

**Svolgimento dei temi d'esame di Matematica**  
**Anno Accademico 2013/14**

**Alberto Peretti**

**Maggio 2015**

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 11/11/2013**

---

**Domanda 1.** Completando il quadrato scrivere il polinomio  $P(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$  nella forma  $(x + a)^2 + b$



$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8} = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{5}{8} = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}.$$

**Domanda 2.** Risolvere l'equazione

$$1 + 2 \ln(x + 3) = 0$$



L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \text{ (condizione di esistenza)} \\ 2 \ln(x + 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ \ln(x + 3) = \ln e^{-1/2} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x > -3 \\ x + 3 = e^{-1/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x = e^{-1/2} - 3. \end{cases}$$

La soluzione è pertanto  $x = e^{-1/2} - 3$ .

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$e^{2x} - 5e^x = 14$$



Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile  $e^x = t$  l'equazione diventa

$$t^2 - 5t - 14 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t - 7) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 7.$$

Pertanto, tornando alla variabile  $x$ , le soluzioni sono per

$$e^x = -2 \vee e^x = 7. \text{ La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione } x = \ln 7.$$

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$x(x + 1) < 5$$



La disequazione equivale a

$$x^2 + x - 5 < 0. \text{ Le soluzioni dell'equazione associata sono } x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono l'intervallo  $(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2})$ .

**Domanda 5.** Risolvere la disequazione

$$\frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 1} \geq 0$$



C'è la condizione di esistenza  $x \neq -1$ . Ci sono varie possibili strade per la ricerca delle soluzioni, come ad esempio lo studio del segno dei tre fattori, dai quali ricavare poi il segno della frazione. Propongo invece la via dei due sistemi relativi al segno concorde di numeratore e denominatore. La disequazione equivale a

$$\begin{cases} (x + 2)(x - 3) \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x + 2)(x - 3) \leq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 3 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x < -1. \end{cases}$$

Aiutandosi eventualmente con un semplice grafico si trova che le soluzioni sono date dall'insieme  $S = [-2, -1) \cup [3, +\infty)$ .

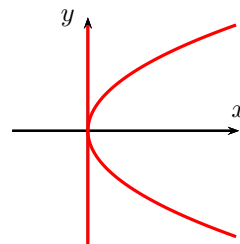
**Domanda 6.** Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $3xy^2 - 3x^2 = 0$



Raccogliendo  $3x$  l'equazione diventa

$$3x(y^2 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = y^2.$$

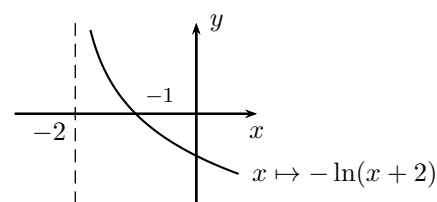
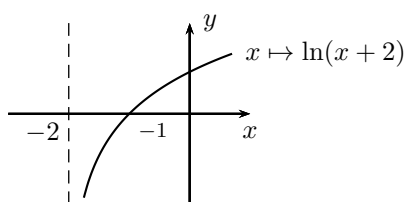
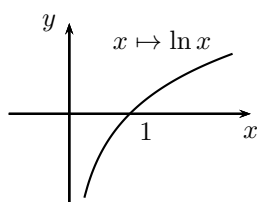
Le soluzioni sono pertanto i punti che stanno o sulla retta di equazione  $x = 0$ , cioè l'asse  $y$ , o sulla parabola di equazione  $x = y^2$ , parabola con vertice nell'origine e asse orizzontale. La raffigurazione è in rosso qui a fianco.



**Domanda 7.** Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione  $f(x) = -\ln(x+2)$



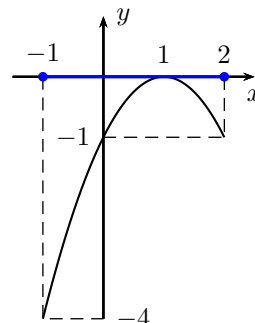
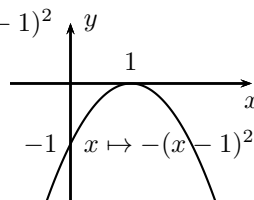
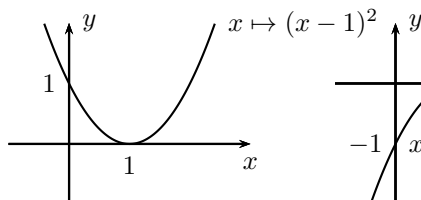
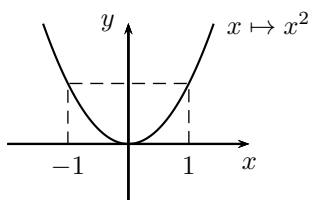
Il grafico si può ottenere a partire dal grafico di  $x \mapsto \ln x$  con le trasformazioni indicate qui sotto



**Domanda 8.** Della funzione  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = -(x-1)^2$ , si determinino il sup e l'inf



La funzione in tutto  $\mathbb{R}$  ha per grafico una parabola con asse verticale, concavità verso il basso e vertice nel punto  $(1, 0)$ . Viene però definita solo nell'intervallo  $[-1, 2]$ . Il grafico si ottiene con le trasformazioni elementari riportate qui sotto.



Dal grafico si vede che l'estremo superiore di  $f$  è 0 (il valore che la funzione assume per  $x = 1$ ) e che l'estremo inferiore è  $f(-1) = -4$ . I due valori sono anche, rispettivamente, il massimo e il minimo della funzione.

**Domanda 9.** Si calcoli il  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt{x}}{e^x} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right)$



Con l'algebra dei limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt{x}}{e^x} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{0^+}}{e^0} + \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{0^+}{1} + \frac{1}{0^+} = \frac{0^+}{1} + \frac{1}{0^+} = 0 + \infty = +\infty.$

**Domanda 10.** Si calcoli la derivata della funzione  $f(x) = (3x+4)^2 e^{3x+4}$



$$f'(x) = 2(3x+4) \cdot 3 \cdot e^{3x+4} + (3x+4)^2 e^{3x+4} \cdot 3.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 11/11/2013**

---

**Domanda 1.** Completando il quadrato scrivere il polinomio  $P(x) = x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{10}$  nella forma  $(x + a)^2 + b$



$$x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{1}{10} = x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{9}{100} - \frac{9}{100} + \frac{1}{10} = \left(x + \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{100}.$$

**Domanda 2.** Risolvere l'equazione

$$1 - 2\sqrt{x+2} = 0$$



L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 & (\text{condizione di esistenza}) \\ 2\sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x+2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{1}{4} - 2. \end{cases} \quad \text{La soluzione è pertanto } x = -\frac{7}{4}.$$

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$x^4 - 2x^2 = 3$$



Si tratta di un'equazione di quarto grado riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile  $x^2 = t$  l'equazione diventa

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 3.$$

Pertanto, tornando alla variabile  $x$ , le soluzioni sono per

$$x^2 = -1 \vee x^2 = 3. \quad \text{La prima è impossibile e la seconda fornisce le due soluzioni } x = \pm\sqrt{3}.$$

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$x^2 < 4x + 5$$



La disequazione equivale a

$$x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) < 0.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono l'intervallo  $(-1, 5)$ .

**Domanda 5.** Risolvere la disequazione

$$\frac{x+2}{x(x-1)} \geq 0$$



Ci sono le condizioni di esistenza  $x \neq 0$  e  $x \neq 1$ . Ci sono varie possibili strade per la ricerca delle soluzioni, come ad esempio lo studio del segno dei tre fattori, dai quali ricavare poi il segno della frazione. Propongo invece la via dei due sistemi relativi al segno concorde di numeratore e denominatore. La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -2 \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Aiutandosi eventualmente con un semplice grafico si trova che le soluzioni sono date dall'insieme  $S = [-2, 0) \cup (1, +\infty)$ .

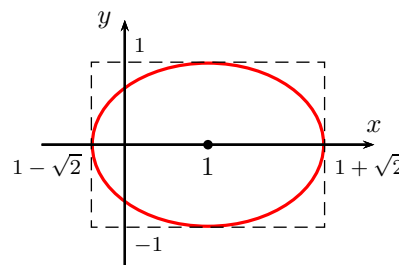
**Domanda 6.** Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $(x-1)^2 + 2y^2 = 2$



Si tratta di un'ellisse. Conviene riscrivere l'equazione, dividendo per 2, nella forma

$$\frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1.$$

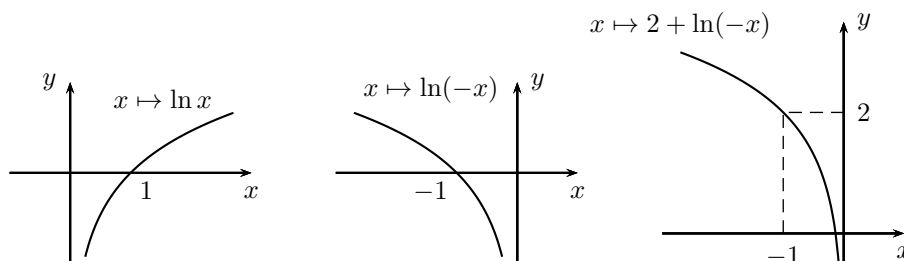
Si tratta dell'ellisse di centro il punto  $(1, 0)$  e semiassi  $a = \sqrt{2}$  e  $b = 1$ . È raffigurata in rosso qui a fianco.



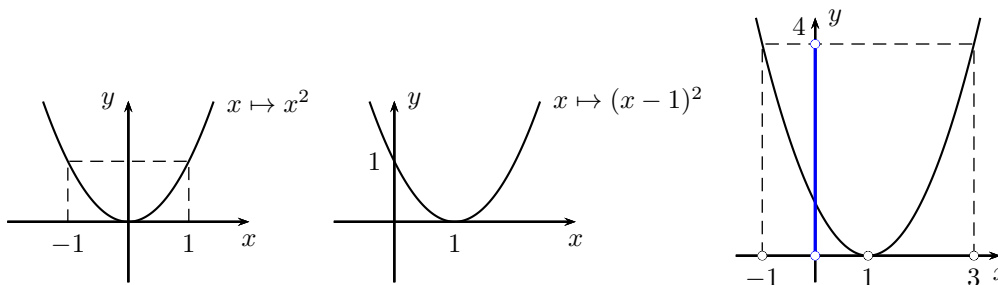
**Domanda 7.** Ottenendolo con le trasformazioni elementari si disegni il grafico della funzione  $f(x) = 2 + \ln(-x)$



Il grafico si può ottenere a partire dal grafico di  $x \mapsto \ln x$  con le trasformazioni indicate qui sotto



**Domanda 8.** Determinare la controimmagine dell'intervallo  $(0, 4)$  attraverso la funzione  $f(x) = (x-1)^2$



La figura fornisce il grafico della funzione  $f$ , che si può ottenere dal grafico di  $x \mapsto x^2$  con una traslazione a destra di una unità. L'intervallo  $(0, 4)$  è rappresentato in blu sull'asse delle  $y$ . I valori di  $x$  in cui la funzione vale 4 si possono ottenere risolvendo l'equazione  $(x-1)^2 = 4$ , cioè  $x-1 = \pm 2$  e quindi sono  $x = -1$  oppure  $x = 3$ . Attenzione che l'intervallo  $(0, 4)$  è aperto e quindi questi due valori sono esclusi dalla controimmagine. Anche il punto  $x = 1$ , in cui la funzione vale 0, è escluso. La controimmagine è quindi data dall'insieme  $(-1, 1) \cup (1, 3)$ .

**Domanda 9.** Si calcoli il  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{\ln(-x)} + xe^{-x} \right)$



Con l'algebra dei limiti  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{\ln(-x)} + xe^{-x} \right) = \frac{e^{-\infty}}{\ln(+\infty)} + (-\infty) \cdot e^{+\infty} = \frac{0}{+\infty} - \infty = 0 - \infty = -\infty.$

**Domanda 10.** Si calcoli la derivata della funzione  $f(x) = \sqrt{3x+2} e^{3x+2}$



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3 \cdot e^{3x+2} + \sqrt{3x+2} e^{3x+2} \cdot 3.$$

**PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 14/11/2013**

---

**ESERCIZIO 1.** Data la funzione

$$f(x) = x^2 - \ln(x+1)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di  $f$ , si trovino i punti stazionari e si stabilisca se essi sono punti di massimo/minimo. Con le informazioni ottenute si disegni un possibile grafico di  $f$ . Attraverso il segno della derivata seconda si dica infine se la funzione è concava o convessa.



La condizione di esistenza per la funzione  $f$  è  $x+1 > 0$ , cioè  $x > -1$ , quindi il dominio è l'intervallo  $(-1, +\infty)$ . Pertanto i limiti significativi da calcolare sono:  $(-1)^+$  e  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 0 - \ln((-1)^+ + 1) = 0 - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty, \text{ che è una forma indeterminata.}$$

Ricordando che la funzione logaritmica è trascurabile all'infinito rispetto alla potenza, possiamo dire che il limite a  $+\infty$  è  $+\infty$ . Osserviamo anche che risulta  $f(0) = 0$ .

Calcoliamo la derivata.

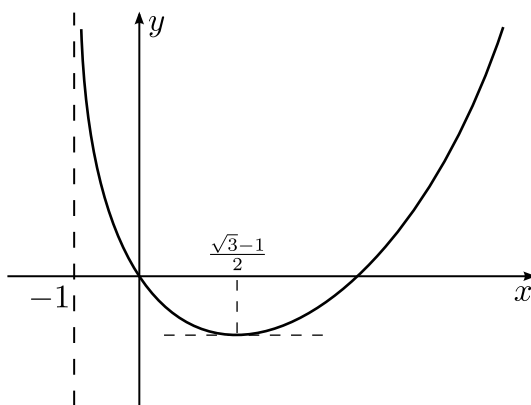
$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1}.$$

Per trovare i punti stazionari annulliamo la derivata.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Con la formula risolutiva (ridotta) dell'equazione di secondo grado si ha  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ . La soluzione negativa non è accettabile in quanto non sta nel dominio. La soluzione positiva è  $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (circa 0.37) ed è l'unico punto stazionario di  $f$ . I limiti della funzione ci dicono che sicuramente il punto stazionario trovato è un punto di minimo, anzi è il punto di minimo globale di  $f$ .

Un possibile grafico è il seguente:



Calcoliamo la derivata seconda per studiare la convessità/concavità della funzione.

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

La derivata seconda è chiaramente sempre positiva e quindi la funzione  $f$  è convessa nel suo dominio. Faccio notare che nel disegno di un possibile grafico avevo disegnato una funzione convessa, ma in realtà, prima di studiare la derivata

seconda, non avevo la certezza che la funzione, dopo aver assunto il suo minimo, non avesse un punto di flesso a partire dal quale diventasse concava.

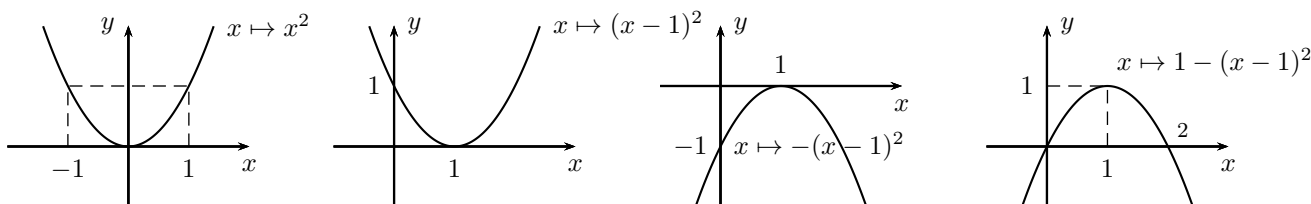
**ESERCIZIO 2.** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2 & x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & x > 1, \end{cases}$$

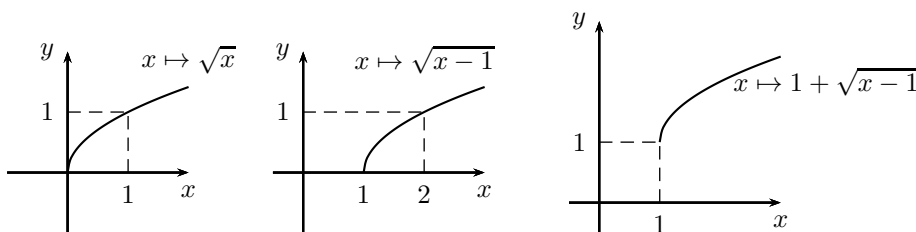
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si stabilisca se alla funzione  $f$  è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo  $[-1, 2]$ . Si stabilisca se alla funzione  $f$  è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo  $[-1, 2]$ .



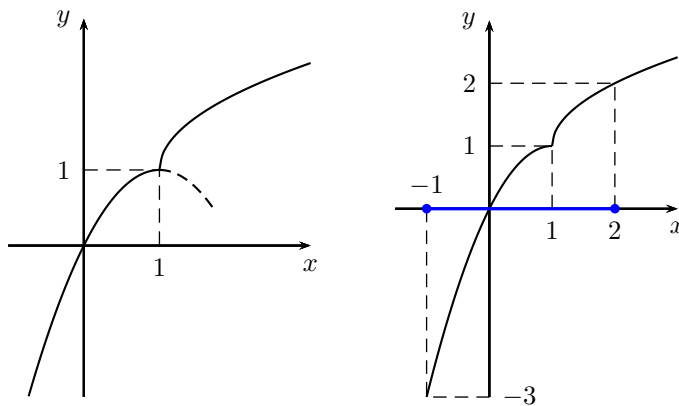
Il grafico della parabola si ottiene a partire dal grafico di  $x \mapsto x^2$  con queste trasformazioni elementari.



Il grafico della funzione  $x \mapsto 1 + \sqrt{x-1}$  si ottiene a partire dal grafico di  $x \mapsto \sqrt{x}$  con queste trasformazioni elementari.



Pertanto il grafico della funzione  $f$  è qui sotto a sinistra.



Per stabilire se è applicabile il teorema degli zeri dobbiamo verificare se sono vere le ipotesi del teorema, e cioè che la funzione sia continua nell'intervallo (che è chiuso e limitato)  $[-1, 2]$  e che inoltre i valori di  $f$  agli estremi dell'intervallo abbiano segno opposto.

Nel grafico sopra a destra sono evidenziati l'intervallo  $[-1, 2]$  e i valori della funzione agli estremi. Dal grafico possiamo dire che la funzione è continua, essendo in particolare continua in  $x = 1$ , che era l'unico punto "critico".

I valori di  $f$  agli estremi sono

$$f(-1) = 1 - (x-1)^2 \Big|_{x=-1} = -3 \quad \text{e} \quad f(2) = 1 + \sqrt{x-1} \Big|_{x=2} = 2.$$

Quindi possiamo affermare che anche l'ipotesi sul segno dei valori agli estremi è verificata e che quindi il teorema è applicabile.

Ora vediamo se è applicabile il teorema di Lagrange. Le ipotesi sono che la funzione sia continua nell'intervallo  $[-1, 2]$  (già verificato) e che sia derivabile nei punti interni, cioè nell'intervallo  $(-1, 2)$ .

Quindi dobbiamo studiare la derivabilità di  $f$ . Possiamo dire che il grafico suggerisce che  $x = 1$  sia un punto di non derivabilità. Proviamolo rigorosamente. Anzitutto possiamo dire che la funzione  $f$  è certamente derivabile negli intervalli  $(-1, 1)$  e  $(1, 2)$ , dato che coincide con funzioni elementari. Sfruttando appunto la derivabilità in questi intervalli possiamo poi scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo<sup>1</sup>

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2(x-1)) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Quindi  $f$  non è derivabile in  $x = 1$  (c'è un punto di cuspidè, dato che la derivata destra è infinita) e pertanto il teorema di Lagrange non è applicabile.

**ESERCIZIO 3.** Date le due funzioni

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

si scriva l'espressione delle due funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$ . Si stabilisca poi, in base alla definizione, se

$f(x)$  è trascurabile rispetto a  $g(x)$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .



Per quanto riguarda le funzioni composte si ha

$$f(g(x)) = e^{-g(x)} = e^{-1/x^2} = \frac{1}{e^{1/x^2}}$$

e

$$g(f(x)) = \frac{1}{(f(x))^2} = \frac{1}{(e^{-x})^2} = \frac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}.$$

Per la seconda domanda dobbiamo calcolare il limite per  $x \rightarrow +\infty$  del quoziente delle due funzioni.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0,$$

dato che il limite è un confronto standard tra una funzione potenza e la funzione esponenziale. Pertanto possiamo dire che  $f$  è trascurabile rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

<sup>1</sup>Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di  $f'$  non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 20/01/2014**

---

**Domanda 1.** Calcolare l'integrale  $\int_0^1 x \sqrt[4]{1+x^2} dx$



$$\int_0^1 x \sqrt[4]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(1+x^2)^{1/4} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{5/4}}{\frac{5}{4}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} (2^{5/4} - 1) = \frac{2}{5} (2^{5/4} - 1).$$

**Domanda 2.** Calcolare l'integrale  $\int x e^x dx$



L'integrale si calcola per parti, prendendo come parte finita  $x$  e parte differenziale  $e^x$ .

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c.$$

**Domanda 3.** Calcolare con la definizione  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b^2} - 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

**Domanda 4.** Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}}$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3 \cdot 3^n} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

**Domanda 5.** Dire se converge o diverge la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + n}$



Nel termine generale della serie a numeratore la radice è trascurabile rispetto ad  $n$ , per  $n \rightarrow +\infty$ ; a denominatore  $n$  è trascurabile rispetto a  $n^2$ . Quindi il termine generale  $\frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + n}$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , è equivalente a  $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ . Dato che quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica propriamente detta, che è una serie divergente, allora per il criterio del confronto diverge anche la serie data.

**Domanda 6.** Calcolare la matrice inversa di  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$



Anzitutto la matrice inversa di  $A$  esiste in quanto  $\det A = 2 \neq 0$ . La matrice dei complementi algebrici di  $A$  è  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e la matrice aggiunta è  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 7.** Calcolare il rango della matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

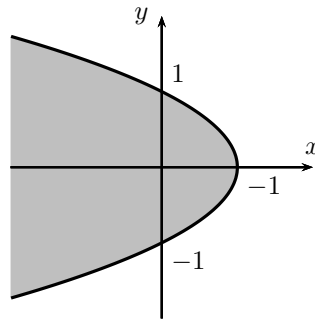


Il rango di  $A$  può essere al massimo 3. Dato che  $\det A = 0$  il rango non è 3. Osservando che il minore complementare dell'elemento di posto  $(3, 3)$ , cioè il determinante della sottomatrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , è  $-1$  possiamo affermare che il rango di  $A$  è 2.

**Domanda 8.** Disegnare il dominio della funzione  $f(x, y) = \sqrt{1 - x - y^2}$



La condizione di esistenza per la funzione  $f$  è  $1 - x - y^2 \geq 0$ , cioè  $x \leq 1 - y^2$ , che è verificata nella regione di piano che sta alla sinistra della parabola con asse orizzontale che interseca l'asse  $y$  in  $y = \pm 1$ . Il dominio è rappresentato in grigio è qui sotto.



**Domanda 9.** Calcolare il gradiente della funzione  $f(x, y) = y \ln(y + \sqrt{x})$



$$\nabla f(x, y) = \left( y \cdot \frac{1}{y + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ln(y + \sqrt{x}) + y \cdot \frac{1}{y + \sqrt{x}} \right).$$

**Domanda 10.** Scrivere la restrizione della funzione  $f(x, y) = \sqrt{y} \ln(xy)$  alla curva di equazione  $x + y - 1 = 0$



Per scrivere la restrizione lungo la retta possiamo evidentemente esplicitare indifferentemente la  $x$  o la  $y$ . Esplicitando la  $x$  si ottiene

$$f(x, y) \Big|_{x=1-y} = f(1-y, y) = \sqrt{y} \ln(y(1-y)).$$

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 22/01/2014**

---

**ESERCIZIO 1.** Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito  $\int f(x) dx$ . Si calcoli poi la media integrale di  $f$  nell'intervallo  $[1, e]$ . Si stabilisca infine se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^n)$  converge o diverge.



L'integrale indefinito è un integrale quasi immediato. Osservando che  $\frac{1}{x}$  è la derivata del logaritmo si ha

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

La media integrale di  $f$  nell'intervallo  $[1, e]$  è data da

$$\frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e-1} \cdot \left. \frac{\ln^3 x}{3} \right|_1^e = \frac{1}{3(e-1)}.$$

Veniamo alla serie. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(e^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2(e^n)}{e^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

Per studiare questa serie possiamo fare in vari modi. Uno è usare il criterio del rapporto.

Indicando con  $a_n = \frac{n^2}{e^n}$  il termine generale della serie, calcoliamo il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n(n+1)^2}{n^2 e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{e}.$$

Pertanto, essendo il limite minore di 1, per il criterio del rapporto la serie converge.

Alternativamente si poteva arrivare al risultato con un confronto con  $\frac{1}{n^2}$ . Dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{e^n} = 0 \text{ (confronto standard),}$$

significa che  $\frac{n^2}{e^n}$  è trascurabile, per  $n \rightarrow +\infty$ , rispetto a  $\frac{1}{n^2}$  e quindi la serie converge.

**ESERCIZIO 2.** Dati i vettori

$$v^1 = (0, -1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 2, -1) \quad , \quad v^3 = (-1, 1, 0)$$

si stabilisca se sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la definizione. Si trovi conferma del risultato attraverso il rango. Si dica se il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^3$  appartiene al sottospazio  $S$  generato dai tre vettori e si dica infine se è vero che qualunque vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene ad  $S$ .



Per stabilire se i vettori  $v^1, v^2, v^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la definizione formiamo anzitutto una combinazione lineare di  $v^1, v^2, v^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$av^1 + bv^2 + cv^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, -1, 1) + b(1, 2, -1) + c(-1, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, -a, a) + (b, 2b, -b) + (-c, c, 0) = (0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b - c, -a + 2b + c, a - b) = (0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ -a + 2a + a = 0, \end{cases}$$

che ha evidentemente come unica soluzione la soluzione  $a = b = c = 0$ . Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Abbiamo la conferma di questo osservando che, formata con i tre vettori in riga la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si ha che } \det A = 2 \text{ e quindi le righe sono l.i.}$$

Dato che i tre vettori sono linearmente indipendenti, il sottospazio  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  da essi generato è tutto  $\mathbb{R}^3$  e quindi il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^3$ , cioè  $u^1 = (1, 0, 0)$ , appartiene certamente ad  $S$ .

Analogamente possiamo affermare che è anche vero che qualunque vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene ad  $S$ .

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y) - \ln(1 - x^2 - y^2)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso, limitato o non limitato. Si calcoli il gradiente di  $f$  e si dica se l'origine è un punto stazionario. Determinare i punti del dominio in cui la funzione si annulla.



Le condizioni per l'esistenza della funzione  $f$  sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 1 - x^2 \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Il dominio di  $f$  è un insieme aperto in quanto tutti i suoi punti sono interni all'insieme. Si tratta anche di un insieme limitato. È infatti contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Il gradiente di  $f$  è

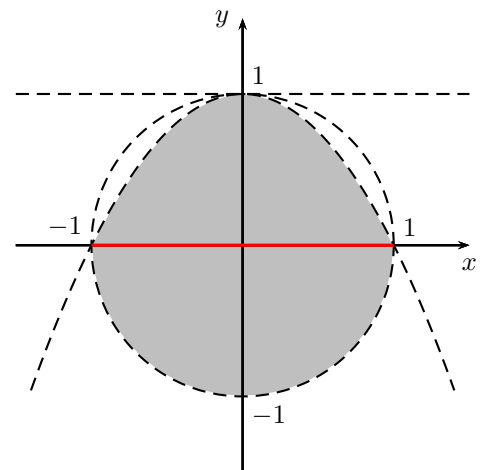
$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{-2x}{1 - x^2 - y} + \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{-1}{1 - x^2 - y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right).$$

L'origine non è un punto stazionario in quanto  $\nabla f(x, y) = (0, -1)$ .

La funzione  $f$  si annulla se e solo se

$$\ln(1 - x^2 - y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \Leftrightarrow 1 - x^2 - y = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow y = y^2 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0,$$

che equivale a  $y = 0$  oppure  $y = 1$ . La retta di equazione  $y = 1$  non contiene nessun punto del dominio. La retta di equazione  $y = 0$  fornisce i punti del dominio in cui la funzione si annulla, indicati in rosso nella figura qui sopra.



**ESAME DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 20/01/2014**

**Domanda 1.** Scomporre in fattori il polinomio  $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 1$



Si tratta di un polinomio di terzo grado e non è possibile raccogliere  $x$ . L'unica possibilità di scomporlo è con il teorema di Ruffini, cioè cercare una sua radice. È evidente che  $x = 1$  è una radice del polinomio  $P$ , che quindi è divisibile per  $x - 1$ . Troviamo il quoziente con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & & 6 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha  $P(x) = (x-1)(6x^2 + x + 1)$ . Cerchiamo gli zeri del polinomio di secondo grado<sup>2</sup> con la formula risolutiva:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{12}$  e quindi il polinomio di secondo grado non si può scomporre ulteriormente. La scomposizione richiesta è pertanto quella indicata sopra.

**Domanda 2.** Nell'espressione  $4^{x+1} + 2^{1+3x}$  raccogliere  $2^{2x}$



$$4^{x+1} + 2^{1+3x} = 2^{2(x+1)} + 2^{1+3x} = 2^{2x} \left( 2^{2x+2-2x} + 2^{1+3x-2x} \right) = 2^{2x} \left( 4 + 2^{1+x} \right).$$

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$3 - 9^{x^2} = 0$$



$$9^{x^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9^{x^2} = 9^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$x^4 + x^2 - 2 > 0$$



Si tratta di un'equazione intera di quarto grado riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile  $x^2 = t$  l'equazione diventa

$$t^2 + t - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t+2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < -2 \vee t > 1.$$

Le soluzioni vanno quindi cercate nelle  $x$  per cui

$$x^2 < -2 \vee x^2 > 1.$$

La prima disequazione non ha soluzioni. Le soluzioni della seconda sono  $x < -1$  oppure  $x > 1$ , cioè l'insieme  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , che sono le soluzioni della disequazione data.

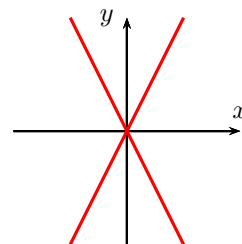
**Domanda 5.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $4x^2 - y^2 = 0$



Si tratta della differenza di due quadrati e quindi l'equazione equivale a

$$(2x - y)(2x + y) = 0, \text{ che equivale a } 2x - y = 0 \text{ oppure } 2x + y = 0.$$

Le due equazioni di primo grado definiscono le due rette per l'origine di equazione  $y = 2x$  oppure  $y = -2x$ . L'insieme è rappresentato in rosso qui a fianco.

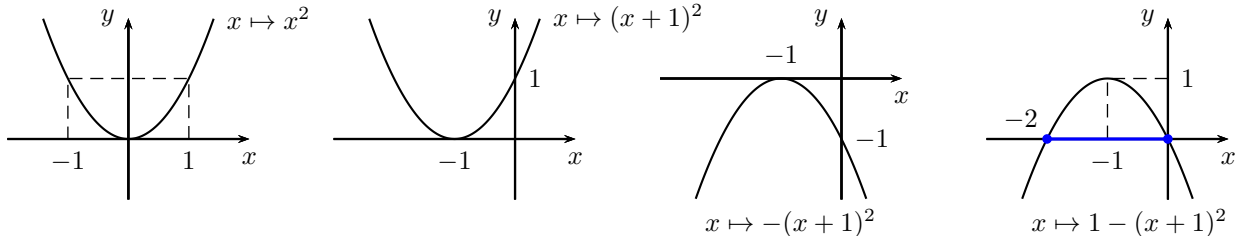


<sup>2</sup>Peraltro la scomposizione fin qui ottenuta risponde già correttamente e completamente alla domanda, essendo richiesta una scomposizione. Se la domanda fosse stata "Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili" allora il seguito sarebbe stato necessario.

**Domanda 6.** Aiutandosi con un grafico, determinare i punti di massimo e di minimo della funzione  $f(x) = 1 - (x+1)^2$  nell'intervallo  $[-2, 0]$



Il grafico di  $f$  si può ottenere con le trasformazioni elementari a partire dal grafico di  $x \mapsto x^2$ . Le trasformazioni sono riportate qui sotto. Dal grafico si vede che ci sono due punti di minimo,  $x = -2$  e  $x = 0$  (in cui la funzione vale 0) e un punto di massimo,  $x = -1$  (in cui la funzione vale 1).



**Domanda 7.** Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - e^{1/x})$



Con l'algebra dei limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - e^{1/x}) = \ln 0^+ - e^{1/0^+} = -\infty - e^{+\infty} = -\infty - \infty = -\infty$ .

**Domanda 8.** Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = x(1 + 3 \ln x)^2$



$$f'(x) = (1 + 3 \ln x)^2 + x \cdot 2(1 + 3 \ln x) \cdot \frac{3}{x}.$$

**Domanda 9.** Calcolare l'integrale  $\int_0^1 x \sqrt[3]{1+x^2} dx$



$$\int_0^1 x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(1+x^2)^{1/3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{4/3}}{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (2^{4/3} - 1) = \frac{3}{8} (2^{4/3} - 1).$$

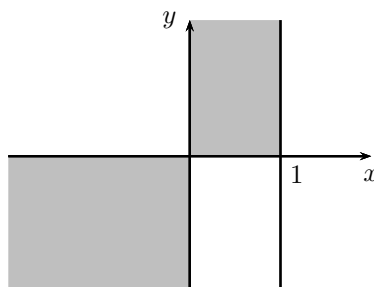
**Domanda 10.** Disegnare nel piano il dominio della funzione  $f(x, y) = \sqrt{xy} + \sqrt{1-x}$



Le condizioni di esistenza sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} xy \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Si tratta quindi della parte del primo quadrante alla destra della retta verticale  $x = 1$  oppure di tutto il terzo quadrante. La regione è rappresentata in grigio qui sotto.



**ESAME DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 22/01/2014**

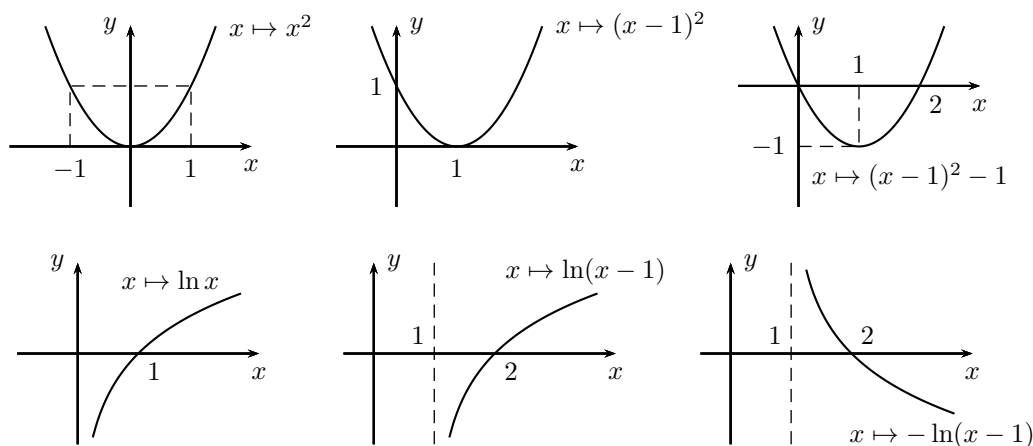
**ESERCIZIO 1.** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & x \leq 1 \\ -\ln(x-1) & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si determini l'immagine di  $f$ , cioè l'insieme dei valori che  $f$  assume e si dica se esistono punti di massimo/minimo locali o globali. Si dica poi se  $f$  è continua e derivabile in  $\mathbb{R}$ . Si calcoli infine la media integrale di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .



Attraverso le trasformazioni elementari possiamo ottenere i grafici delle due funzioni che definiscono la  $f$ .



Quindi il grafico di  $f$  è quello riportato a fianco.

L'immagine di  $f$  è tutto  $\mathbb{R}$ , osservando anche che la sola funzione logaritmica permette di ottenere tutti i valori di  $\mathbb{R}$ .

Sulla base del grafico possiamo affermare che non esistono punti di massimo, né locali né globali. Il punto  $x = 1$  è un punto di minimo locale (non globale). Infatti in un suo intorno opportunamente piccolo, ad esempio  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , risulta che  $f(x) \geq f(1) = -1$ .

Sempre sulla base del grafico possiamo dire che la funzione  $f$  è continua in ogni  $x \neq 1$ , ma non è continua in  $x = 1$ , dato che il limite da destra è  $+\infty$  e quindi abbiamo una discontinuità di seconda specie.

Analogamente  $f$  è derivabile in ogni  $x \neq 1$  (si tratta di funzioni elementari), ma non è derivabile in  $x = 1$ , non essendo continua.

La media integrale di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  è per definizione

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ((x-1)^2 - 1) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}(x-1)^3 - x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot 0 - 1 \right) - \left( -\frac{8}{3} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

**ESERCIZIO 2.** Dati i vettori

$$v^1 = (0, -1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 2, -1) \quad , \quad v^3 = (-1, 1, 0)$$

si stabilisca se sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la definizione. Si trovi conferma del risultato trovato attraverso il rango. Si dica se il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^3$  appartiene al sottospazio  $S$  generato dai tre vettori e si dica infine se è vero che qualunque vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene ad  $S$ .



Per stabilire se i vettori  $v^1, v^2, v^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti usando la definizione formiamo anzitutto una combinazione lineare di  $v^1, v^2, v^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$av^1 + bv^2 + cv^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, -1, 1) + b(1, 2, -1) + c(-1, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, -a, a) + (b, 2b, -b) + (-c, c, 0) = (0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b - c, -a + 2b + c, a - b) = (0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ -a + 2a + a = 0, \end{cases}$$

che ha evidentemente come unica soluzione la soluzione  $a = b = c = 0$ . Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Abbiamo la conferma di questo osservando che, formata con i tre vettori in riga la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ si ha che } \det A = 2 \text{ e quindi le righe sono l.i.}$$

Dato che i tre vettori sono linearmente indipendenti, il sottospazio  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  da essi generato è tutto  $\mathbb{R}^3$  e quindi il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^3$ , cioè  $u^1 = (1, 0, 0)$ , appartiene certamente ad  $S$ .

Analogamente possiamo affermare che è anche vero che qualunque vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene ad  $S$ .

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \ln(1 - x - y^2),$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio  $D$ . Si dica se  $D$  è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. Si indichino un punto interno ed un punto di frontiera di  $D$ . Si dica in quali punti di  $D$  la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di  $f$  e si dica se l'origine è un punto stazionario.



Le condizioni per l'esistenza della funzione  $f$  sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 - y^2. \end{cases}$$

Quindi il dominio di  $f$  è l'insieme  $D$  dei punti che stanno a destra dell'asse  $y$ , asse compreso, e a sinistra della parabola, parabola esclusa.

Il dominio  $D$  è un insieme né aperto né chiuso. La motivazione è che non è aperto in quanto non tutti i suoi punti sono interni (ad esempio l'origine non è un punto interno a  $D$ ) e non è chiuso in quanto non tutti i punti di frontiera appartengono a  $D$  (ad esempio il punto  $(1, 0)$  è di frontiera ma non appartiene a  $D$ ).

Un punto interno a  $D$  è ad esempio  $(\frac{1}{2}, 0)$ ; un punto di frontiera è il già citato  $(1, 0)$ .

La funzione  $f$  si annulla se e solo se

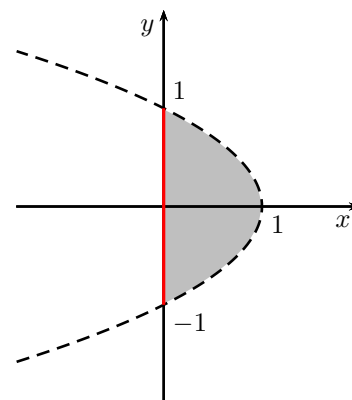
$$\sqrt{x} = 0 \quad \vee \quad \ln(1 - x - y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad 1 - x - y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -y^2,$$

e cioè sui punti dell'asse  $y$  che stanno nel dominio (l'unico punto della parabola nel dominio è l'origine). I punti sono indicati in rosso nella figura qui sopra.

Il gradiente di  $f$  è

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(1 - x - y^2) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 - x - y^2}, \sqrt{x} \cdot \frac{-2y}{1 - x - y^2} \right).$$

L'origine non è un punto stazionario in quanto la derivata parziale rispetto ad  $x$  in  $(0, 0)$  non esiste.



**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 07/02/2014**

---

**Domanda 1.** Calcolare l'integrale  $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}} dx$



$$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^{-1/3} dx = \frac{(\ln x)^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 x} + c.$$

**Domanda 2.** Calcolare l'integrale  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$



$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} (2^{2/3} - 1).$$

**Domanda 3.** Calcolare con la definizione  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4\sqrt{x}} dx$



Per definizione l'integrale è il

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-5/4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1/4}}{-\frac{1}{4}} \Big|_1^b = -4 \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{-1/4} - 1) = -4 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b^{1/4}} - 1 \right) = 4.$$

**Domanda 4.** Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\frac{1}{3} \cdot 3^n} = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 6 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9.$$

**Domanda 5.** Calcolare il prodotto interno (scalare) dei vettori  $(-1, 2, 1)$  e  $(1, -1, 4)$



$$\langle (-1, 2, 1), (1, -1, 4) \rangle = -1 - 2 + 4 = 1.$$

**Domanda 6.** Calcolare il prodotto  $AB$  delle matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Domanda 7.** Calcolare la matrice inversa di  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



Anzitutto la matrice inversa di  $A$  esiste in quanto  $\det A = -2 \neq 0$ . La matrice dei complementi algebrici di  $A$  è  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e la matrice aggiunta è  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

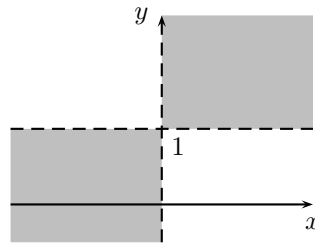
**Domanda 8.** Disegnare il dominio della funzione  $f(x, y) = x^2 \ln(x(y-1))$



La condizione di esistenza è  $x(y-1) > 0$ , che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 1 \end{cases}.$$

Il dominio è quindi la regione raffigurata in grigio qui sotto.



**Domanda 9.** Calcolare il gradiente della funzione  $f(x, y) = (y + y^2)\sqrt{x + y^2}$



$$\nabla f(x, y) = \left( (y + y^2) \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}}, (1 + 2y)\sqrt{x + y^2} + (y + y^2) \frac{y}{\sqrt{x + y^2}} \right).$$

**Domanda 10.** Determinare il segno della forma quadratica  $q(x, y) = -x^2 + xy - 2y^2$



La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è definita negativa in quanto il primo minore principale di Nord-Ovest è negativo ( $-1$ ) e il determinante è positivo ( $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ).

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 10/02/2014**

---

**ESERCIZIO 1.** Si calcolino gli integrali

$$\int x \ln(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-1}^1 x \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

Si stabilisca infine se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\ln n}{n^4}$  converge o diverge.



Il primo integrale si calcola per parti, prendendo come parte finita  $\ln(2x)$  e parte differenziale  $x$ .

$$\int x \ln(2x) dx = \ln(2x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ln(2x) - \frac{x^2}{4} + c.$$

Per il secondo integrale si potrebbe osservare che, essendo la funzione dispari (prodotto di una dispari ( $x$ ) e una pari (la radice)) e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, l'integrale è nullo. Ma calcoliamolo con il metodo generale. Si tratta di un integrale quasi immediato.

$$\int_{-1}^1 x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x(1+x^2)^{1/3} dx = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{(1+x^2)^{4/3}}{\frac{4}{3}} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} (1+x^2)^{4/3} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

**ESERCIZIO 2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Si stabilisca anche se le sue colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si risolva infine il sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$  ( $x$  è il vettore delle incognite e  $0$  è il vettore nullo), scrivendo opportunamente l'insieme delle sue soluzioni.



Per stabilire se le righe  $r^1, r^2, r^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati.

Il rango di  $A$  è 3, in quanto la sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne ha determinante uguale a  $-1$ . Quindi le righe sono linearmente indipendenti.

Vediamo di trovare il risultato anche con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di  $r^1, r^2, r^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(1, -1, 0, 0) + c(1, 0, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, -a, 0) + (b, -b, 0, 0) + (c, 0, -c, c) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b+c, a-b, -a-c, c) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-b=0 \\ -a-c=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a=b=c=0.$$

Pertanto questo conferma che le righe sono linearmente indipendenti.

Le colonne sono certamente linearmente dipendenti, dato che si tratta di 4 vettori in  $\mathbb{R}^3$ .<sup>3</sup>

Passiamo al sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$ . Esso è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z + t = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il sistema può essere risolto molto velocemente} \\ \text{per sostituzione, esprimendo ad esempio tutto} \\ \text{in funzione di } x. \text{ Il sistema equivale a} \end{array} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ y = x \\ -z + t = -x \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z = x \\ y = x \\ t = 0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come i vettori del tipo  $(x, x, x, 0)$ , con  $x \in \mathbb{R}$ .

Possiamo esprimere lo spazio delle soluzioni come

$$S = \{(x, x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 1, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = x \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right),$$

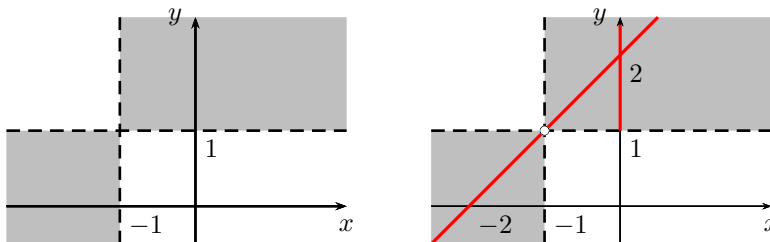
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio  $D$ . Si dica in quali punti di  $D$  la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di  $f$  e si provi che il punto  $(0, 2)$  è stazionario.



La condizione di l'esistenza di funzione  $f$  è  $\frac{x+1}{y-1} > 0$ , che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ y > 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ y < 1. \end{cases}$$

Il dominio  $D$  di  $f$  è raffigurato in grigio qui sotto a sinistra.



I punti in cui la funzione si annulla sono quelli per cui

$$x \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) = 0 \quad \text{che equivale a} \quad x = 0 \quad \vee \quad \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) = 0 \quad \text{cioè} \quad x = 0 \quad \vee \quad \frac{x+1}{y-1} = 1$$

a sua volta equivalente a

$$x = 0 \quad \vee \quad x+1 = y-1 \quad \text{ossia} \quad x = 0 \quad \vee \quad y = x+2.$$

Si tratta dei punti del dominio che stanno su due rette, l'asse  $y$  oppure la retta di pendenza 1 che passa per il punto  $(-1, 1)$ . I punti in cui  $f = 0$  sono rappresentati in rosso nella figura sopra a destra.

Il gradiente di  $f$  è

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) + x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{y-1}} \cdot \frac{1}{y-1}, x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{y-1}} \cdot (-1) \frac{x+1}{(y-1)^2} \right) \\ &= \left( \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) + \frac{x}{x+1}, -\frac{x}{y-1} \right). \end{aligned}$$

Per provare che il punto  $(0, 2)$  è stazionario dobbiamo verificare che in tale punto il gradiente si annulla. Risulta infatti

$$\nabla f(0, 2) = (0, 0).$$

<sup>3</sup>Ricordo che un insieme formato da più vettori di quella che è la dimensione dello spazio al quale essi appartengono è sicuramente un insieme di vettori dipendenti, dato che la dimensione è appunto il massimo numero di vettori indipendenti che si possono trovare in quello spazio.

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 07/02/2014**

---

**Domanda 1.** Dire se il polinomio  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$  è divisibile per  $x - 3$



Possiamo utilizzare il teorema di Ruffini. Il polinomio  $P$  è divisibile per  $x - 3$  se e solo se  $P(3) = 0$ . Risulta

$$P(3) = 27 - 27 - 6 + 6 = 0 \text{ e quindi la risposta è sì.}$$

**Domanda 2.** Nell'espressione  $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^x$  raccogliere  $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$  e semplificare



$$\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} \left( 1 - \frac{\sqrt{x}e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} (1 - 2xe^{2x}).$$

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$(\ln(2x))^2 = 1$$



C'è anzitutto la condizione di esistenza  $x > 0$ . Poi l'equazione equivale a

$$\ln(2x) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = e^{\pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}e^{\pm 1}$$

che sta per  $x = \frac{1}{2e}$  oppure  $x = \frac{e}{2}$ , entrambe accettabili.

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$e^{2x} - e^x < 2$$



Si tratta di una disequazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile  $e^x = t$  la disequazione diventa

$$t^2 - t - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < t < 2.$$

Pertanto, tornando alla variabile  $x$ , le soluzioni sono per

$$-1 < e^x < 2, \text{ che equivale a } \begin{cases} e^x > -1 \\ e^x < 2. \end{cases}$$

La prima è sempre vera e la seconda è vera per  $x < \ln 2$  e quindi fornisce l'insieme di soluzioni  $(-\infty, \ln 2)$ .

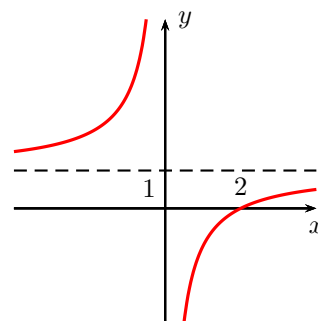
**Domanda 5.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione  $xy - x + 2 = 0$



L'equazione equivale a

$$x(y-1) = -2,$$

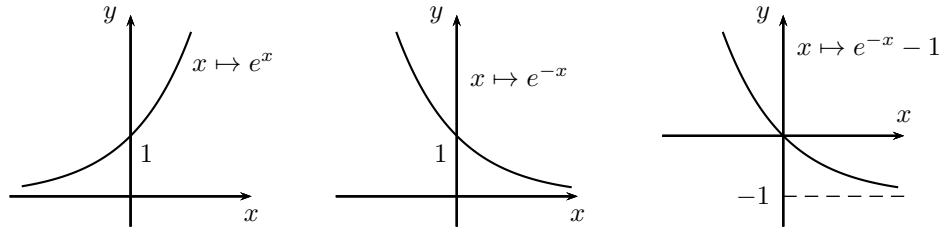
che definisce l'iperbole di centro il punto  $(0, 1)$ , asintoti paralleli agli assi cartesiani e rami che stanno nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante rispetto al centro. L'iperbole è raffigurata in rosso qui a fianco.



**Domanda 6.** Aiutandosi con un grafico, determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione  $f(x) = e^{-x} - 1$  in  $\mathbb{R}$



Le trasformazioni che portano al grafico sono queste:



Dal grafico ricaviamo che l'estremo superiore di  $f$  è  $+\infty$  (oppure non esiste in quanto la  $f$  non è superiormente limitata) e l'estremo inferiore è  $-1$ , cioè il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $+\infty$ .

**Domanda 7.** Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$



$$f'(x) = -\frac{1}{(x \ln^3 x)^2} \left( \ln^3 x + x \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\frac{\ln x + 3}{(x \ln^2 x)^2}.$$

**Domanda 8.** Calcolare una primitiva della funzione  $f(x) = \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln x}}$



Calcoliamo l'integrale indefinito. Si tratta di un'integrazione quasi immediata.

$$\int \frac{1}{x \sqrt[3]{\ln x}} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^{-1/3} dx = \frac{(\ln x)^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c.$$

Quindi una primitiva è ad esempio  $g(x) = \frac{3}{2}(\ln x)^{2/3}$ .

**Domanda 9.** Calcolare il determinante della matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



Sviluppando il calcolo rispetto alla terza riga il determinante vale

$$1 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 = -6.$$

**Domanda 10.** Determinare il segno della forma quadratica  $q(x, y) = -x^2 + xy - 2y^2$



La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è definita negativa in quanto il primo minore principale di Nord-Ovest è negativo ( $-1$ ) e il determinante è positivo ( $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ).

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 10/02/2014**

---

**ESERCIZIO 1.** Data la funzione

$$f(x) = 2x^2 - 4x + \ln x,$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di  $f$ , si trovino i punti stazionari e si studi la natura di questi punti (cioè se sono eventualmente punti di massimo/minimo). Si calcoli la derivata seconda e si studi la concavità/convessità di  $f$ . Con le informazioni ottenute si disegni poi un possibile grafico di  $f$ . Si dica

infine se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$  converge o diverge.



La condizione di esistenza per la funzione  $f$  è che  $x$  sia positivo. Il dominio è quindi l'intervallo  $(0, +\infty)$ . Pertanto i limiti significativi da calcolare sono:  $0^+$  e  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 0 + \ln(0^+) = 0 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty + \infty, \text{ che è una forma indeterminata.}$$

Ricordando che  $x$  e  $\ln x$  sono entrambe trascurabili rispetto a  $x^2$ , per  $x \rightarrow +\infty$ , il limite risulta uguale a  $+\infty$ .

La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}.$$

Troviamo i punti stazionari.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Unico punto stazionario è pertanto  $x = \frac{1}{2}$ . Per studiare la natura del punto stazionario studiamo il segno della derivata. Si ha (nello studio si ricordi che possiamo dire che  $x > 0$ )

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0, \text{ vera per ogni } x \neq \frac{1}{2}.$$

Pertanto la funzione  $f$  risulta crescente in tutto il dominio, con un punto stazionario in  $x = \frac{1}{2}$ .

La derivata seconda di  $f$  è

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2}.$$

La derivata seconda si annulla in  $x = \pm \frac{1}{2}$ , ma il valore negativo non è accettabile. Inoltre, nel dominio, la derivata seconda è positiva per  $x > \frac{1}{2}$  e negativa per  $0 < x < \frac{1}{2}$ . Quindi la funzione  $f$  è concava nell'intervallo  $(0, \frac{1}{2})$  e convessa nell'intervallo  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  e ha in  $x = \frac{1}{2}$  un punto di flesso orizzontale (si ricordi che il punto è stazionario).

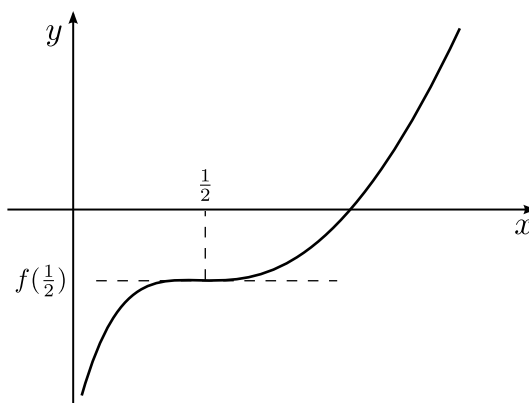
Un possibile grafico è riportato nella pagina seguente. Per un grafico più preciso si tenga conto che il valore della funzione nel punto stazionario è negativo. Infatti

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 + \ln \frac{1}{2} < 0.$$

Concludiamo con la serie. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 - 4n + \ln n}.$$

Dato che, come già detto nei limiti,  $n$  e  $\ln n$  sono trascurabili rispetto a  $n^2$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , il termine generale della serie è equivalente a  $\frac{1}{2n^2}$ , per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi la nostra serie ha lo stesso carattere di  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , che è una serie armonica generalizzata con  $\alpha = 2$ . Dato che questa converge, allora converge anche la serie data.



**ESERCIZIO 2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Si stabilisca anche se le sue colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si risolva infine il sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$  ( $x$  è il vettore delle incognite e  $0$  è il vettore nullo), scrivendo opportunamente l'insieme delle sue soluzioni.



Per stabilire se le righe  $r^1, r^2, r^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati.

Il rango di  $A$  è 3, in quanto la sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne ha determinante uguale a  $-1$ . Quindi le righe sono linearmente indipendenti.

Vediamo di trovare il risultato anche con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di  $r^1, r^2, r^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(1, -1, 0, 0) + c(1, 0, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, -a, 0) + (b, -b, 0, 0) + (c, 0, -c, c) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b + c, a - b, -a - c, c) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a - b = 0 \\ -a - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto questo conferma che le righe sono linearmente indipendenti.

Le colonne sono certamente linearmente dipendenti, dato che si tratta di 4 vettori in  $\mathbb{R}^3$ .<sup>4</sup>

Passiamo al sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$ . Esso è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z + t = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il sistema può essere risolto molto velocemente} \\ \text{per sostituzione, esprimendo ad esempio tutto} \\ \text{in funzione di } x. \text{ Il sistema equivale a} \end{array} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ y = x \\ -z + t = -x \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z = x \\ y = x \\ t = 0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come i vettori del tipo  $(x, x, x, 0)$ , con  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>4</sup>Ricordo che un insieme formato da più vettori di quella che è la dimensione dello spazio al quale essi appartengono è sicuramente un insieme di vettori dipendenti, dato che la dimensione è appunto il massimo numero di vettori indipendenti che si possono trovare in quello spazio.

Possiamo esprimere lo spazio delle soluzioni come

$$S = \left\{ (x, x, x, 0) : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x(1, 1, 1, 0) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = x \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right),$$

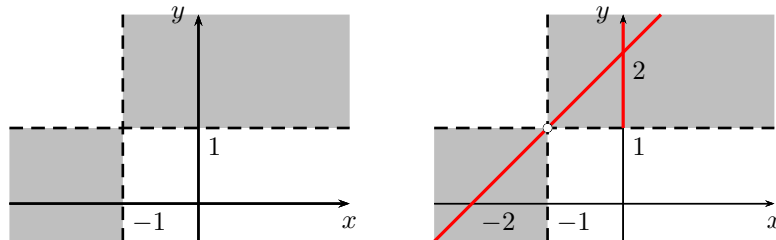
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio  $D$ . Si dica in quali punti di  $D$  la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di  $f$  e si provi che il punto  $(0, 2)$  è stazionario.



La condizione di l'esistenza di funzione  $f$  è  $\frac{x+1}{y-1} > 0$ , che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ y-1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ y > 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ y < 1 \end{cases}.$$

Il dominio  $D$  di  $f$  è raffigurato in grigio qui sotto a sinistra.



I punti in cui la funzione si annulla sono quelli per cui

$$x \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) = 0 \quad \text{che equivale a} \quad x = 0 \quad \vee \quad \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) = 0 \quad \text{cioè} \quad x = 0 \quad \vee \quad \frac{x+1}{y-1} = 1$$

a sua volta equivalente a

$$x = 0 \quad \vee \quad x+1 = y-1 \quad \text{ossia} \quad x = 0 \quad \vee \quad y = x+2.$$

Si tratta dei punti del dominio che stanno su due rette, l'asse  $y$  oppure la retta di pendenza 1 che passa per il punto  $(-1, 1)$ . I punti in cui  $f = 0$  sono rappresentati in rosso nella figura sopra a destra.

Il gradiente di  $f$  è

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) + x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{y-1}} \cdot \frac{1}{y-1}, x \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{y-1}} \cdot (-1) \frac{x+1}{(y-1)^2} \right) \\ &= \left( \ln \left( \frac{x+1}{y-1} \right) + \frac{x}{x+1}, -\frac{x}{y-1} \right). \end{aligned}$$

Per provare che il punto  $(0, 2)$  è stazionario dobbiamo verificare che in tale punto il gradiente si annulla. Risulta infatti

$$\nabla f(0, 2) = (0, 0).$$

**ESAME DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 06/06/2014**

**Domanda 1.** Scomporre in fattori il polinomio  $P(x) = 5x^4 + x - 6$



Si tratta di un polinomio di quarto grado e non è possibile raccogliere  $x$ . L'unica possibilità di scomporlo è con il teorema di Ruffini, cioè cercare una sua radice. È evidente che  $x = 1$  è una radice del polinomio  $P$ , che quindi è divisibile per  $x - 1$ . Troviamo il quoziente con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & & 5 & 5 & 5 & 6 \\ \hline & 5 & 5 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha  $P(x) = (x - 1)(5x^3 + 5x^2 + 5x - 6)$ .

**Domanda 2.** Nell'espressione  $3^{1/x} + 3^{2x}$  raccogliere  $3^x$  e se possibile semplificare



$$3^{1/x} + 3^{2x} = 3^x \left( \frac{3^{1/x}}{3^x} + \frac{3^{2x}}{3^x} \right) = 3^x \left( 3^{1/x-x} + 3^{2x-x} \right) = 3^x \left( 3^{1/x-x} + 3^x \right).$$

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$\left( \ln(x+1) \right)^2 = 4$$



C'è anzitutto la condizione di esistenza  $x+1 > 0$ , cioè  $x > -1$ . Poi l'equazione equivale a

$$\ln(x+1) = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = e^{\pm 2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\pm 2} - 1$$

che sta per  $x = \frac{1}{e^2} - 1$  oppure  $x = e^2 - 1$ , entrambe accettabili.

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$e^{2x+1} - 2e > 0$$



La disequazione equivale a

$$e^{2x+1} > 2e \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 > \ln(2e) \quad \Leftrightarrow \quad 2x > \ln(2e) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}(\ln(2e) - 1).$$

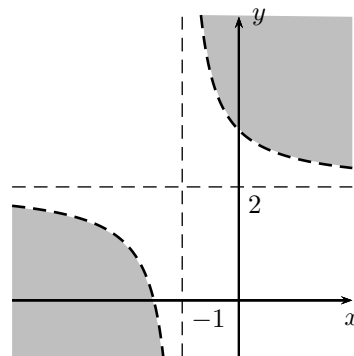
La quantità a destra si può trasformare in  $\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln e - 1) = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$ .

**Domanda 5.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione  $(x+1)(y-2) > 1$



L'equazione  $(x+1)(y-2) = 1$  individua un'iperbole di centro  $(-1, 2)$ , asintoti paralleli agli assi cartesiani e i cui rami stanno nei corrispondenti del primo e terzo quadrante rispetto al centro. Dato poi che il centro  $(-1, 2)$  non soddisfa la disequazione, questa individua i punti che stanno nelle due regioni definite dall'iperbole che non contengono il centro. I punti di frontiera sono esclusi.

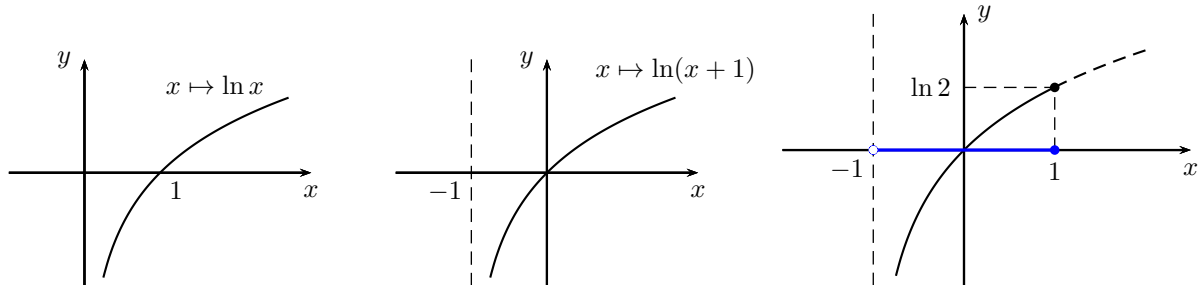
La regione è in grigio qui a fianco.



**Domanda 6.** Aiutandosi con un grafico, determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo della funzione  $f(x) = \ln(x+1)$  nell'intervallo  $(-1, 1]$



Il grafico si può ottenere a partire dal grafico di  $x \mapsto \ln x$  con una trasformazione elementare.



Dal grafico si vede che la funzione è crescente nell'intervallo  $(-1, 1]$ , che non ci sono punti di minimo (la funzione è inferiormente illimitata) e che il punto di massimo è nel secondo estremo dell'intervallo, cioè è  $x = 1$  (in cui la funzione vale  $\ln 2$ ).

**Domanda 7.** Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \ln x \right)$



Con l'algebra dei limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \ln x \right) = \frac{1}{(0^+)^3} - \ln 0^+ = \frac{1}{0^+} - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$ .

**Domanda 8.** Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \frac{1}{xe^{2x}}$



$$f'(x) = -\frac{1}{(xe^{2x})^2} (e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2) = -\frac{1+2x}{(xe^x)^2}.$$

**Domanda 9.** Calcolare l'integrale  $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$



Osservando che  $e^x$  è la derivata di  $1+e^x$ , si tratta di un integrale quasi immediato.

$$\int e^x \sqrt{1+e^x} dx = \int e^x (1+e^x)^{1/2} dx = \frac{(1+e^x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (1+e^x)^{3/2} + c.$$

**Domanda 10.** Calcolare la derivata parziale rispetto ad  $x$  della funzione  $f(x, y) = \frac{1 + \ln x}{1 + \ln y}$



Solo il numeratore è funzione di  $x$ , ossia il denominatore è costante rispetto ad  $x$ . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \ln y} \cdot \frac{1}{x}.$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 10/06/2014**

---

**ESERCIZIO 1.** Data la funzione  $f(x) = x + \ln(x^2)$ , se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di  $f$ , si trovino i punti stazionari e si studi la natura di questi punti (cioè se sono eventualmente punti di massimo/minimo). Con le informazioni ottenute si disegni poi un possibile grafico di  $f$ . Si dica infine se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$  converge o diverge.



La condizione di esistenza per la funzione  $f$  è

$$x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Il dominio è quindi tutto  $\mathbb{R}$  ad eccezione dell'origine, cioè l'insieme  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Si noti che il dominio è simmetrico rispetto all'origine ma la funzione non è né pari né dispari. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono:  $-\infty$ ,  $0^-$ ,  $0^+$  e  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty + \infty = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 + \ln(0^+) = 0 - \infty = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 + \ln(0^+) = 0 - \infty = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty + \infty, \text{ che è una forma indeterminata.} \end{aligned}$$

Propongo due modi di risolvere il limite. Si può scrivere  $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$  e il valore assoluto è necessario in quanto  $x$  è negativo se tende a  $-\infty$ . Quindi il limite è

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 \ln|x|) = -\infty,$$

ricordando che la funzione logaritmica all'infinito è trascurabile rispetto alla potenza.<sup>5</sup>

Alternativamente, raccogliendo  $x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{\ln(x^2)}{x} \right).$$

Ora con il teorema di De l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

e quindi il limite risulta uguale a  $-\infty$ .

La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2} = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}.$$

Troviamo i punti stazionari.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Unico punto stazionario è pertanto  $x = -2$ . Per studiare la natura del punto stazionario studiamo il segno della derivata. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \quad \vee \quad x > 0.$$

---

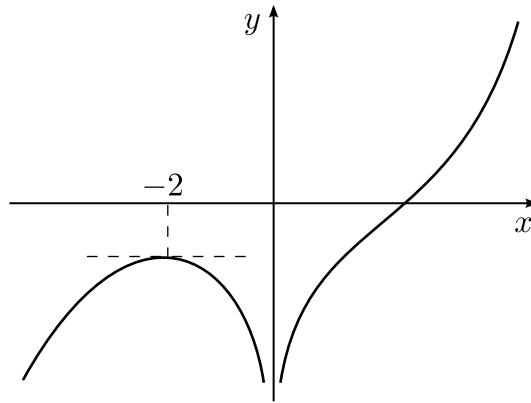
<sup>5</sup>

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = (\text{c.v. } -x = y) \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{-y} = 0$  (per confronto standard).

Quindi  $f$  è crescente in  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$  e decrescente in  $(-2, 0)$ . La funzione ha quindi in  $x = -2$  un punto di massimo, che risulta locale ma non globale.

Un possibile grafico è riportato qui sotto. Per un grafico più preciso si tenga conto che il valore della funzione nel punto stazionario è negativo. Infatti

$$f(-2) = -2 + \ln 4 < 0.$$



Concludiamo con la serie. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + \ln(n^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + 2 \ln n}.$$

Dato che, come già ricordato nei limiti,  $\ln n$  è trascurabile rispetto a  $n$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , il termine generale della serie è equivalente a  $\frac{1}{n}$ , per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi la nostra serie ha lo stesso carattere di  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ , che è una serie armonica. Dato che questa diverge, allora diverge anche la serie data.

**ESERCIZIO 2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Si stabilisca poi se le colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica se il vettore  $(2, 0, -1)$  appartiene al sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dalle colonne di  $A$ . Si dica infine se il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^4$ , cioè il vettore  $u^1 = (1, 0, 0, 0)$ , appartiene al sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle righe di  $A$ .



Per stabilire se le righe  $r^1, r^2, r^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati.

Il rango di  $A$  è 3, in quanto la sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne ha determinante uguale a  $-1$ . Quindi le righe sono linearmente indipendenti.

Vediamo di trovare il risultato anche con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di  $r^1, r^2, r^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, 1, 0) + b(-1, 1, 0, 0) + c(1, -2, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, a, 0) + (-b, b, 0, 0) + (c, -2c, -c, c) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (-b + c, a + b - 2c, a - c, c) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} -b + c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \\ a - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto questo conferma che le righe sono linearmente indipendenti.

Le colonne sono certamente linearmente dipendenti, dato che il rango della matrice è 3 e il rango è il massimo numero di colonne (e righe) indipendenti.

Dobbiamo dire se il vettore  $(2, 0, -1)$  appartiene al sottospazio  $S_c$  di  $\mathbb{R}^3$  generato dalle colonne di  $A$ . Dato che il rango di  $A$  è 3, questa è la dimensione del sottospazio  $S_c$ , che quindi coincide con tutto  $\mathbb{R}^3$ . Pertanto ogni vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene a tale sottospazio, in particolare il vettore  $(2, 0, -1)$ .

Dobbiamo dire infine se il primo vettore fondamentale di  $\mathbb{R}^4$ , cioè il vettore  $u^1 = (1, 0, 0, 0)$ , appartiene al sottospazio  $S_r$  di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle righe di  $A$ . A differenza del punto precedente, qui non è detto che  $u^1$  appartenga a  $S_r$ , dato che anche la dimensione di  $S_r$  è 3 e quindi  $S_r$  non è tutto  $\mathbb{R}^4$ .

Possiamo seguire due strade, e le propongo entrambe.

Dire che  $u^1$  appartiene ad  $S_r$  significa che  $u^1$  si può scrivere come combinazione lineare delle righe di  $A$ . Scriviamo quindi

$$u^1 = ar^1 + br^2 + cr^3 \Leftrightarrow (1, 0, 0, 0) = a(0, 1, 1, 0) + b(-1, 1, 0, 0) + c(1, -2, -1, 1)$$

cioè

$$(1, 0, 0, 0) = (-b + c, a + b - 2c, a - c, c) \Leftrightarrow \begin{cases} -b + c = 1 \\ a + b - 2c = 0 \\ a - c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Il sistema è impossibile. Quindi  $u^1$  non appartiene al sottospazio  $S_r$ .

Si poteva alternativamente usare la matrice  $A$  accostando come quarta riga il vettore  $u^1$ . Si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante vale } 1.$$

Questo ci dice che le quattro righe di  $A'$  sono indipendenti e quindi in particolare  $u^1$  non dipende dalle righe di  $A$ , cioè non si può scrivere come loro combinazione lineare.

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = xy + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{y}\right),$$

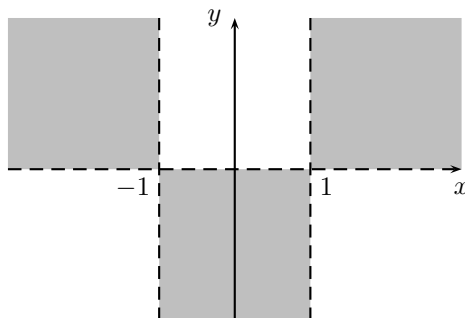
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di  $f$ . Si determini infine l'unico punto stazionario della funzione.



La condizione di esistenza della funzione  $f$  è  $\frac{x^2-1}{y} > 0$ , che equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ y < 0 \end{cases}$$

Il dominio di  $f$  è raffigurato in grigio qui sotto.



Si tratta di un insieme aperto, dato che i punti di frontiera non appartengono all'insieme e quindi tutti i punti sono interni.

Il gradiente di  $f$  è

$$\nabla f(x, y) = \left( y + \frac{1}{\frac{x^2-1}{y}} \cdot \frac{2x}{y}, x + \frac{1}{\frac{x^2-1}{y}} \cdot (x^2-1) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \right) = \left( y + \frac{2x}{x^2-1}, x - \frac{1}{y} \right).$$

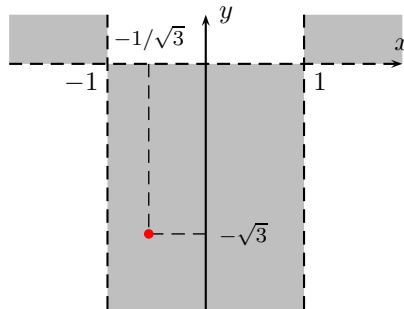
Per trovare il punto stazionario dobbiamo annullare il gradiente.

$$\begin{cases} y + \frac{2x}{x^2-1} = 0 \\ x - \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ y + \frac{2x}{x^2-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} = 0. \end{cases}$$

Consideriamo a parte la seconda equazione, che equivale a

$$\frac{x^2-1+2x^2}{x(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sostituendo questi valori nella prima equazione del sistema si trovano le due soluzioni  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$ . Solo la seconda sta nel dominio, quindi l'unico punto stazionario è  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}\right)$ , raffigurato in rosso nella figura qui sotto.



**ESAME DI MATEMATICA – I parte**  
**Vicenza, 01/09/2014**

**Domanda 1.** Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio  $P(x) = x^4 - 16$



Si tratta della differenza di due quadrati.

$$P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).^6$$

**Domanda 2.** Nell'espressione  $2^{x^2} - 2^{3x}$  raccogliere  $2^x$  e se possibile semplificare



$$2^{x^2} - 2^{3x} = 2^x \left( \frac{2^{x^2}}{2^x} - \frac{2^{3x}}{2^x} \right) = 2^x \left( 2^{x^2-x} - 2^{3x-x} \right) = 2^x \left( 2^{x(x-1)} - 2^{2x} \right).$$

**Domanda 3.** Risolvere l'equazione

$$\log_2(3 - x) + 2 = 0$$



L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ \log_2(3 - x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \log_2(3 - x) = \log_2 2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 3 - x = 2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 3 - \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Quindi la soluzione è  $x = \frac{11}{4}$ .

**Domanda 4.** Risolvere la disequazione

$$e^{2/x} - e < 0$$



C'è la condizione di esistenza  $x \neq 0$ . Poi la disequazione equivale a

$$e^{2/x} < e \Leftrightarrow \frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x} < 0.$$

Questa equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 - x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni sono per  $x < 0$  oppure  $x > 2$ , cioè l'insieme  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

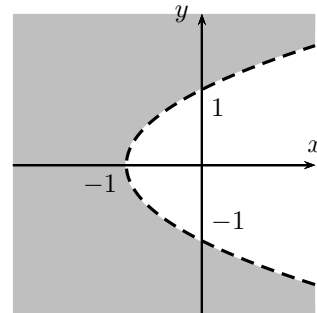
**Domanda 5.** Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione  $y^2 - x - 1 > 0$



La disequazione equivale a

$$x < y^2 - 1,$$

che individua la regione di piano che sta alla sinistra della parabola con asse coincidente con l'asse  $x$  che interseca l'asse  $y$  per  $y = \pm 1$ . La regione è rappresentata qui a fianco in grigio. I punti di frontiera, cioè i punti che stanno sulla parabola, non sono compresi.

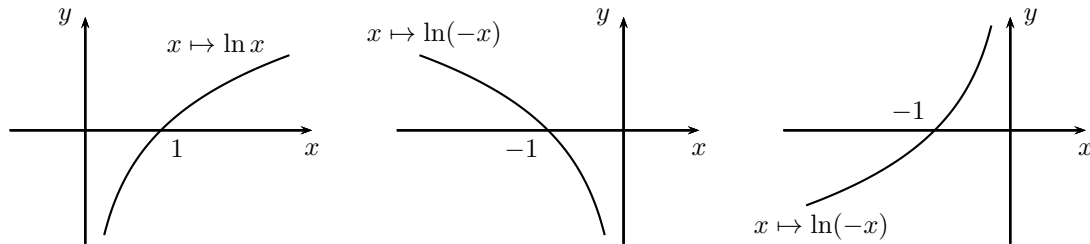


<sup>6</sup>Faccio osservare che la prima scomposizione non sarebbe sufficiente, dato che il primo fattore è ulteriormente scomponibile.

**Domanda 6.** Usando le trasformazioni elementari disegnare il grafico della funzione  $f(x) = -\ln(-x)$



Il grafico si può ottenere a partire dal grafico di  $x \mapsto \ln x$  con le trasformazioni elementari indicate qui sotto.



**Domanda 7.** Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + e^{1/x})$



Con l'algebra dei limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + e^{1/x}) = (0^-)^2 + e^{1/0^-} = 0^+ + e^{-\infty} = 0^+ + 0^+ = 0^+$ .

**Domanda 8.** Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = x^2 \ln(x + e^x)$



$$f'(x) = 2x \ln(x + e^x) + x^2 \cdot \frac{1}{x + e^x} (1 + e^x).$$

**Domanda 9.** Calcolare l'integrale  $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$



Osservando che  $\frac{1}{x}$  è la derivata di  $1 + \ln x$ , si tratta di un integrale quasi immediato.

$$\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int \frac{1}{x} (1 + \ln x)^{1/2} dx = \frac{(1 + \ln x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{3/2} + c.$$

**Domanda 10.** Calcolare la derivata parziale rispetto ad  $x$  della funzione  $f(x, y) = x e^{y/x}$



Dobbiamo usare la derivata del prodotto in quanto entrambe sono funzione di  $x$ . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y/x} + x e^{y/x} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = e^{y/x} \left( 1 - \frac{y}{x} \right).$$

**ESAME DI MATEMATICA – II parte**  
**Vicenza, 03/09/2014**

**ESERCIZIO 1.** Data la funzione  $f(x) = x - e^{1/x}$ , se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di  $f$  e si studi il segno di questa. Con le informazioni ottenute si disegni un possibile grafico di  $f$ . Qual è la pendenza della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $x_0 = 1$ ?

Si calcoli infine l'integrale  $\int_1^2 \frac{f(x) - x}{x^2} dx$ .



La condizione di esistenza per la funzione  $f$  è  $x \neq 0$ . Il dominio è quindi tutto  $\mathbb{R}$  ad eccezione dell'origine, cioè l'insieme  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Si noti che il dominio è simmetrico rispetto all'origine ma la funzione non è né pari né dispari. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono:  $-\infty$ ,  $0^-$ ,  $0^+$  e  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - e^{1/(+\infty)} = +\infty - e^0 = +\infty - 1 = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - e^{1/(-\infty)} = -\infty - e^0 = -\infty - 1 = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - e^{1/0^+} = 0 - e^{+\infty} = 0 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - e^{1/0^-} = 0 - e^{-\infty} = 0 - 0 = 0.$$

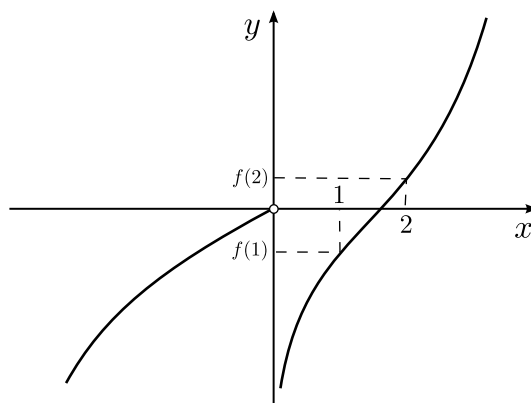
Riguardo all'ultimo limite, quello per  $x \rightarrow 0^-$ , si può osservare che la forma è in realtà  $0^- - 0^+$  e quindi possiamo affermare che si tratta di uno  $0^-$ , cioè la funzione tende a 0 da valori negativi.

La derivata di  $f$  è

$$f'(x) = 1 - e^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

Il segno della derivata è immediato. L'espressione porta ad assumere certamente valori positivi. Quindi la funzione  $f$  è crescente, cioè è crescente in  $(-\infty, 0)$  e crescente in  $(0, +\infty)$ .

Un possibile grafico è riportato qui sotto. Si può anche osservare che per  $x = 1$  il valore della funzione è  $f(1) = 1 - e$ , che è negativo, mentre per  $x = 2$  il valore della funzione è  $f(2) = 2 - \sqrt{e}$ , che è positivo.



Concludiamo con l'integrale. Si ha

$$\int_1^2 \frac{f(x) - x}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x - e^{1/x} - x}{x^2} dx = \int_1^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} dx.$$

Si tratta di un'integrazione quasi immediata, dato che la quantità tra parentesi è la derivata di  $\frac{1}{x}$ , cioè dell'esponente della funzione esponenziale che segue. Quindi si ha

$$\int_1^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} dx = e^{1/x} \Big|_1^2 = e^{1/2} - e = \sqrt{e} - e.$$

**ESERCIZIO 2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Si stabilisca poi se le colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica se il vettore  $(1, 1, 1)$  appartiene al sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dalle colonne di  $A$  e se il vettore  $(0, 0, 0, 1)$  appartiene al sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle righe di  $A$ .



Per stabilire se le righe  $r^1, r^2, r^3$  sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati.

Il rango di  $A$  è 3, in quanto la sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne ha determinante uguale a 1. Quindi le righe sono linearmente indipendenti.

Vediamo di trovare il risultato anche con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di  $r^1, r^2, r^3$  e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, -a, 0) + (b, 0, b, 0) + (c, c, 0, c) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (b + c, a + c, -a + b, c) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ -a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto questo conferma che le righe sono linearmente indipendenti.

Le colonne sono certamente linearmente dipendenti, dato che il rango della matrice è 3 e il rango è il massimo numero di colonne (e righe) indipendenti.

Dobbiamo dire se il vettore  $(1, 1, 1)$  appartiene al sottospazio  $S_c$  di  $\mathbb{R}^3$  generato dalle colonne di  $A$ . Dato che il rango di  $A$  è 3, questa è la dimensione del sottospazio  $S_c$ , che quindi coincide con tutto  $\mathbb{R}^3$ . Pertanto ogni vettore di  $\mathbb{R}^3$  appartiene a tale sottospazio, in particolare il vettore  $(1, 1, 1)$ .

Dobbiamo dire infine se il vettore  $u^4 = (0, 0, 0, 1)$  (lo indico con  $u^4$  poiché è il quarto vettore fondamentale dello spazio  $\mathbb{R}^4$ ) appartiene al sottospazio  $S_r$  di  $\mathbb{R}^4$  generato dalle righe di  $A$ . A differenza del punto precedente, qui non è detto che  $u^4$  appartenga a  $S_r$ , dato che anche la dimensione di  $S_r$  è 3 e quindi  $S_r$  non è tutto  $\mathbb{R}^4$ .

Possiamo seguire due strade, e le propongo entrambe.

Dire che  $u^4$  appartiene ad  $S_r$  significa che  $u^4$  si può scrivere come combinazione lineare delle righe di  $A$ . Scriviamo quindi

$$u^4 = ar^1 + br^2 + cr^3 \quad \Leftrightarrow \quad (0, 0, 0, 1) = a(0, 1, -1, 0) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 1, 0, 1)$$

cioè

$$(0, 0, 0, 1) = (b + c, a + c, -a + b, c) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ -a + b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Il sistema ha soluzione, precisamente con  $a = -1, b = -1, c = 1$ . Quindi  $u^4$  appartiene al sottospazio  $S_r$ .

Si poteva alternativamente usare la matrice  $A$  accostando come quarta riga il vettore  $u^4$ . Si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{il cui determinante vale } 0.^7$$

Questo ci dice che le quattro righe di  $A'$  sono dipendenti e necessariamente questo è dovuto alla dipendenza di  $u^4$  dagli altri vettori, dato che questi ultimi sono indipendenti.

**ESERCIZIO 3.** Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{xy} - \ln(4 - x^2 - (y-2)^2),$$

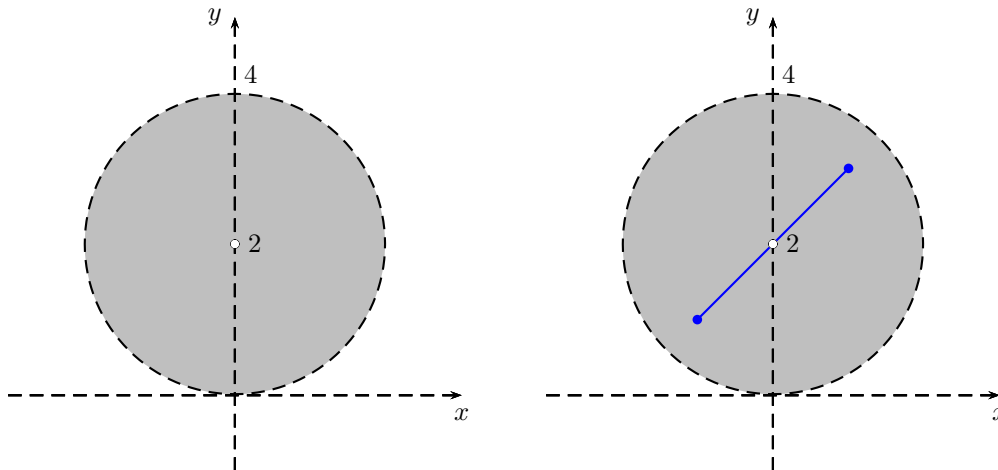
si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme convesso. Si calcoli il gradiente di  $f$  e si dica se il punto  $(1, 2)$  è stazionario.



Le condizioni di esistenza della funzione  $f$  sono date dal sistema

$$\begin{cases} xy \neq 0 \\ 4 - x^2 - (y-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x^2 + (y-2)^2 < 4. \end{cases}$$

Si tratta dei punti interni al cerchio di centro il punto  $(0, 2)$  e raggio 2 che non stanno sull'asse  $y$ . Il dominio di  $f$  è raffigurato in grigio qui sotto.



Non è un insieme convesso. Ricordo che un insieme del piano si dice convesso se presi in modo arbitrario due suoi punti succede sempre che il segmento che congiunge i due punti è tutto contenuto nell'insieme. La figura a destra fa vedere che il nostro insieme non è convesso.

Le due derivate parziali di  $f$  sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{4 - x^2 - (y-2)^2} (-2x) = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2x}{4 - x^2 - (y-2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{y^2} \right) - \frac{1}{4 - x^2 - (y-2)^2} (-2(y-2)) = -\frac{1}{xy^2} + \frac{2(y-2)}{4 - x^2 - (y-2)^2}.$$

Il gradiente di  $f$  è ovviamente  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .

Il punto  $(1, 2)$  non è stazionario dato che ad esempio la derivata parziale rispetto ad  $x$  non si annulla nel punto. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

<sup>7</sup>Conviene sviluppare il calcolo rispetto alla quarta riga.