Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2012/13

Alberto Peretti

Aprile 2016

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 08/01/2013

Domanda 1. Con il completamento del quadrato scrivere il polinomio $x^2 + \frac{7}{2}x + 3$ nella forma $(x + a)^2 + b$

✎

$$x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} - \frac{49}{16} + 3 = \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}.$$

Domanda 2. Nell'espressione $\frac{1}{x^3} + 5x + 3$ raccogliere $\frac{1}{x^2}$

✎

$$\frac{1}{x^3} + 5x + 3 = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1/x^3}{1/x^2} + \frac{5x}{1/x^2} + \frac{3}{1/x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} + 5x^3 + 3x^2\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2e^{2x} + 3e^x = 2$$

✎

Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $e^x = t$ l'equazione diventa

$$2t^2 + 3t - 2 = 0. \quad \text{Le soluzioni sono: } t = \frac{-3 \mp \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \mp 5}{4}, \text{ e quindi } t = -2 \ \vee t = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$e^x = -2 \quad \vee \quad e^x = \frac{1}{2}.$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione $x = \ln \frac{1}{2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{\ln(3x+5)}{x} > 0$$

✎

La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} 3x + 5 > 0 \text{ (C.E.)} \\ \ln(3x+5) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x + 5 > 0 \text{ (C.E.)} \\ \ln(3x+5) < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ 3x + 5 > 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ 3x + 5 < 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Quindi} \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ x > -\frac{4}{3} \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ x < -\frac{4}{3} \\ x < 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi date dall'insieme $(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}) \cup (0, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x + y^2 + y = 0$

✎

L'equazione equivale a

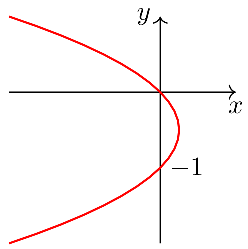
$$x = -y^2 - y \quad \text{cioè} \quad x = -y(y+1).$$

Si tratta di una parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso sinistra, che interseca l'asse y in $x = 0$ oppure $x = -1$. La raffigurazione della parabola è in rosso qui sotto a destra.

Domanda 6. Date le funzioni $g(x) = \ln x + 1$ e $f(x) = \dfrac{3x}{4x+3}$, scrivere l'espressione della funzione composta $f(g(x))$

✎

$$f(g(x)) = \frac{3g(x)}{4g(x)+3} = \frac{3(\ln x + 1)}{4(\ln x + 1) + 3} = \frac{3\ln x + 3}{4\ln x + 7}.$$



Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln(5x+3)}$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-\ln(5x+3))^2}\left(-\frac{1}{5x+3}\right)\cdot 5 = \frac{5}{(5x+3)(1-\ln(5x+3))^2}.$$

Domanda 8. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n \cdot e^n}$

✎

La serie è riconducibile ad una serie geometrica (attenzione che n inizia da 1).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n \cdot e^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3e)^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3e}\right)^n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3e}}{1 - \frac{1}{3e}} = \frac{2}{3e-1}.$$

Domanda 9. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, calcolare A^{-1}

✎

Il determinante di A è -3. La matrice dei complementi algebrici di A è

$$A_{\text{CA}} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice aggiunta è} \quad A^\star = A_{\text{CA}}^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^\star = -\frac{1}{3}A^\star = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{x^2+5}{y}$

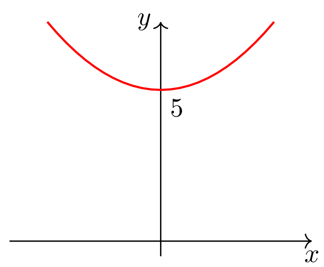
✎

La curva di livello 1 della funzione f è l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$f(x,y) = 1$$

e cioè

$$\frac{x^2+5}{y} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 5 = y.$$



Si tratta della parabola raffigurata in rosso a fianco.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 11/01/2013

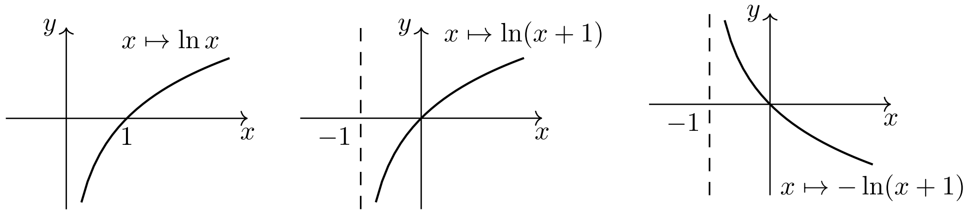
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x+1) & -1 < x < 0 \\ x^2 - 1 & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

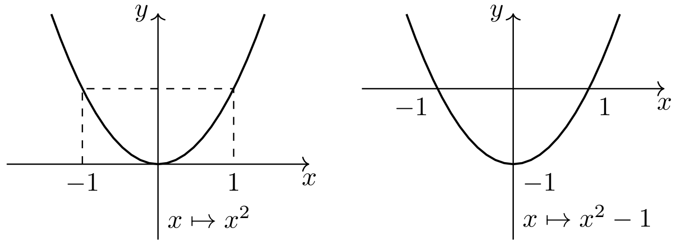
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si determini l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume e si indichino gli eventuali punti di massimo/minimo, globali e locali. Si dica poi se f è derivabile nell'intervallo $(-1, 1)$ e si scriva l'espressione della sua derivata, dove esiste.

✎

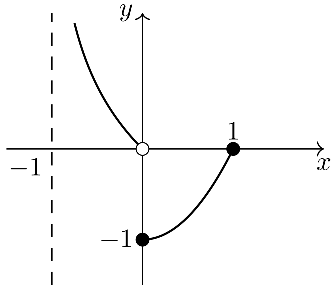
I grafici delle due funzioni che entrano nella definizione di f si ottengono con le trasformazioni elementari. Per quanto riguarda la funzione logaritmica ecco le trasformazioni:



Per quanto riguarda il polinomio:



Quindi il grafico della funzione f è quello rappresentato qui sotto.



Il grafico ottenuto permette di dire che l'immagine di f è l'intervallo $[-1, +\infty)$. Si osservi che in particolare la funzione assume il valore 0 in $x = 1$.

La funzione non è limitata superiormente e quindi non c'è nessun punto di massimo globale. La funzione assume il suo valore minimo in $x = 0$ e quindi questo è il punto di minimo globale. Infine possiamo affermare che $x = 1$ è punto di massimo locale: infatti in un suo intorno sinistro la funzione assume valori minori di 0.

La funzione f non è evidentemente continua in $x = 0$ (da sinistra). Infatti si ha

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \big(-\ln(x+1) \big) = -\ln 1 = 0.$$

La funzione, non essendo continua in $x = 0$, non è quindi nemmeno derivabile in $x = 0$. In tutti gli altri punti dell'intervallo $(-1, 1)$ la funzione è derivabile in quanto coincide con una funzione elementare, o di tipo logaritmico o polinomiale. In tali punti la derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = (0, -1, 1, 0) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0, 1) \quad , \quad v^3 = (1, 0, 1, -1).$$

Si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Tra i vettori dati ci sono coppie di vettori ortogonali? Si determini la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori. Si scriva il vettore nullo come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3. Si dica infine se il quarto vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$ appartiene a V.

✎

Per stabilire se i vettori sono dipendenti o indipendenti possiamo seguire due strade: la definizione (con le combinazioni lineari) oppure con il rango. Per questa seconda strada, dopo avere scritto la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

possiamo osservare che il minore che si ottiene con le prime 3 colonne (col contorno tratteggiato) è nullo, ma che quello dato dalle ultime 3 colonne (in grigio) vale 2 e quindi il rango di A è 3. Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti.

Per stabilire se ci sono coppie di vettori ortogonali dobbiamo calcolare i prodotto interni

$$\langle v^1, v^2 \rangle = -1 \quad , \quad \langle v^1, v^3 \rangle = 1 \quad , \quad \langle v^2, v^3 \rangle = 0.$$

Quindi soltanto v^2 e v^3 sono ortogonali.

I tre vettori, essendo indipendenti, generano un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3.

La domanda successiva chiede di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3. Dato che essi sono linearmente indipendenti, dobbiamo ricordare che per definizione questo significa che il vettore nullo si può scrivere come loro combinazione lineare soltanto in modo banale, cioè con coefficienti tutti nulli.

L'ultima domanda chiede di dire se il quarto vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$, cioè $u^4 = (0, 0, 0, 1)$ appartiene a V, cioè al sottospazio generato dai tre vettori dati. Possiamo usare la definizione oppure il rango.

Se usiamo la definizione dobbiamo stabilire se sia possibile scrivere

$$u^4 = av^1 + bv^2 + cv^3, \text{ cioè } (0, 0, 0, 1) = a(0, -1, 1, 0) + b(1, 1, 0, 1) + c(1, 0, 1, -1).$$

Questo equivale a

$$(0, 0, 0, 1) = (0, -a, a, 0) + (b, b, 0, b) + (c, 0, c, -c) \quad \Leftrightarrow \quad (0, 0, 0, 1) = (b+c, -a+b, a+c, b-c) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b + c = 0 \\ -a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b - c = 1. \end{cases}$$

Si trova facilmente che il sistema ha la soluzione $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$ e quindi u^4 si può scrivere come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3, ossia appartiene al sottospazio da essi generato.

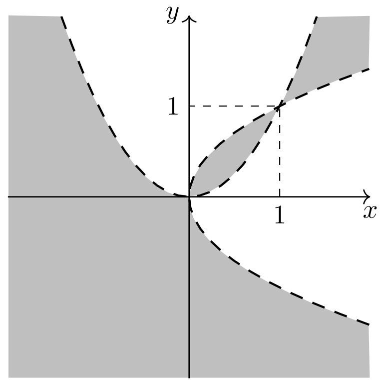
Usando invece il rango, dopo aver costruito la matrice qui a fianco, in cui ho aggiunto il vettore u^4 quale ulteriore riga alla matrice A, possiamo osservare che il determinante di questa matrice è zero (sviluppare rispetto alla quarta riga). Quindi le quattro righe sono dipendenti e, dato che le prime tre sono indipendenti, significa che la quarta riga è combinazione lineare delle prime tre, coerentemente con quanto trovato poco fa.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione
$$f(x,y) = \ln\left[(x-y^2)(y-x^2)\right],$$
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si scriva l'espressione della restrizione di f alla retta di equazione $x - y = 0$ e si trovino i punti stazionari (vincolati) di f lungo tale restrizione.

✎

La condizione di esistenza della funzione f è data dalla disequazione
$$(x-y^2)(y-x^2) > 0,$$
che equivale ai sistemi
$$\begin{cases} x-y^2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y^2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>y^2 \\ y>x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<y^2 \\ y<x^2. \end{cases}$$
La regione che ne risulta è raffigurata in grigio qui sotto.



Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x-y^2)(y-x^2)}\Big(y - x^2 + (x-y^2)(-2x)\Big)$$
e quella rispetto ad y è
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(x-y^2)(y-x^2)}\Big(-2y(y-x^2) + x - y^2\Big). \quad \text{Il gradiente è quindi } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
L'espressione della restrizione di f alla retta di equazione $x - y = 0$ è
$$f\Big|_{x-y=0} = f\Big|_{y=x} = \ln\left[(x-x^2)(x-x^2)\right] = \ln\left[(x-x^2)^2\right].$$
Infine sono richiesti i punti stazionari (vincolati) di f lungo la restrizione. Si tratta (attenzione a non fraintendere) non dei punti stazionari (in generale) che stanno sulla restrizione, ma dei punti che risultano stazionari muovendosi sulla restrizione. In altre parole non sono richiesti i punti che annullano il gradiente e che appartengono alla retta, ma i punti che annullano la derivata della restrizione, cioè della funzione della sola variabile x appena trovata. Tale derivata è
$$\frac{1}{(x-x^2)^2} \cdot 2(x-x^2)(1-2x).$$
Questa si annulla soltanto in $x = \frac{1}{2}$ e quindi fornisce il punto stazionario vincolato $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 22/01/2013

Domanda 1. Semplificare l'espressione $\dfrac{\frac{(x+1)^3}{x^4}}{\frac{(x+1)^2}{x^3}}$

✎

$$\frac{\frac{(x+1)^3}{x^4}}{\frac{(x+1)^2}{x^3}} = \frac{(x+1)^3}{x^4} \cdot \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Domanda 2. Scomporre in fattori il polinomio $2x^2 + 2x - 4$

✎

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2) = 2(x-1)(x+2).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2\log_3^2 x + 3\log_3 x = 2$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Si tratta poi di un'equazione logaritmica riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $\log_3 x = t$ l'equazione diventa

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \text{Le soluzioni sono: } t = \frac{-3 \mp \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \mp 5}{4}, \text{ e quindi } t = -2 \ \vee t = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$\log_3 x = -2 \ \vee \ \log_3 x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9} \ \vee \ x = \sqrt{3}, \text{ entrambe accettabili.}$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{6x+5}{4x-3} - 1 < 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq \frac{3}{4}$. La disequazione si può scrivere

$$\frac{6x+5-4x+3}{4x-3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+8}{4x-3} < 0$$

ed equivale quindi ai sistemi

$$\begin{cases} 2x+8 > 0 \\ 4x-3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+8 < 0 \\ 4x-3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x < -4 \\ x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi date dall'intervallo $(-4, \frac{3}{4})$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x(y+3)^2 = 0$

✎

L'equazione equivale a

$$2x = 0 \quad \vee \quad (y+3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = -3.$$

Si tratta quindi dei punti che stanno sull'asse y oppure sulla retta di equazione $y = -3$, insieme raffigurato in rosso qui a fianco.

Domanda 6. Trovare l'espressione della funzione inversa di $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+2)}$

✎

Scrivendo $y = \dfrac{1}{\ln(x+2)}$, si ha

$$\ln(x+2) = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = e^{1/y} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{1/y} - 2, \text{ quindi } f^{-1}(y) = e^{1/y} - 2.$$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{e^{-\infty}}{\sqrt[3]{+\infty}} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{-3x^2+2x}$

✎

$$f'(x) = e^{-3x^2+2x} + xe^{-3x^2+2x}(-6x+2) = e^{-3x^2+2x}(1-6x^2+2x).$$

Domanda 9. Scrivere la matrice dei complementi algebrici di $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

✎

$$A_{\text{CA}} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

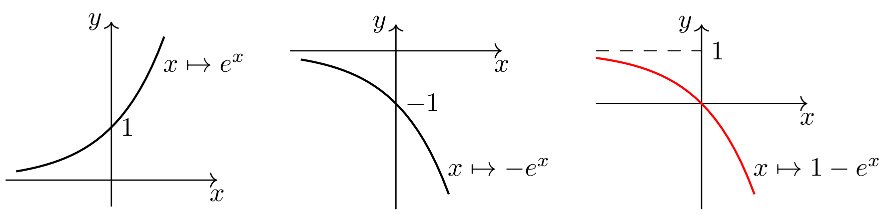
Domanda 10. Disegnare la curva di livello 0 della funzione $f(x,y) = e^x + y - 1$

✎

La curva di livello 0 della funzione f è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x,y) = 0$ e cioè

$$e^x + y - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1 - e^x.$$

Si tratta quindi del grafico della funzione $x \mapsto 1 - e^x$, che si può ottenere con le trasformazioni elementari. È raffigurato in rosso qui sotto.



ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 25/01/2013

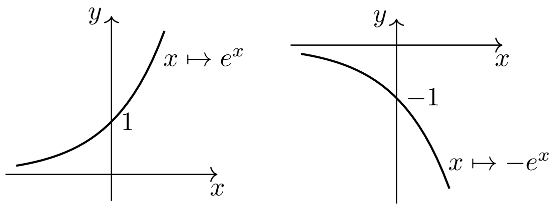
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -e^x & x \leq 0 \\ \ln(x+1) & x > 0, \end{cases}$$

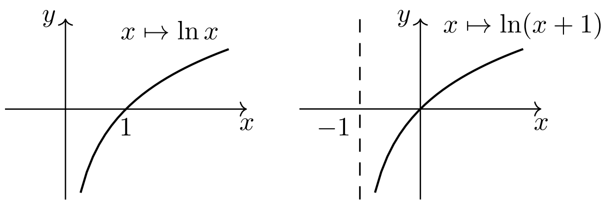
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari e si determini l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume. Si dica in quali punti di $\mathbb{R}$ f è derivabile. Si dica perché f è integrabile nell'intervallo $[-1, 1]$ e si calcoli infine $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

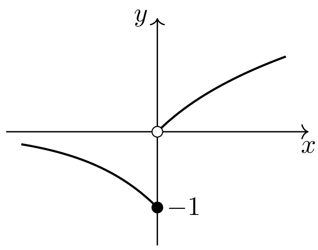
I grafici delle due funzioni che entrano nella definizione di f si ottengono con le trasformazioni elementari. Per quanto riguarda la funzione esponenziale ecco la trasformazione:



Per quanto riguarda la funzione logaritmica ecco la trasformazione:



Quindi il grafico della funzione f è quello rappresentato qui sotto.



Il grafico ottenuto permette di dire che l'immagine di f è l'insieme $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Si osservi che in particolare la funzione non assume il valore 0.

La funzione f non è evidentemente continua in $x = 0$ (da destra). Infatti si ha

$$f(0) = -e^0 = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0.$$

La funzione non è quindi nemmeno derivabile in $x = 0$. In tutti gli altri punti invece la funzione è derivabile in quanto coincide con una funzione elementare, o di tipo esponenziale o logaritmico. In tali punti la derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Possiamo affermare che f è integrabile nell'intervallo $[-1,1]$ in quanto, pur non essendo continua, è comunque limitata e ha un solo punto di discontinuità.[1] Calcoliamo allora l'integrale.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-e^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

La primitiva dell'esponenziale è immediata. La primitiva della seconda si calcola per parti:

$$\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \ln(x+1)\cdot x - \int x\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x+1) - \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c.$$

Pertanto

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -e^x\Big|_{-1}^{0} + \Big(x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)\Big)\Big|_{0}^{1} = (-1+e^{-1}) + (\ln 2 - 1 + \ln 2) = \frac{1}{e} + 2\ln 2 - 2.$$

ESERCIZIO 2. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \quad\; - x_2 + x_3 \qquad\;\; = 1 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

si verifichi, il base al teorema di Rouché–Capelli, che esso ha soluzioni. Usando poi il metodo di riduzione, si trovino le sue soluzioni, esprimendole nella forma

soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato.

Si indichi infine una soluzione di norma 1.

✎

Il teorema di Rouché–Capelli dice che un sistema lineare $Ax = b$ ha almeno una soluzione se e solo se il rango della matrice A è uguale al rango della matrice completa $A|b$. Si tratta quindi di verificare la condizione sul rango. Abbiamo

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nella matrice A possiamo osservare che il minore che si ottiene con le prime 3 colonne (col contorno tratteggiato) è nullo, ma che quello dato dalle ultime 3 colonne (in grigio) vale 2 e quindi il rango di A è 3. A questo punto anche il rango di $A|b$ è 3, dato che non può essere 4.

Risolviamo ora il sistema con il metodo generale. Il numero di equazioni è uguale al rango e quindi non ci sono equazioni dipendenti da eliminare. Le variabili sono una più del rango e quindi una variabile deve diventare parametro. Coerentemente con l'aver trovato il rango sfruttando il minore derivante dalle ultime tre colonne, possiamo trasformare in parametro la variabile x_1. Riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \qquad\; = 1 \\ \quad x_2 \qquad + x_4 = -x_1 \\ \qquad\quad x_3 - x_4 = -x_1 \end{cases} \quad \text{con matrici} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 1 & -1 & -x_1 \end{array}\right).$$

La regola di Cramer permette di trovare la soluzione, in funzione del parametro x_1. Si ha

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 1 \\ -x_1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -x_1 - \frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -x_1 & 1 \\ 0 & -x_1 & -1 \end{pmatrix} = -x_1 + \frac{1}{2} \\ x_4 &= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[1] Si noti che, delle tre condizioni studiate che garantiscono l'integrabilità nel senso classico di Riemann, né la continuità né la monotonia qui sono applicabili.

Le soluzioni sono quindi date dai vettori del tipo

$$\Big(x_1, -x_1 - \tfrac{1}{2}, -x_1 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\Big),$$

dove x_1 è un qualunque numero reale.
Esprimiamo le soluzioni nella forma "soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato":

$$\Big(x_1, -x_1 - \tfrac{1}{2}, -x_1 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\Big) = \Big(0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\Big) + x_1\big(1, -1, -1, 0\big).$$

Per trovare una soluzione di norma 1 basta risolvere l'equazione

$$\Big\|\Big(x_1, -x_1 - \tfrac{1}{2}, -x_1 + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\Big)\Big\| = 1 \quad \text{cioè} \quad x_1^2 + (-x_1 - \tfrac{1}{2})^2 + (-x_1 + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} = 1,$$

che equivale a

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1 + \frac{1}{4} + x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1^2 + \frac{3}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{12} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Con il valore positivo si trova, ad esempio, la soluzione

$$\Big(\tfrac{1}{2\sqrt{3}}, \tfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \tfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \tfrac{1}{2}\Big).$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\left[(x + y + x^2)^2\right],$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si dica se la funzione ha punti stazionari. Si provi graficamente che la retta di equazione $x + y - 1 = 0$ è interamente contenuta nel dominio di f e si scriva la restrizione di f a tale retta.

✎

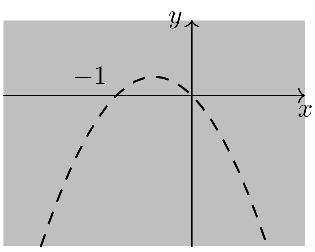
La condizione di esistenza della funzione f è data dalla disequazione

$$(x + y + x^2)^2 > 0,$$

che equivale alla condizione

$$x + y + x^2 \neq 0, \text{ cioè } y \neq -x^2 - x, \text{ ossia } y \neq -x(x+1).$$

Si tratta dei punti che non stanno sulla parabola di equazione $y = -x(x+1)$, parabola con asse verticale, concavità verso il basso e che incontra l'asse x nell'origine e in $x = -1$. Una raffigurazione può essere la seguente, dove la parabola è tratteggiata.



Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

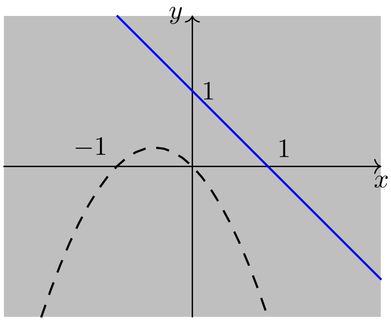
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x + y + x^2)^2}2\big(x + y + x^2\big)(1 + 2x) = \frac{2(1+2x)}{x + y + x^2}$$

e quella rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(x + y + x^2)^2}2\big(x + y + x^2\big) = \frac{2}{x + y + x^2}. \quad \text{Il gradiente è quindi } \left(\frac{2(1+2x)}{x + y + x^2}, \frac{2}{x + y + x^2}\right).$$

Occorre dire se esistono punti stazionari. Sono punti in cui entrambe le derivate parziali si annullano. Però possiamo osservare subito che la derivata parziale rispetto ad y non può mai annullarsi, dato che il numeratore è certamente diverso da zero. Questo permette di dire che non esistono punti stazionari per la funzione f.

Per provare graficamente che la retta di equazione $x + y - 1 = 0$, cioè $y = 1 - x$, è interamente contenuta nel dominio di f basta disegnare la retta nel dominio trovato prima. Si ottiene la figura qui sotto ed è evidente che la retta (in blu) non interseca mai la parabola.



Infine scriviamo la restrizione di f alla retta di equazione $y = 1 - x$. Si ha

$$f\Big|_{y=1-x} = \ln\left[(x+1-x+x^2)^2\right] = \ln\left[(1+x^2)^2\right] = 2\ln\left(1+x^2\right).$$ [2]

[2] L'ultimo passaggio si può fare in quanto l'argomento $1 + x^2$ è sempre positivo. Attenzione che lo stesso non si può fare sull'espressione generale di f, in quanto l'argomento $x + y + x^2$ non è sempre positivo in tutto il dominio.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/02/2013

Domanda 1. Semplificare l'espressione $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x-1}$, dopo aver scomposto il numeratore

✎

$$\frac{x^3-4x^2+3x}{x-1}=\frac{x(x^2-4x+3)}{x-1}=\frac{x(x-1)(x-3)}{x-1}=x(x-3).$$

Domanda 2. Scrivere e^2 come potenza in base 2

✎

$$e^2=2^{\log_2(e^2)}=2^{2\log_2 e}=(\text{volendo})\ 2^{2/\ln 2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x\big(\ln(x+3)-1\big)=0$$

✎

Nella condizione di esistenza $x>-3$, l'equazione equivale a

$$x=0\quad\vee\quad\ln(x+3)=1\qquad\Leftrightarrow\qquad x=0\quad\vee\quad x+3=e\qquad\Leftrightarrow\qquad x=0\quad\vee\quad x=e-3.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{6-3x^2}{x}<0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x\neq 0$. La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases}6-3x^2>0\\ x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}6-3x^2<0\\ x>0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x^2<2\\ x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}x^2>2\\ x<0\end{cases}$$

e quindi

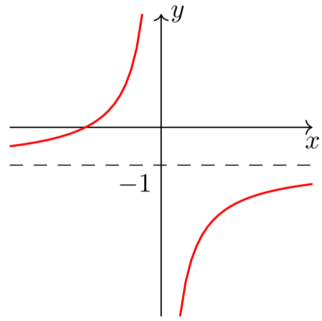
$$\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}x<-\sqrt{2}\ \vee\ x>\sqrt{2}\\ x<0.\end{cases}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è $S=(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x(y+1)+2=0$

✎

L'equazione equivale a $x(y+1)=-2$ e individua quindi un'iperbole di centro $(0,-1)$ e rami che stanno, rispetto al centro, nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. L'iperbole è raffigurata in rosso qui a fianco.



Domanda 6. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{e^{1/x}-1}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti}\quad\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{e^{1/x}-1}=\frac{\ln(-0^-)}{e^{1/0^-}-1}=\frac{\ln(0^+)}{e^{-\infty}-1}=\frac{-\infty}{0-1}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty.$$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\sqrt{3x+2}}$

✎

$$f'(x) = \frac{2x(1-\sqrt{3x+2}) - x^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{3x+2}}\cdot 3\right)}{(1-\sqrt{3x+2})^2}.$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(3x - \sqrt{3x+2}\right)\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \left(3x - \sqrt{3x+2}\right)\,\mathrm{d}x = \int 3x\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x = 3\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\int 3\sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x = 3\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c.$$

Domanda 9. Scrivere la matrice simmetrica associata alla forma quadratica

$$Q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3$$

✎

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = x\ln\left(x^2+e^y\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln\left(x^2+e^y\right) + x\cdot\frac{1}{x^2+e^y}\cdot 2x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\frac{1}{x^2+e^y}\cdot e^y \qquad \text{e} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

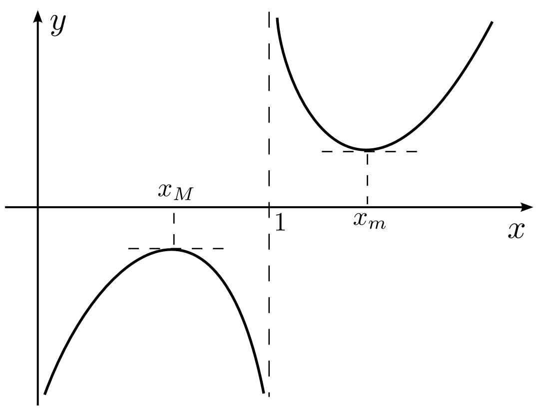
ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 08/02/2013

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln x,$$
si determini il suo dominio (insieme di esistenza) e si calcolino i limiti significativi. Si disegni quindi un possibile grafico di f. Si calcoli la derivata di f e si trovino gli eventuali punti di massimo e di minimo. Si calcoli infine l'integrale $\int_2^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è data dal sistema
$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0, \end{cases}$$
e quindi l'insieme di definizione è $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: 0^+, 1^-, 1^+ e $+\infty$. Con l'algebra dei limiti si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0-1} + \ln 0^+ = -1 - \infty = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{1^- - 1} + \ln 1 = \frac{1}{0^-} + 0 = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{1^+ - 1} + \ln 1 = \frac{1}{0^+} + 0 = +\infty;$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty - 1} + \ln(+\infty) = 0 + \infty = +\infty.$$

Il segno della funzione non è richiesto. Un possibile grafico di f è il seguente.



La derivata di f è
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Per studiare dove la funzione cresce o decresce studiamo il segno della derivata.
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2 - x}{x(x-1)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3x+1}{x(x-1)^2} > 0.$$

Dato che il denominatore nel campo di esistenza è sempre positivo, la disequazione equivale alla
$$x^2 - 3x + 1 > 0, \quad \text{che è verificata per} \quad x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto la funzione f è crescente in $\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ e decrescente in $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Inoltre $x_M = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo (locale non globale) e $x_m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo (locale non globale). Possiamo verificare facilmente che il grafico è in effetti come già disegnato, e cioè che la funzione nel punto di massimo ha un valore negativo e positivo nel punto di minimo. Serve una calcolatrice: si trova $x_M \approx 0.38$ con $f(x_M) \approx -1.58$ e $x_m \approx 2.62$ con $f(x_m) \approx 1.58$.[3]

Calcoliamo l'integrale.

$$\int_2^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^e \left(\frac{1}{x-1} + \ln x\right) \mathrm{d}x.$$

Ricordando che la primitiva di $\ln x$ si trova per parti e che si ha

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c,$$

abbiamo

$$\int_2^e \left(\frac{1}{x-1} + \ln x\right) \mathrm{d}x = \Big(\ln|x-1| + x\ln x - x\Big|_2^e = \ln(e-1) - (2\ln 2 - 2) = \ln(e-1) - 2\ln 2 + 2.$$

ESERCIZIO 2. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

si verifichi, il base al teorema di Rouché–Capelli, che esso ha soluzioni. Si calcolino poi le soluzioni del sistema. Si indichi infine una soluzione ortogonale al vettore $(1, 1, -1)$.

✎

Il teorema di Rouché–Capelli dice che un sistema lineare $Ax = b$ ha almeno una soluzione se e solo se il rango della matrice A è uguale al rango della matrice completa $A|b$. Si tratta quindi di verificare la condizione sul rango. Abbiamo

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Calcoliamo il determinante di A: risulta (rispetto alla terza riga) $\det A = 0$.[4] Pertanto il rango di A non è 3 ed è certamente 2 in quanto ci sono minori del secondo ordine diversi da zero, ad esempio quello indicato in grigio.

Possiamo dire che anche il rango di $A|b$ è 2 in quanto ad esempio la terza riga è la somma delle prime due e quindi le righe sono dipendenti. Lo stesso minore di ordine 2 usato per il rango di A ci dice che anche il rango di $A|b$ è 2.

Risolviamo ora il sistema con il metodo generale. Il numero di equazioni è maggiore del rango e quindi possiamo eliminare un'equazione. Riferendosi al minore del secondo ordine indicato, che è il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 1)$, possiamo eliminare la prima equazione e far diventare parametro la variabile x_1.

Riscriviamo quindi il sistema come

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_1 \\ x_3 = 1 - x_1 \end{cases} \quad \text{con matrici} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 + x_1 \\ 0 & 1 & 1 - x_1 \end{array}\right).$$

Non serve usare alcuna tecnica per calcolare la soluzione, in quanto la soluzione è già indicata. Le soluzioni sono date dai vettori del tipo

$$\big(x_1, 2 + x_1, 1 - x_1\big),$$

[3] I due valori $f(x_M)$ e $f(x_m)$ non sono solo approssimativamente opposti, lo sono esattamente, come si potrebbe verificare con qualche calcolo in più.

[4] Si può anche osservare che la terza riga di A è somma delle prime due e quindi le righe di A sono dipendenti. Questo fatto è rilevante anche nel seguito, cioè nel rango di $A|b$, in quanto lo stesso tipo di dipendenza c'è in realtà nella matrice completa. Faccio notare che se invece nella matrice completa la terza riga non fosse somma delle prime due il rango della matrice completa sarebbe maggiore del rango di A.

dove x_1 è un qualunque numero reale.

Volendo esprimere le soluzioni nella forma "soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo associato" abbiamo

$$\big(x_1, 2 + x_1, 1 - x_1\big) = \Big(0, 2, 1\Big) + x_1\big(1, 1, -1\big).$$

Per trovare una soluzione ortogonale al vettore $(1, 1, -1)$ basta porre uguale a zero il prodotto interno tra i vettori soluzione e il vettore $(1, 1, -1)$ e cioè risolvere l'equazione

$$\Big\langle \big(x_1, 2 + x_1, 1 - x_1\big), (1, 1, -1)\Big\rangle = 0$$

che equivale a

$$x_1 + 2 + x_1 - 1 + x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}.$$

Con questo valore di x_1 si trova il vettore $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, che è una soluzione ortogonale al vettore dato.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x + 2y} + \ln\big[1 - (x + 1)y\big],$$

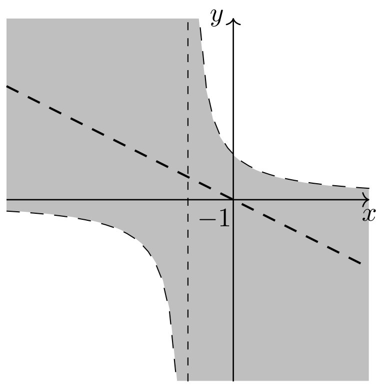
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si verifichi che il punto $(-1, 0)$ non è stazionario.

✎

La condizione di esistenza della funzione f è data dal sistema di condizioni

$$\begin{cases} x + 2y \neq 0 \\ 1 - (x + 1)y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \neq -\frac{x}{2} \\ (x + 1)y < 1 \end{cases}$$

La prima condizione esclude i punti che stanno sulla retta di equazione $y = -\frac{x}{2}$ e la seconda individua una delle due regioni di piano individuate da un'iperbole di centro nel punto $(-1, 0)$ e asintoti paralleli agli assi cartesiani. La regione che ne risulta è raffigurata in grigio qui a fianco.



Si tratta di un insieme aperto in quanto tutti i suoi punti sono interni (i punti sulla retta e sull'iperbole sono tutti esclusi dal dominio di f).

Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x + 2y - x}{(x + 2y)^2} + \frac{1}{1 - (x + 1)y} \cdot (-y) = \frac{2y}{(x + 2y)^2} - \frac{y}{1 - (x + 1)y}$$

e quella rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x + 2y)^2} \cdot 2 + \frac{1}{1 - (x + 1)y} \cdot (-(x + 1)) = \frac{-2x}{(x + 2y)^2} - \frac{x + 1}{1 - (x + 1)y}.$$

Il gradiente è quindi $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

Verifichiamo che il punto $(-1, 0)$ non è stazionario. Basta provare che il gradiente in questo punto non è nullo e cioè che almeno una delle due derivate non è nulla. La derivata rispetto ad x vale zero, ma quella rispetto ad y vale 2 e quindi è provato che il punto $(-1, 0)$ non è stazionario.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/06/2013

Domanda 1. Semplificare l'espressione $\frac{x^4 - 4x^2}{x+2}$, dopo aver scomposto il numeratore

✎

$$\frac{x^4 - 4x^2}{x+2} = \frac{x^2(x^2-4)}{x+2} = \frac{x^2(x-2)(x+2)}{x+2} = x^2(x-2).$$

Domanda 2. Scomporre in fattori l'espressione $1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ raccogliendo $\frac{1}{e^2}$

✎

$$1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{e^2}} + \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e^2}} - 1\right) = \frac{1}{e^2}\left(e^2 + e - 1\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$1 + e^x = 2e^{2x}$$

✎

Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $e^x = t$ l'equazione diventa

$$2t^2 - t - 1 = 0. \quad \text{Le soluzioni sono: } t = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \mp 3}{4}, \text{ e quindi } t = -\frac{1}{2} \ \vee t = 1.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$e^x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad e^x = 1.$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione $x = 0$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x > 1$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Si tratta poi di una disequazione logaritmica riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $\log_2 x = t$ la disequazione diventa

$$t^2 - 2t - 1 > 0. \quad \text{Le soluzioni dell'equazione sono: } t = 1 \mp \sqrt{2}.$$

Quindi la disequazione è verificata per valori esterni e dunque per $t < 1 - \sqrt{2}$ oppure $t > 1 + \sqrt{2}$. Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

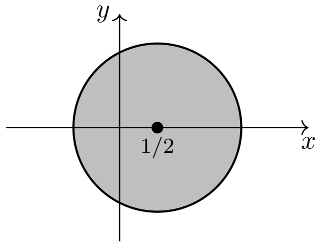
$$\log_2 x < 1 - \sqrt{2} \ \vee \ \log_2 x > 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 2^{1-\sqrt{2}} \ \vee \ x > 2^{1+\sqrt{2}}.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - x + y^2 \le 1$

✎

La disequazione, con il completamento del quadrato sulla x, si può riscrivere come

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \le 1 + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{5}{4}.$$



Si tratta quindi del cerchio di centro il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$, raffigurato qui a fianco.

Domanda 6. Determinare l'immagine dell'intervallo $(1, e)$ attraverso la funzione $f(x) = -\ln x$

✎

Il grafico della funzione è rappresentato qui a fianco. Dal grafico si vede che in corrispondenza dell'intervallo $(1, e)$ la funzione assume i valori dell'intervallo $(-1, 0)$ (-1 è il valore della funzione in $x = e$).

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{3x+1}}$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2(3x+1)}\left(\sqrt{3x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3\right).$$

Domanda 8. Determinare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-2n}$

✎

La serie è riconducibile ad una serie geometrica.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{e^{2n}} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n = e \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{e^3}{e^2-1}.$$

Domanda 9. Nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ calcolare il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2, 3)$

✎

Si tratta, per definizione di complemento algebrico, del determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la 2ª riga e la 3ª colonna, cambiato di segno perché il "posto è dispari". Quindi vale

$$-\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -(-6) = 6.$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = xe^{1-x/y}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{1-x/y} + xe^{1-x/y}\left(-\frac{1}{y}\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{1-x/y} \cdot \frac{x}{y^2} \qquad \text{e quindi} \quad \nabla f = e^{1-x/y}\left(1 - \frac{x}{y}, \frac{x^2}{y^2}\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 07/06/2013

ESERCIZIO 1. Data la funzione

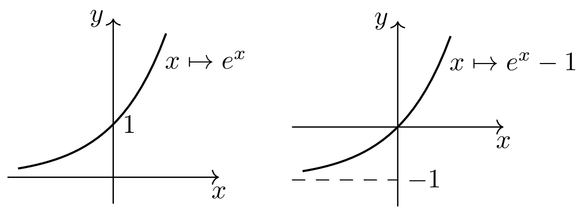
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ -x^2 + 2x & x \geq 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari e si determini l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume. Si dica se f è continua e derivabile in tutti i punti del suo dominio. Si indichino gli eventuali punti di massimo/minimo, globali e locali. Si dica infine se $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ è positivo o negativo.

✎

I grafici delle due funzioni che entrano nella definizione di f si possono ottenere con le trasformazioni elementari o con la geometria analitica.

Per quanto riguarda la funzione esponenziale ecco la semplice trasformazione:

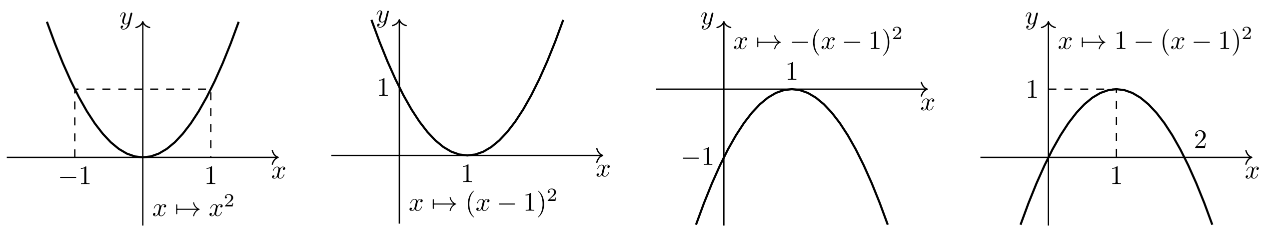


Per quanto riguarda la funzione polinomiale propongo due possibili modi di procedere. Si può semplicemente scrivere $-x^2 + 2x = -x(x-2)$, da cui si ricava che il grafico è quello di una parabola con la concavità rivolta verso il basso e che incontra l'asse x nell'origine e in $x = 2$.

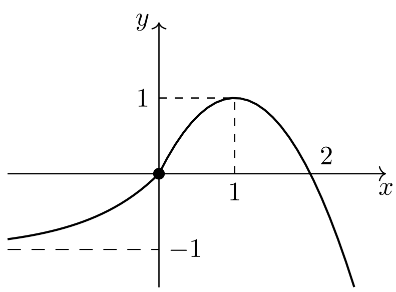
Si può arrivare al grafico anche attraverso le trasformazioni elementari, ma occorre prima riscrivere l'espressione $-x^2 + 2x$ completando il quadrato.

$$-x^2 + 2x = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x-1)^2 + 1.$$

Quindi il grafico cercato è quello che si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$ con le trasformazioni raffigurate qui sotto



Quindi il grafico della funzione f è quello rappresentato qui sotto.



Il grafico ottenuto permette di dire che l'immagine di f è l'intervallo $(-\infty, 1]$. Si osservi che in particolare la funzione assume il valore 1 in $x = 1$.

Il grafico dice che la funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$, essendo in particolare continua in $x = 0$. Infatti si ha

$$f(0) = 0 \text{ (con il polinomio)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x - 1) = 0.$$

La funzione potrebbe essere derivabile in $x = 0$, ma occorre verificare analiticamente (il grafico potrebbe ingannare, in quanto tutto dipende dalle pendenze con cui le due funzioni tendono a zero). Possiamo scrivere che la derivata, in tutti i punti diversi da zero, è

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (-2x + 2) = 2$$

possiamo affermare che f non è derivabile in $x = 0$.

Eventuali punti di massimo/minimo, globali e locali: non c'è un punto di minimo globale in quanto la funzione non è limitata inferiormente; punto di massimo globale è $x = 1$ e il massimo di f è $f(1) = 1$. Non ci sono punti di minimo locale.

Infine l'integrale. Non possiamo dire subito se è positivo o negativo, in quanto la funzione cambia segno nell'intervallo $[-1, 1]$. Occorre il calcolo. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} (e^x - 1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (-x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big(e^x - x\Big|_{-1}^{0} + \Big(-\frac{x^3}{3} + x^2\Big|_{0}^{1} \\ &= (1 - 0) - (e^{-1} + 1) + \Big(-\frac{1}{3} + 1\Big) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$v^1 = (2, 3, 2) \quad , \quad v^2 = (1, 2, 0) \quad , \quad v^3 = (0, -1, 2) \quad , \quad v^4 = (1, 0, 4).$$

Si determini la dimensione ed una base di S. Si dica se S è uguale ad $\mathbb{R}^3$. Si trovi un vettore non nullo ortogonale a v^2 e v^3. Esistono in S vettori a componenti tutte negative?

✎

Il sottospazio S generato dai quattro vettori è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di v^1, v^2, v^3, v^4. Sappiamo che la sua dimensione coincide con il rango della matrice che si ottiene accostando i vettori dati. Quindi poniamo (dispongo per comodità i vettori in colonna: la cosa non è significativa)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Non sembrano esserci evidenti dipendenze sulle righe/colonne. Calcoliamo i determinanti delle sottomatrici 3×3 (pongo come indici le colonne con cui formo la sottomatrice)

$$\det A_{123} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 8 = 0;$$

$$\begin{aligned}
\det A_{124} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; \\
\det A_{134} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 8 = 0; \\
\det A_{234} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 = 0.
\end{aligned}$$

Tutti e quattro i minori del terzo ordine sono nulli e quindi il rango non è 3. Il rango è 2, considerando ad esempio il minore che si ottiene a partire dalle prime due righe e prime due colonne, che vale 1. Quindi possiamo dire che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

Una base di S è quindi formata da una coppia di vettori indipendenti scelti tra v^1, v^2, v^3, v^4. Ad esempio v^1 e v^2 vanno bene, a seguito del minore appena considerato ai fini del rango.[5]

La domanda successiva chiede se S è uguale ad $\mathbb{R}^3$: ovviamente no, dato che S ha dimensione 2.

Troviamo ora un vettore non nullo ortogonale a v^2 e v^3. Occorre che il prodotto interno di questo vettore che cerchiamo per v^2 e v^3 sia nullo. Poniamo questo vettore uguale a (x, y, z). Dobbiamo avere

$$\begin{cases} \big\langle (x,y,z),(1,2,0) \big\rangle = 0 \\ \big\langle (x,y,z),(0,-1,2) \big\rangle = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y \\ z = \frac{y}{2}. \end{cases}$$

Quindi ad esempio,[6] prendendo $y = 2$ otteniamo il vettore $(-4, 2, 1)$.

Ultima domanda: esistono in S vettori a componenti tutte negative? Ricordo che S è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di v^1, v^2, v^3, v^4, e cioè l'insieme dei vettori del tipo

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + d \\ 3a + 2b - c \\ 2a + 2c + 4d \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che questo vettore può avere componenti tutte negative, basta ad esempio prendere a negativo e gli altri coefficienti nulli. Quindi ad esempio il vettore $-v^1 = (-2, -3, -2)$ appartiene ad S e ha componenti tutte negative.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = xy - \ln \left(\frac{x}{y - 1} \right),$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f e si trovino eventuali punti stazionari. Si calcoli infine la matrice Hessiana (gradiente secondo).

✎

La condizione di esistenza della funzione f è data dalla disequazione

$$\frac{x}{y - 1} > 0,$$

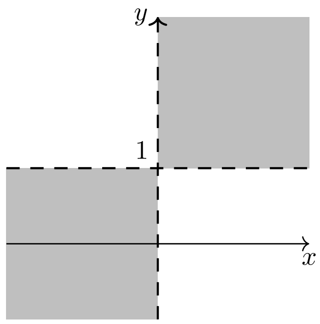
che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 1. \end{cases}$$

La regione che ne risulta è raffigurata in grigio qui sotto.

[5] Si verifica facilmente che ogni coppia di vettori è una base, dato che scelti comunque due vettori dei quattro, essi sono indipendenti.

[6] Non possiamo prendere $y = 0$ perché cerchiamo un vettore non nullo.



Si tratta di un insieme aperto, in quanto tutti i punti sono interni. In altre parole nessun punto della frontiera (sulle rette di equazione $x = 0$ o $y = 1$) appartiene al dominio di f.

Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{\frac{x}{y-1}} \cdot \frac{1}{y-1} = y - \frac{1}{x}$$

e quella rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{\frac{x}{y-1}} \cdot \left(-\frac{x}{(y-1)^2} \right) = x + \frac{1}{y-1}. \quad \text{Il gradiente è quindi } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

I possibili punti stazionari si trovano annullando il gradiente di f, e cioè ponendo le due derivate parziali uguali a zero. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x} = 0 \\ x + \frac{1}{y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x + \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x + \frac{x}{1-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \frac{x^2-2x}{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \frac{x(x-2)}{x-1} = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione ha per soluzioni $x = 0$ oppure $x = 2$. La prima non è accettabile, la seconda porta all'unica soluzione del sistema $(2, \frac{1}{2})$, che però non è accettabile in quanto non appartiene al dominio della funzione. Non ci sono quindi punti stazionari.

La matrice Hessiana (gradiente secondo) è la matrice delle derivate parziali seconde di f. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} &= \frac{1}{x^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} &= 1; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} &= 1; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} &= -\frac{1}{(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{(y-1)^2} \end{pmatrix}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/06/2013

Domanda 1. Senza effettuare la divisione dire se il polinomio $4x^3 - 2x - \frac{1}{2}$ è divisibile per $x + \frac{1}{2}$

✎

Ricordando il teorema di Ruffini, un polinomio P è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$. Nel nostro caso, ponendo $P(x) = 4x^3 - 2x - \frac{1}{2}$, si ha

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0. \quad \text{Quindi la risposta è sì.}$$

Domanda 2. Scrivere in almeno altri due modi equivalenti l'espressione $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{2}$

✎

Possiamo scrivere

$$\log_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \log_3 \sqrt{3} - \log_3 2 = \frac{1}{2} - \log_3 2.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\log_2^2 x + 3\log_2 x = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi l'equazione equivale a

$$\log_2 x\big(\log_2 x + 3\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 x = 0 \ \vee \ \log_2 x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = \frac{1}{8}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2^{1/x^2} - 4 \geq 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

$$2^{1/x^2} \geq 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

che con la condizione di esistenza fornisce l'insieme $S = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

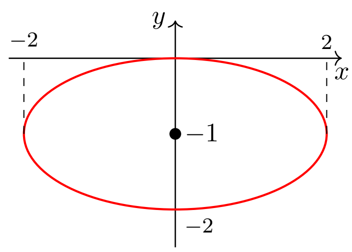
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\frac{x^2}{2} + 2(y+1)^2 = 2$

✎

Dividendo ambo i membri per 2 l'equazione diventa

$$\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1,$$

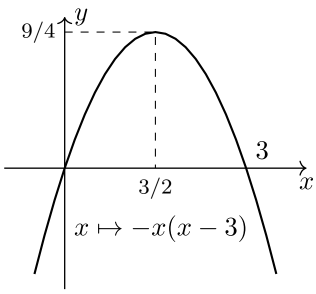
che è l'equazione dell'ellisse di centro $(0, -1)$ e semiassi $a = 2$ e $b = 1$. L'ellisse è raffigurata in rosso qui a fianco.

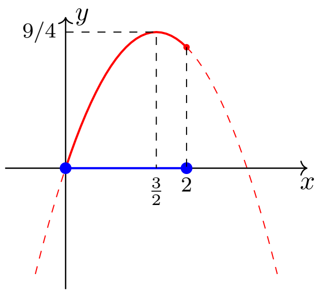


Domanda 6. Dopo aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = -x(x-3)$, si indichino i punti di massimo/minimo locali e globali di f nell'intervallo $[0, 2]$

✎

Il grafico di f è una parabola con la concavità rivolta verso il basso che incontra l'asse x nell'origine e in $x = 3$. L'intervallo in cui consideriamo la funzione f è $[0, 2]$. Il tutto è rappresentato nella figura che segue.





Dal grafico si vede che $x = \frac{3}{2}$ è punto di massimo globale, $x = 0$ è punto di minimo globale e infine $x = 2$ è punto di minimo locale. Relativamente a quest'ultima affermazione si consideri che in un intorno sinistro di $x = 2$ la funzione assume valori maggiori di $f(2)$.

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{(1-x)/x}$

✎

$$f'(x) = e^{(1-x)/x} + xe^{(1-x)/x} \cdot \frac{-x-1+x}{x^2} = e^{(1-x)/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

Osservando che la derivata di $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$ possiamo scrivere

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x}\,\mathrm{d}x = -e^{1/x} + c.$$

Domanda 9. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

✎

Indicando con A la matrice data, anzitutto $\det A = 4$ e quindi A è invertibile. Poi si ha

$$A^\star = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = y \ln\left(x^2 - \frac{1}{y}\right)$

✎

Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 - \frac{1}{y}} \cdot 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln\left(x^2 - \frac{1}{y}\right) + y \cdot \frac{1}{x^2 - \frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Quindi

$$\nabla f = \left(\frac{2xy^2}{x^2y - 1}\ ,\ \ln\left(x^2 - \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{x^2y - 1}\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 25/06/2013

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si trovino i punti stazionari e, con le informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si stabilisca infine se la funzione f è trascurabile rispetto alla funzione $g(x) = x$, per $x \to +\infty$, oppure è equivalente ad essa.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è data da

$$\frac{x}{x+1} > 0,$$

che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < -1. \end{cases}$$

Quindi il dominio di f è $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, $(-1)^-$, 0^+ e $+\infty$.
Per i limiti all'infinito la frazione argomento del logaritmo è una forma indeterminata, ma si ha facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1.$$ [7]

Quindi agli infiniti abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \pm\infty - \ln 1 = \pm\infty.$$

Con l'algebra dei limiti si ha poi

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - \ln\left(\frac{0^+}{0+1}\right) = 0 - \ln 0^+ = +\infty;$$

e

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -1 - \ln\left(\frac{-1}{(-1)^- + 1}\right) = -1 - \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = -1 - \ln(+\infty) = -\infty.$$

La derivata di f è

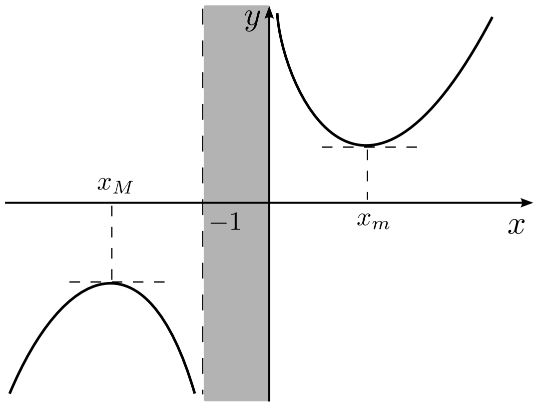
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)}.$$

Per i punti stazionari occorre annullare la derivata.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Si osservi che, con i limiti trovati, i due punti stazionari sono necessariamente un punto di minimo e un punto di massimo (non c'è nemmeno la necessità di studiare il segno della derivata). Precisamente $x_M = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo (locale non globale) e $x_m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo (locale non globale).
Un possibile grafico di f è il seguente.

[7] Si poteva anche trascurare la costante a denominatore e concludere in modo ancora più immediato.



Possiamo verificare facilmente che il grafico è in effetti come disegnato, e cioè che la funzione nel punto di massimo ha un valore negativo e positivo nel punto di minimo. Serve una calcolatrice: si trova $x_M \approx -1.62$ con $f(x_M) \approx -2.58$ e $x_m \approx 0.62$ con $f(x_m) \approx 1.58$.

Passiamo all'ultima domanda: stabilire se la funzione f è trascurabile rispetto alla funzione $g(x) = x$, per $x \to +\infty$, oppure è equivalente ad essa. Si tratta di calcolare il limite per $x \to +\infty$ del quoziente tra f e g: se risulta 0 è trascurabile, se risulta 1 è equivalente. Quindi calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = 1,$$

ricordando che il logaritmo tende a zero. Pertanto la funzione f è equivalente alla funzione x, per $x \to +\infty$.

ESERCIZIO 2. Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v^1 = (-1, 1, 2) \quad , \quad v^2 = (1, 1, -1) \quad , \quad v^3 = (-2, -1, 1),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si indichino tutti i modi di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare dei tre vettori dati. Indicato con S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da essi generato, si calcoli la dimensione di S e si forniscano due possibili basi di S. Trovare infine l'insieme dei vettori contemporaneamente ortogonali a v^1, v^2 e v^3.

✎

Per stabilire se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti la cosa più semplice da fare è calcolare il determinante della matrice che si ottiene accostando i vettori. Quindi,

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ risulta } (1^{\text{a}} \text{ riga}) \ \det A = -1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3.$$

Pertanto i tre vettori sono indipendenti.

Per definizione questo significa che l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare dei tre vettori dati è il modo banale, cioè con coefficienti tutti nulli. Quindi la riposta alla seconda domanda è: soltanto con la combinazione lineare con coefficienti tutti nulli.

Il sottospazio S generato da v^1, v^2, v^3 è l'insieme di tutte le possibili loro combinazioni lineari. Sappiamo che la dimensione di S coincide con il rango della matrice A. Dato che il determinante di A è diverso da zero, il rango di A è 3 e quindi $\dim S = 3$. Questo significa che S è tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$.

Dobbiamo indicare due possibili basi di S. Possiamo rispondere dicendo che una è la base fondamentale, cioè

$$u^1 = (1, 0, 0) \quad , \quad u^2 = (0, 1, 0) \quad , \quad u^3 = (0, 0, 1),$$

e che un'altra possibile base è data da v^1, v^2, v^3 che, per quanto appena visto, sono generatori indipendenti di $S = \mathbb{R}^3$.

Ultima domanda: trovare l'insieme dei vettori contemporaneamente ortogonali a v^1, v^2 e v^3. Occorre che il prodotto interno di questi vettori che cerchiamo per v^1, v^2 e v^3 sia nullo. Poniamo questo vettore incognito uguale a (x, y, z).

Dobbiamo avere

$$\begin{cases} \big\langle (x,y,z),(-1,1,2)\big\rangle = 0 \\ \big\langle (x,y,z),(1,1,-1)\big\rangle = 0 \\ \big\langle (x,y,z),(-2,-1,1)\big\rangle = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ -2x-y+z=0. \end{cases}$$

Ora possiamo concludere senza fare alcun calcolo: dato che il determinante di A è diverso da zero, in base al teorema di Cramer il sistema (quadrato) ha una sola soluzione, che è necessariamente la soluzione banale ($x=y=z=0$) in quanto il sistema è omogeneo.

Quindi c'è un solo vettore contemporaneamente ortogonale a v^1, v^2 e v^3 ed è il vettore nullo.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln(1-x^2)\cdot\ln(2y-y^2-x),$$

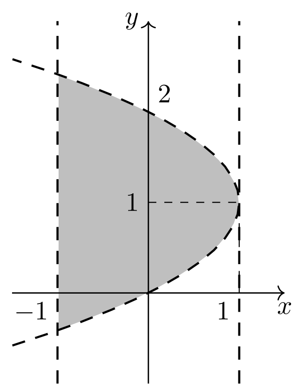
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio D. Si indichino un punto interno ed un punto di frontiera di D. Si calcoli il gradiente di f e si provi che il punto $(0,1)$ è stazionario. Si determini infine la curva di livello 0 della funzione f.

✎

La condizione di esistenza della funzione f è data dal sistema di condizioni

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ 2y-y^2-x>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2<1 \\ x<-y(y-2) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -1<x<1 \\ x<-y(y-2). \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata nella regione compresa tra le due rette verticali di equazione $x=-1$ e $x=1$. La seconda è verificata nella regione che sta alla sinistra della parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso sinistra e che incontra l'asse y in $y=0$ oppure $y=2$. Per un grafico corretto è opportuno osservare che il vertice della parabola è nel punto $(1,1)$.[8]



Il dominio D di f è raffigurato in grigio qui a fianco.

Dobbiamo indicare un punto interno ed un punto di frontiera di D. Abbiamo molte scelte possibili. Ad esempio sono punti interni:

$$(0,1) \quad,\quad \left(\frac{1}{2},1\right) \quad,\quad \left(-\frac{1}{2},0\right) \quad,\quad \left(-\frac{1}{2},1\right).$$

E ad esempio sono punti di frontiera:

$$(0,0) \quad,\quad (0,2) \quad,\quad (-1,0) \quad,\quad (-1,1) \quad,\quad \left(-1,1-\sqrt{2}\right) \quad,\quad \left(-1,1+\sqrt{2}\right).$$ [9]

Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1-x^2}(-2x)\cdot\ln(2y-y^2-x) + \ln(1-x^2)\cdot\frac{1}{2y-y^2-x}(-1)$$

e quella rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(1-x^2)\cdot\frac{1}{2y-y^2-x}(2-2y). \quad \text{Il gradiente è quindi } \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ora proviamo che il punto $(0,1)$ è stazionario. Dobbiamo verificare che in questo punto il gradiente si annulla e cioè che si annullano le due derivate parziali. È immediato, dato che con $x=0$ il termine $\ln(1-x^2)$ si annulla.

Infine la curva di livello 0 della funzione f. Si tratta dei punti in cui la funzione si annulla, cioè dei punti che sono soluzione di

$$\ln(1-x^2)\cdot\ln(2y-y^2-x) = 0.$$

Questa equivale alle due possibilità

$$\ln(1-x^2)=0 \quad\vee\quad \ln(2y-y^2-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x^2=1 \quad\vee\quad 2y-y^2-x=1$$

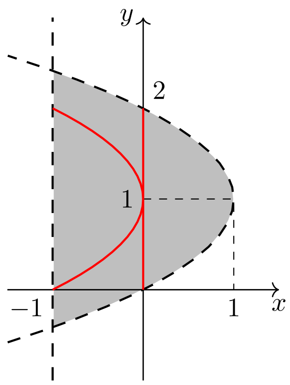
[8]Non serve ricordare la formula del vertice della parabola! Basta osservare che per $y=1$ si ottiene $x=1$.

[9]Per trovare gli ultimi due punti, che sono le intersezioni tra la parabola e la retta di sinistra, basta porre $-y(y-2)=-1$ e risolvere l'equazione di secondo grado.

cioè

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x = -y^2 + 2y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -(y-1)^2.$$

Si tratta dei punti del dominio che stanno sull'asse y oppure sulla parabola di equazione $x = -(y-1)^2$. La curva di livello è raffigurata in rosso qui sotto. Per un disegno più preciso si osservi che questa parabola incontra la retta di sinistra nei punti di ordinata $y = 0$ e $y = 2$.



ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 13/09/2013

Domanda 1. Trovare un polinomio di primo grado per il quale $P(x) = x^2 - x - 12$ sia divisibile

✎

Si può rispondere in molti modi. Ad esempio, osservando che il polinomio P si scompone in $(x+3)(x-4)$, si ha che appunto $x-3$ oppure $x-4$ sono polinomi di primo grado per i quali P è divisibile.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{a^3b^4}{a^2b^2+ab}$

✎

$$\frac{a^3b^4}{a^2b^2+ab} = \frac{a^3b^4}{ab(ab+1)} = \frac{a^2b^3}{ab+1}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$3 + 4\log_2 x = 0$$

✎

Nella condizione di esistenza $x > 0$, l'equazione equivale a

$$\log_2 x = -\frac{3}{4} \quad \text{e quindi a} \quad x = 2^{-3/4}, \text{ che è accettabile.}$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2x - \frac{3}{x} > 1$$

✎

La disequazione equivale a

$$2x - \frac{3}{x} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 - x - 3}{x} > 0$$

e quindi ai due sistemi

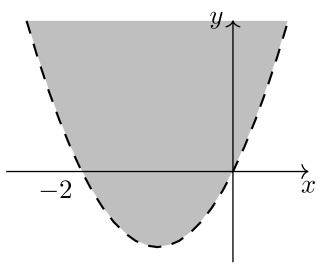
$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 3/2 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 3/2 \\ x < 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni $x > \frac{3}{2}$ e il secondo $-1 < x < 0$. Quindi $S = (-1,0) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y > x^2 + 2x$

✎

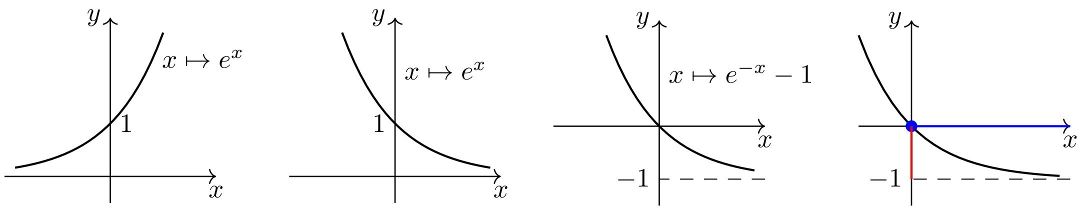
La disequazione si può scrivere come $y > x(x+2)$ e quindi si tratta della regione che sta al di sopra della parabola con asse verticale, concavità verso l'alto e che incontra l'asse x nell'origine e in $x = -2$. La regione è raffigurata in grigio qui sotto.



Domanda 6. Dopo aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = e^{-x} - 1$, si indichino gli estremi (inferiore e superiore) di f nell'intervallo $[0, +\infty)$

✎

Il grafico di f si può ottenere con le trasformazioni grafiche elementari.



Nel grafico più a destra è evidenziato in blu l'intervallo in cui consideriamo la funzione, cioè $[0, +\infty)$, e in rosso l'immagine di questo attraverso f, cioè $(-1, 0]$. Pertanto si ha

$$\inf f = -1 \quad \text{e} \quad \sup f = \max f = 0.$$

Si noti che -1 non è il minimo di f in $[0, +\infty)$, ma solo estremo inferiore, dato che la funzione non assume il valore -1.

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{x + e^{-x}}{x^2}$

✎

Con la regola di derivazione del quoziente si ha

$$f'(x) = \frac{(1 - e^{-x}) \cdot x^2 - (x + e^{-x}) \cdot 2x}{x^4}.$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x \sqrt[3]{5x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int x \sqrt[3]{5x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10} \int 10x(5x^2 + 1)^{1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 + 1)^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{40}(5x^2 + 1)^{4/3} + c.$$

Domanda 9. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Il determinante vale -3. La matrice dei complementi algebrici è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{La sua trasposta è} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi l'inversa è} \quad -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$

✎

Il gradiente di f è $\nabla f = (2x - 2, 2y)$. Il gradiente si annulla se e solo se $(2x - 2, 2y) = (0, 0)$ e cioè se e solo se $x = 1$ e $y = 0$. C'è un solo punto stazionario ed è $(1, 0)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 17/09/2013

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - x$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si trovino i punti stazionari e, con le informazioni ottenute, si disegni un possibile grafico di f. Si scriva infine l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è data da

$$\frac{x-1}{x} > 0,$$

che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1<0 \\ x<0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>1 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<1 \\ x<0. \end{cases}$$

Quindi il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, 0^-, 1^+ e $+\infty$.
Per i limiti all'infinito la frazione argomento del logaritmo è una forma indeterminata, ma si ha facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$ [10]

Quindi agli infiniti abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - x\right) = \ln 1 \mp \infty = \mp\infty.$$

Con l'algebra dei limiti si ha poi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{1^+-1}{1}\right) - 1 = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) - 1 = \ln 0^+ - 1 = -\infty;$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln\left(\frac{0-1}{0^-}\right) - 0 = \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) - 0 = \ln(+\infty) = +\infty.$$

La derivata di f è

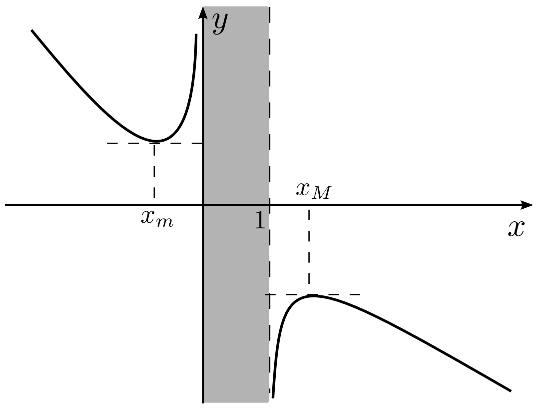
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x-x+1}{x^2} - 1 = \frac{1}{x(x-1)} - 1 = \frac{1-x^2+x}{x(x-1)}.$$

Per i punti stazionari occorre annullare la derivata.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Si osservi che, con i limiti trovati, i due punti stazionari sono necessariamente un punto di minimo e un punto di massimo (non c'è nemmeno la necessità di studiare il segno della derivata). Precisamente $x_m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo (locale non globale) e $x_M = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo (locale non globale).
Un possibile grafico di f è il seguente.

[10] Si poteva anche trascurare la costante a denominatore e concludere in modo ancora più immediato.



Possiamo verificare facilmente che il grafico è in effetti come disegnato, e cioè che la funzione nel punto di massimo ha un valore negativo e positivo nel punto di minimo. Serve una calcolatrice: si trova $x_M \approx 1.62$ con $f(x_M) \approx -2.58$ e $x_m \approx -0.62$ con $f(x_m) \approx 1.58$.

Passiamo all'ultima domanda: l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

L'equazione della retta tangente in un punto di ascissa x_0 è in generale

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

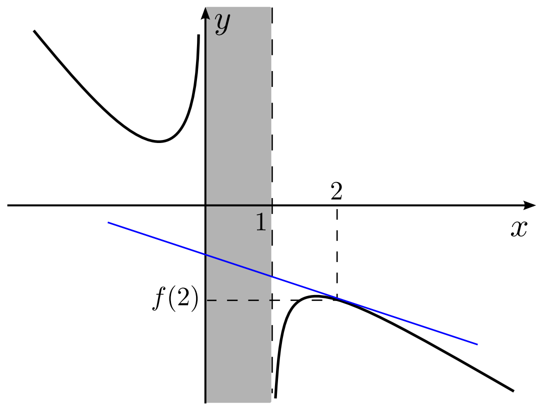
Nel nostro caso abbiamo

$$x_0 = 2\ ,\ f(x_0) = f(2) = \ln\frac{1}{2} - 2\ ,\ f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto l'equazione della retta tangente richiesta è

$$y + \ln 2 + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{oppure} \quad y = -\frac{1}{2}x - \ln 2 - 1.$$

Si tratta ovviamente di una retta con pendenza negativa, raffigurata in blu qui a fianco.



ESERCIZIO 2. Dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v^1 = (1, -2, 1) \quad , \quad v^2 = (1, -1, 1) \quad , \quad v^3 = (0, 1, 1),$$

si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti e se formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si scriva il vettore $(1, 0, 0)$ come loro combinazione lineare e si dica se è possibile scrivere un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ come loro combinazione lineare. Si calcolino infine la norma di v^1 e il prodotto interno (o scalare) di v^2 e v^3.

✎

Per stabilire se i tre vettori sono dipendenti o indipendenti la cosa più semplice da fare è calcolare il determinante della matrice che si ottiene accostando i vettori. Quindi,

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ risulta } (1^{\text{a}} \text{ colonna}) \ \det A = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) = 1.$$

Pertanto i tre vettori sono indipendenti. Essi formano una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto sono indipendenti e sono tre.

Scriviamo il vettore $(1, 0, 0)$ come loro combinazione lineare (scrivo in colonna per comodità):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ -2a - b + c \\ a + b + c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza equazione si ricava $c = -1$ e quindi il sistema equivale poi a

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ -2a - 1 + a = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ -a = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -1. \end{cases}$$

Quindi si ha $(1, 0, 0) = -2v^1 + 3v^2 - v^3$.

Sì, è possibile scrivere un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare dei tre vettori dati, in quanto essi formano una base di $\mathbb{R}^3$, e quindi sono in particolare generatori di $\mathbb{R}^3$.

La norma di v^1 è

$$\|v^1\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Infine il prodotto interno (o scalare) di v^2 e v^3 è

$$\langle v^2, v^3 \rangle = \langle (1, -1, 1), (0, 1, 1) \rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

e quindi v^2 e v^3 sono ortogonali.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(y - x + 1) + \ln(2x - x^2 - y^2),$$

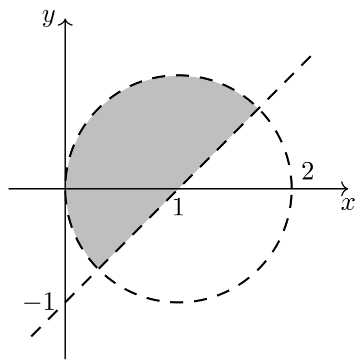
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio D. Si indichino un punto interno ed un punto di frontiera di D. Si calcoli il gradiente di f e si dica se il punto $(1, \frac{1}{2})$ è stazionario.

✎

La condizione di esistenza della funzione f è data dal sistema di condizioni

$$\begin{cases} y - x + 1 > 0 \\ 2x - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x - 1 \\ x^2 + y^2 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x - 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x - 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata nella regione al di sopra della retta di equazione $y = x - 1$. La seconda è verificata nel cerchio (aperto) di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Per un grafico corretto è opportuno osservare che la retta passa per il centro del cerchio.



Il dominio D di f è raffigurato in grigio qui a fianco.

Dobbiamo indicare un punto interno ed un punto di frontiera di D. Abbiamo molte scelte possibili. Ad esempio sono punti interni:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{oppure} \quad \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

E ad esempio sono punti di frontiera:

$$(0, 0) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (1, 1).$$

Calcoliamo il gradiente di f. La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y - x + 1}(-1) + \frac{1}{2x - x^2 - y^2}(2 - 2x)$$

e quella rispetto ad y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y - x + 1} + \frac{1}{2x - x^2 - y^2}(-2y). \quad \text{Il gradiente è quindi} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ora vediamo se il punto $(1, \frac{1}{2})$ è stazionario. Si vede subito che la derivata parziale rispetto ad x non si annulla in quanto si annulla il secondo dei due addendi ma il primo no. Comunque il calcolo del gradiente fornisce

$$\nabla f \left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(-2, \frac{2}{3}\right).$$