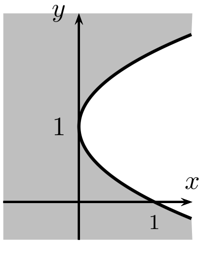
C'è la condizione di esistenza $x^2 - 1 > 0$. La disequazione equivale quindi al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \log_2(x^2 - 1) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 - 1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ x^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono date dall'insieme $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x - (y-1)^2 \le 0$

✎



La disequazione equivale a

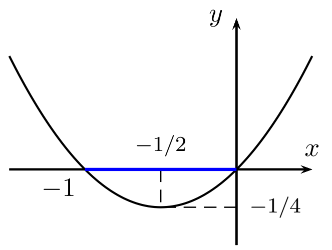
$$x \le (y-1)^2.$$

L'equazione corrispondente individua nel piano la parabola con asse orizzontale dato dalla retta $y = 1$, concavità rivolta verso destra e vertice nel punto $(0, 1)$. La disequazione individua la regione di piano che sta a sinistra della parabola, frontiera compresa. La regione è raffigurata in grigio a fianco.

Domanda 6. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x(x+1)$ nell'intervallo $[-1, 0]$

✎

Il grafico di f è una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso l'alto, che incontra l'asse x nei punti di ascissa -1 e 0. Il grafico è qui sotto.



Dal grafico si ricava che nell'intervallo $[-1, 0]$ la funzione assume come valore massimo 0 e come valore minimo $f(-\frac{1}{2})$. Pertanto si ha $\max f = 0$ e $\min f = -\frac{1}{4}$.

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)^{3/4}$

✎

$$f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)^{-1/4} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x^2} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x$

✎

L'integrale è uguale a

$$\int_0^1 \left(x^{2/3} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} - e^{-x}\right|_0^1 = \left(\frac{3}{5} - e^{-1}\right) - (0 - 1) = \frac{8}{5} - \frac{1}{e}.$$

Domanda 9. Dati i vettori $v^1 = (1, -2, 3)$ e $v^2 = (2, -3, 1)$, scrivere una combinazione lineare (non banale) di v^1, v^2

✎

Una combinazione lineare non banale di v^1, v^2 è un qualunque vettore del tipo $av^1 + bv^2$ con a e b numeri reali fissati e scelti in modo non banale, cioè non entrambi nulli. Pertanto possono andare bene come risposta un'infinità di possibilità. Ne indico alcune

$(1, -2, 3)$ (scegliendo $a = 1, b = 0$), $(2, -3, 1)$ (scegliendo $a = 0, b = 1$), $(3, -5, 4)$ (scegliendo $a = 1, b = 1$).

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y, z) = \frac{x^2 \ln y}{z}$

✎

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2x \ln y}{z}\ ,\ \frac{x^2}{yz}\ ,\ -\frac{x^2 \ln y}{z^2}\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 14/09/2012

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

si determini il suo dominio (insieme di esistenza) e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino gli eventuali punti stazionari e di massimo/minimo. Si disegni quindi un possibile grafico di f e si determini l'immagine della funzione. Si calcoli infine l'integrale $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

Le condizioni di esistenza per la funzione f sono espresse dal seguente sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Il dominio di f è quindi l'intervallo $(0, +\infty)$ e i limiti significativi da calcolare sono: 0^+ e $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} + \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} + \ln(0^+) = +\infty - \infty, \text{ che è una forma indeterminata.}$$

Propongo uno dei tanti modi possibili per risolvere il limite. Con il cambio di variabile $\frac{1}{x} = t$ il limite diventa

$$\lim_{t\to+\infty} \left(t + \ln\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \big(t - \ln t\big) = +\infty$$

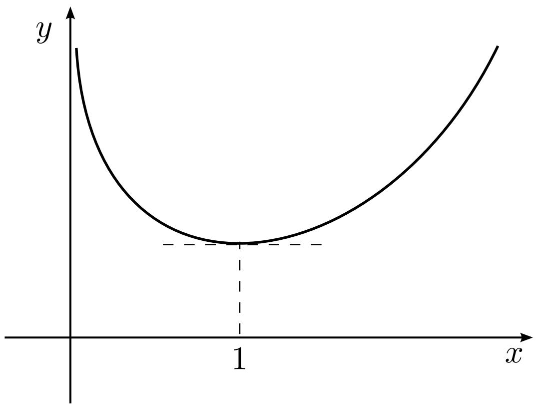
in quanto, pur essendo una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$, si può risolvere ricordando che l'infinito logaritmico è trascurabile a $+\infty$ rispetto all'infinito di una potenza quando la variabile tende a $+\infty$.[10]

La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Chiaramente l'unico punto stazionario è $x = 1$ e per decidere se si tratta di un punto di massimo o di minimo non c'è nemmeno bisogno di studiare il segno della derivata in quanto, osservando i limiti, possiamo dire che si tratta certamente di un punto di minimo, anzi del punto di minimo globale di f.

Un possibile grafico è quello a fianco.



Si noti che ho detto un *possibile* grafico, dato che non sappiamo ancora se la funzione assume solo valori positivi, come raffigurato, o se possa anche assumere valori negativi. Per risolvere la questione e rispondere alla domanda successiva, di determinare l'immagine della funzione, è sufficiente calcolare il minimo di f e cioè $f(1)$. Si ha $f(1) = 1$ e quindi possiamo dire che f assume solo valori positivi e che la sua immagine è l'intervallo $[1, +\infty)$.

[10] Un altro modo per calcolare il limite poteva essere scriverlo come

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1 + x\ln x}{x}, \text{ calcolare a parte il } \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0 \text{ e concludere quindi che vale } \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Attenzione che se invece (sbagliando) di applica De l'Hôpital si trova $-\infty$. Ricordo anche che per calcolare il $\lim_{x\to0^+} x\ln x$ si può scriverlo come

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0.$$

Ora l'ultima domanda, il calcolo dell'integrale $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \mathrm{d}x$.
Una primitiva di $\frac{1}{x}$ è il $\ln x$.[11] Le primitive di $\ln x$ si calcolano per parti e ricordo che

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \mathrm{d}x = \left(\ln x + x \ln x - x\right|_1^e = (1 + e - e) - (-1) = 2.$$

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione lineare T rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si indichi tra quali spazi è definita la trasformazione T. Si scriva l'espressione di T. Si determini l'immagine di T. Si dica infine se il vettore $(100, 101)$ è immagine attraverso T di qualche vettore di $\mathbb{R}^4$, ed eventualmente quali.

✎

La trasformazione T è definita in $\mathbb{R}^4$ e assume i suoi valori in $\mathbb{R}^2$, pertanto possiamo scrivere $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.
L'espressione di T è

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

L'immagine di T è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. La sua dimensione è uguale al rango della matrice di rappresentazione, che è evidentemente 2 grazie ad esempio al minore ottenuto con la prima e terza colonna. Pertanto, trattandosi di un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2, non può che essere tutto $\mathbb{R}^2$.
Ultima domanda, se il vettore $(100, 101)$ è immagine attraverso T di qualche vettore di $\mathbb{R}^4$. La risposta è banale, dato che l'immagine di T è tutto $\mathbb{R}^2$. Qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$ è immagine di qualche vettore di $\mathbb{R}^4$ e quindi anche $(100, 101)$.
Troviamo allora di quali vettori esso è immagine. Basta porre $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (100, 101)$ e cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 100 \\ x_3 - x_4 = 101 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 201 \\ x_3 = 101 + x_4. \end{cases}$$

Si tratta quindi di tutti i vettori del tipo

$$\Big(201 \;,\; x_2 \;,\; 101 + x_4 \;,\; x_4\Big), \text{ al variare di } x_2, x_4 \text{ in } \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)(x^2 + y^2 - 1)}$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f. Si trovino i punti stazionari di f.

✎

La condizione per l'esistenza della funzione f è

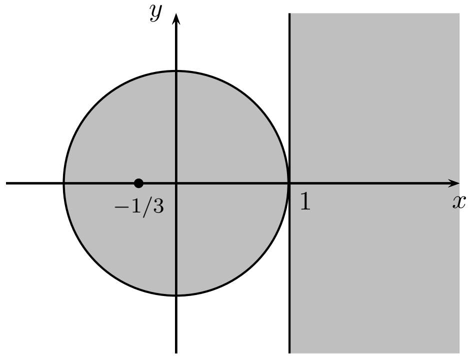
$$(x-1)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0.$$

[11] Possiamo evitare di usare il valore assoluto nell'argomento del logaritmo dato che l'integrale sarà poi tra 1 ed e, quindi con x positivo.

Questa disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$$

Le relative equazioni portano a disegnare la retta verticale di equazione $x = 1$ e la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sopra.



Il dominio di f è un insieme chiuso, dato che tutti i punti di frontiera appartengono all'insieme.

Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \, , \, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

dove

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(x^2+y^2-1)}} \Big(x^2+y^2-1+(x-1)\cdot 2x \Big)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(x^2+y^2-1)}} \cdot (x-1)\cdot 2y.$$

Per trovare i punti stazionari conviene iniziare dalla derivata parziale rispetto ad y, che è più semplice. Il numeratore si annulla se $x = 1$ oppure se $y = 0$. La prima possibilità non è accettabile in quanto si annulla il denominatore di f. Ponendo $y = 0$ nella derivata parziale rispetto ad x e uguagliando a zero il numeratore si ottiene

$$x^2-1+(x-1)\cdot 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-2x-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = -\frac{1}{3}.$$

La soluzione $x = 1$, nuovamente, non è accettabile. L'altra fornisce il punto $(-\frac{1}{3}, 0)$, che è accettabile ed è l'unico punto stazionario di f.[12]

[12]Si osservi che i punti del piano che stanno sulla retta di equazione $x = 1$ appartengono al dominio di f ma in questi punti le derivate parziali non esistono (e quindi non sono accettabili quali punti stazionari). È un po' la stessa situazione che abbiamo in una variabile con la funzione $\sqrt{x}$, che è definita in $x = 0$ ma in tale punto non è derivabile.