Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2014/15

Alberto Peretti

Aprile 2016

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/11/2014

Domanda 1. Scrivere un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che $P(-1) = P(2) = 0$

✎

Il teorema di Ruffini dice che un polinomio P è divisibile per $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$. Quindi le condizioni poste dicono che P deve essere divisibile per $(x+1)(x-2)$. Dovendo essere di terzo grado basta moltiplicarlo per x. Quindi una possibile risposta è $P(x) = x(x+1)(x-2)$.

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$xe^x - 2x = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$x(e^x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ e^x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \ln 2.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$$

✎

C'è anzitutto la condizione di esistenza $x > 0$. Si tratta poi di un'equazione logaritmica riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $\log_3 x = t$ l'equazione diventa

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+2)(t-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2 \ \vee \ t = 3.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$\log_3 x = -2 \ \vee \ \log_3 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 x < \log_3 \frac{1}{9} \ \vee \ \log_3 x > \log_3 27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9} \ \vee \ x = 27.$$

Le due soluzioni sono entrambe accettabili nelle condizioni di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2x(x+1) < 1$$

✎

La disequazione equivale a

$$2x^2 + 2x - 1 < 0. \text{ Con la formula risolutiva } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori interni: $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Domanda 5. Risolvere la disequazione

$$\frac{x}{x+1} \geq x$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{x}{x+1} - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x^2 - x}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x+1} \leq 0.$$

Qui due strade. Osservare che $x = 0$ è soluzione e che le altre si hanno quando il denominatore è strettamente negativo. Quindi $S = (-\infty, -1) \cup \{0\}$.

Oppure, per andare sul sicuro, la disequazione equivale ai sistemi (segni discordi)

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 \leq 0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \ \vee \begin{cases} x=0 \\ x>-1. \end{cases}$$

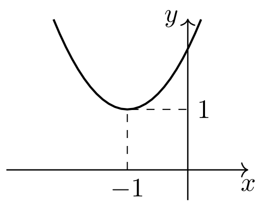
Pertanto le soluzioni sono le $x<-1$ oppure $x=0$.[1]

Domanda 6. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2+2x-y+2=0$

✎

L'equazione equivale a

$$y = x^2+2x+2.$$



Si tratta di una parabola con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto. Cerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse x. Con la formula risolutiva $x=-1\pm\sqrt{1-2}$ e quindi non ci sono zeri reali. La parabola non interseca dunque l'asse x.

Per poterne fare un grafico possiamo usare il completamento del quadrato, che in questi casi risolve completamente il problema. Si ha

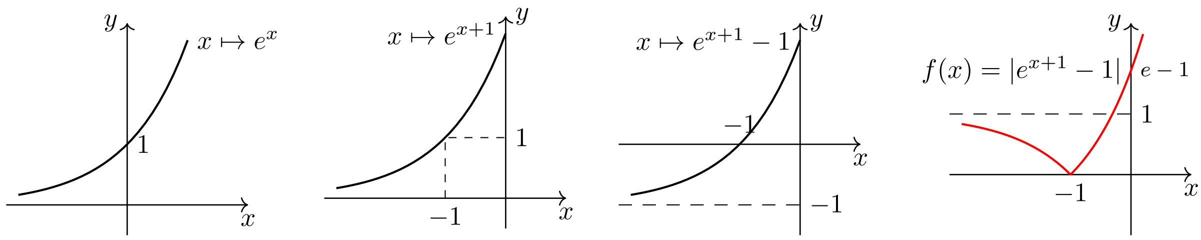
$$y = x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1.$$

Quindi la parabola si ottiene dal grafico di $x\mapsto x^2$, con uno spostamento a sinistra di 1 e poi uno spostamento in alto di 1. Il grafico è quello qui a fianco.

Domanda 7. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x)=|e^{x+1}-1|$

✎

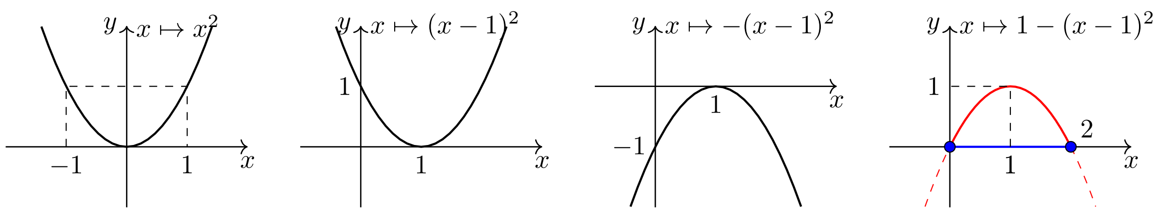
Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x\mapsto e^x$ con le trasformazioni qui sotto riportate.



Domanda 8. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, con $f(x)=1-(x-1)^2$, si determinino i suoi punti di massimo e di minimo

✎

La funzione in tutto $\mathbb{R}$ ha per grafico la parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che incontra l'asse x nei punti di ascissa 0 e 2. Viene però definita solo nell'intervallo $[0,2]$. Il grafico si ottiene con le trasformazioni elementari riportate qui sotto.



Dal grafico si vede che, relativamente all'intervallo $[0,2]$ (in blu), il punto di massimo è $x=1$ e ci sono due punti di minimo in $x=0$ e in $x=2$.

[1] Si ricordi che $x^2\geq 0$ è vera per ogni x, mentre $x^2\leq 0$ è vera per $x=0$.

Domanda 9. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-1/x}}{x-1}+\frac{x}{\ln x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-1/x}}{x-1}+\frac{x}{\ln x}\right)=\frac{e^{-1/0^+}}{-1}+\frac{0}{\ln 0^+}=\frac{e^{-\infty}}{-1}+\frac{0}{-\infty}=0+0=0.$

Domanda 10. Si calcoli la derivata della funzione $f(x)=x\ln\left(x+e^{-x^2}\right)$

✎

$$f'(x)=\ln\left(x+e^{-x^2}\right)+x\cdot\frac{1}{x+e^{-x^2}}\left(1+e^{-x^2}\cdot(-2x)\right).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/11/2014

Domanda 1. Scrivere un polinomio $P(x)$ di terzo grado che sia divisibile per $x+1$ e tale che $P(2)=0$

✎

Il teorema di Ruffini dice che un polinomio P è divisibile per $x-a$ se e solo se $P(a)=0$. Quindi le condizioni poste dicono che P deve essere divisibile per $(x+1)(x-2)$. Dovendo essere di terzo grado basta moltiplicarlo per x. Quindi una possibile risposta è $P(x)=x(x+1)(x-2)$.

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$x\ln x-2x=0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x>0$. Poi l'equazione equivale a

$$x(\ln x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \text{ (non accettabile) } \vee\ \ln x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=e^2.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$3\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x-1=0$$

✎

Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $3^x=t$ l'equazione diventa

$$3t^2+2t-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{-1\pm 2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad t=-1\ \vee\ t=\frac{1}{3}.$$

Pertanto, tornando alla variabile x, le soluzioni sono per

$$3^x=-1\ \vee\ 3^x=\frac{1}{3}.\quad \text{La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione } x=-1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2x>x(x+1)$$

✎

La disequazione equivale a

$$2x>x^2+x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x<0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-1)<0.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori interni: $0<x<1$.

Domanda 5. Risolvere la disequazione

$$\frac{x-1}{x}<x$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x\neq 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{x-1}{x}-x<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-1-x^2}{x}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-x+1}{x}>0.$$

Il numeratore non ha zeri reali in quanto la formula risolutiva fornisce $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$. Quindi il numeratore è sempre positivo e pertanto la disequazione è vera per $x>0$.

Domanda 6. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2-2x-y+2=0$

✎

L'equazione equivale a

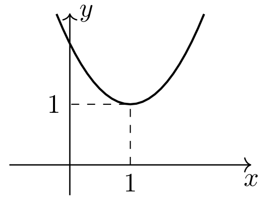
$$y=x^2-2x+2.$$

Si tratta di una parabola con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto. Cerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse x. Con la formula risolutiva $x = 1 \pm \sqrt{1-2}$ e quindi non ci sono zeri reali. La parabola non interseca dunque l'asse x.

Per poterne fare un grafico possiamo usare il completamento del quadrato, che in questi casi risolve completamente il problema. Si ha

$$y = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1.$$

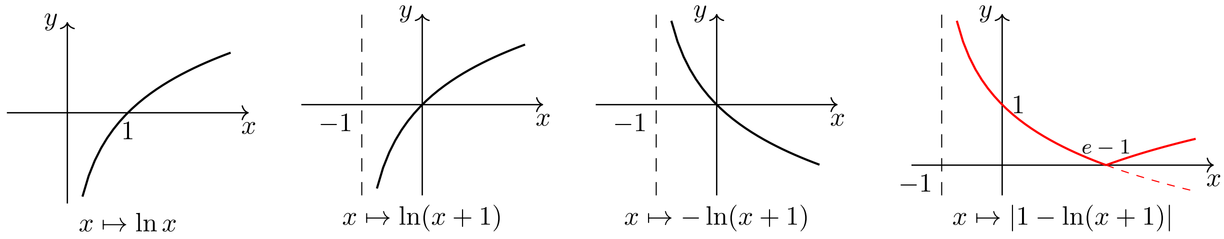
Quindi la parabola si ottiene dal grafico di $x \mapsto x^2$, con uno spostamento a destra di 1 e poi uno spostamento in alto di 1. Il grafico è quello qui a fianco.



Domanda 7. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = |1 - \ln(x+1)|$

✎

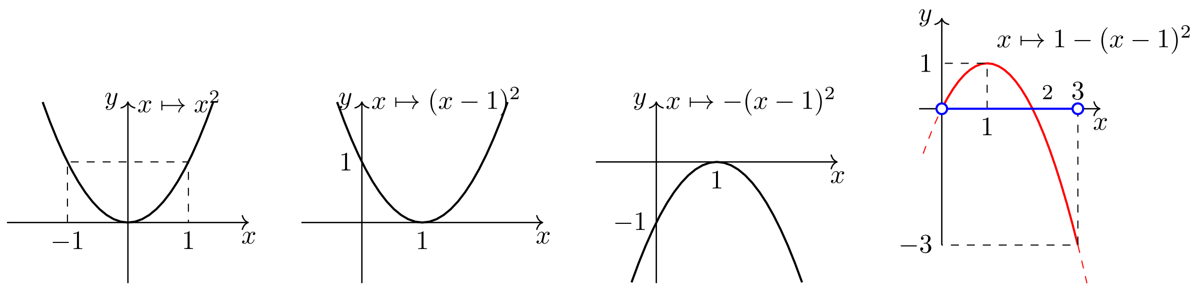
Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto \ln x$ con le trasformazioni qui raffigurate.



Domanda 8. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f : (0,3) \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 1 - (x-1)^2$, si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f

✎

La funzione in tutto $\mathbb{R}$ ha per grafico la parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che incontra l'asse x nei punti di ascissa 0 e 2. Viene però definita solo nell'intervallo $(0,3)$. Il grafico si ottiene con le trasformazioni elementari riportate qui sotto.



Dal grafico si vede che, relativamente all'intervallo $(0,3)$, l'estremo superiore è il valore che la funzione assume in $x = 1$, cioè $f(1) = 1$, mentre l'estremo inferiore è il valore del limite di f per $x \to 3^-$, cioè $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -3$.

Domanda 9. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{e^{-1/x}} + \frac{\ln x}{x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{e^{-1/x}} + \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{-1}{e^{-1/0^+}} + \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-1}{e^{-\infty}} + \frac{-\infty}{0^+} = \frac{-1}{0^+} - \infty = -\infty - \infty = -\infty.$$

Domanda 10. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x\sqrt{\ln x + e^{-2x}}$

✎

$$f'(x) = \sqrt{\ln x + e^{-2x}} + x\frac{1}{2\sqrt{\ln x + e^{-2x}}} \cdot \left(\frac{1}{x} + e^{-2x} \cdot (-2)\right).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 07/11/2014

ESERCIZIO 1. Date le due funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{\ln x}$$

si scriva l'espressione delle due funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Si stabilisca poi, in base alla definizione, se

$$f(x) \quad \text{è trascurabile rispetto a} \quad g(x)\ ,\ \text{per } x \to +\infty.$$

✎

Per quanto riguarda le funzioni composte si ha

$$f(g(x)) = \frac{1}{(g(x))^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^3} = (\ln x)^3$$

e

$$g(f(x)) = \frac{1}{\ln f(x)} = \frac{1}{\ln \frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{\ln(x^3)}.$$

Per la seconda domanda dobbiamo calcolare il limite per $x \to +\infty$ del quoziente delle due funzioni.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0,$$

dato che il limite è un confronto standard tra la funzione logaritmica e una funzione potenza. Pertanto possiamo dire che f è trascurabile rispetto a g per $x \to +\infty$.

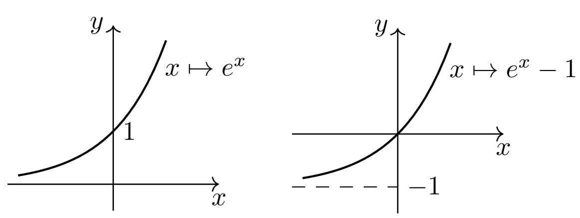
ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 - (x-1)^2 & 0 < x \le 2, \end{cases}$$

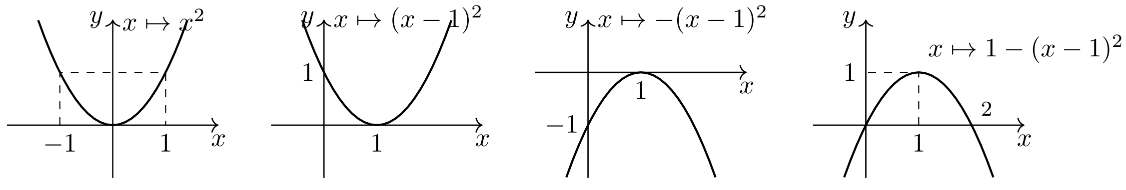
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari.
Si provi che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 2]$ e si verifichi la tesi.
Si stabilisca se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 2]$.
($\star$) Si verifichi se comunque è verificata la tesi del teorema di Lagrange.

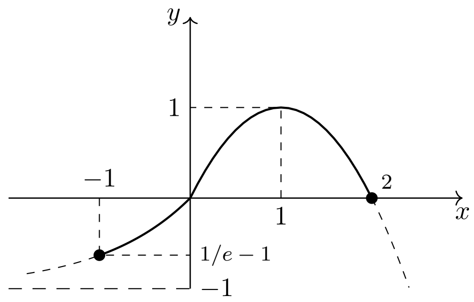
✎

La trasformazione della funzione esponenziale e^x è la seguente.



La parte di destra si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$ con le trasformazioni seguenti.





Pertanto il grafico della funzione f è quello rappresentato qui sopra.

Il teorema di Weierstrass è applicabile se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato. L'intervallo $[-1, 2]$ è chiuso e limitato per definizione.

Per verificare la continuità di f in questo intervallo possiamo anzitutto affermare che f è certamente continua negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 2]$,[2] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = 0$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo però affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 0$ da sinistra, in quanto in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione polinomiale.

La continuità da destra è data dall'uguaglianza tra

$$f(0) = e^0 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(1 - (x-1)^2\big) = 1 - 1 = 0.$$

Verificare la tesi del teorema significa constatare che nell'esempio dato è vero quanto la tesi afferma.

La tesi del teorema di Weierstrass è che la funzione f nell'intervallo $[-1, 2]$ assume i valori del suo estremo inferiore e del suo estremo superiore in tale intervallo, o equivalentemente che f ha in $[-1, 2]$ un punto di massimo e un punto di minimo (globali). Dal grafico possiamo vedere che il punto di minimo è in $x = -1$, con valore corrispondente $f(-1) = \frac{1}{e} - 1$ (estremo inferiore di f) e che il punto di massimo è in $x = 1$, con valore corrispondente $f(1) = 1$ (estremo superiore di f).

Ora l'applicabilità del teorema di Lagrange, le cui ipotesi sono che la funzione sia continua nell'intervallo $[-1, 2]$ (già verificato) e che sia derivabile nei punti interni, cioè nell'intervallo $(-1, 2)$.

Quindi studiamo la derivabilità. Possiamo intanto dire che dal grafico non pare esserci evidenza di un punto di non derivabilità, ma dobbiamo provarlo rigorosamente. Possiamo dire intanto, in modo simile a quanto fatto con la continuità, che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 2)$, coincidendo con funzioni elementari. Sfruttando appunto la derivabilità in questi punti possiamo poi scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -1 < x < 0 \\ -2(x-1) & \text{se } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Pertanto avremo[3]

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(-2x + 2\big) = 2.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ (c'è un punto angoloso, anche se non così evidente) e pertanto il teorema di Lagrange non è applicabile.

[2] Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo $[-1, 0)$, cioè in tutti i punti x, con $-1 \le x < 0$ e nell'intervallo $(0, 2]$, e cioè in tutti i punti x, con $0 < x \le 2$ (agli estremi -1 e 2 la continuità si intende rispettivamente da destra e da sinistra). Quindi non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda la continuità nel punto $x = 0$, che andrà studiato successivamente.

[3] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

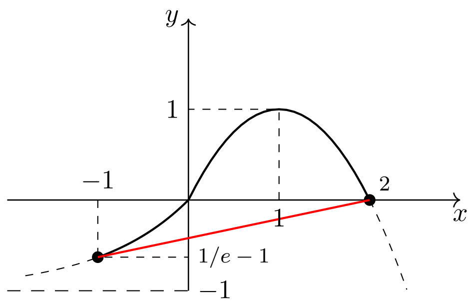
($\star$) L'ultima domanda, marcata con un asterisco,[4] è di verificare se comunque sussiste la tesi del teorema di Lagrange, che parla dell'esistenza di un punto c interno all'intervallo $[-1,2]$ in cui si ha $f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{3}$. Ricordo che il valore di questo quoziente (rapporto incrementale calcolato agli estremi dell'intervallo) è la pendenza della retta che congiunge gli estremi del grafico (rappresentata in rosso nella figura sotto). Nel nostro caso vale

$$\frac{f(2)-f(-1)}{3} = \frac{1-\frac{1}{e}}{3}.$$

Dobbiamo cercare se c'è un punto c in cui la derivata, calcolata poco fa, vale appunto $\frac{1-\frac{1}{e}}{3}$.

Nell'intervallo $(-1,0)$ la derivata è e^x e quindi l'equazione da considerare è

$$e^x = \frac{1-\frac{1}{e}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{e}}{3}\right).$$



L'uso di una calcolatrice porta subito a dire che questo valore sta alla sinistra di -1 è quindi non è accettabile. Ma anche senza la calcolatrice si trova facilmente che

$$\ln\left(\frac{1-\frac{1}{e}}{3}\right) < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\frac{1}{e}}{3} < \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad e\left(1-\frac{1}{e}\right) < 3 \quad \Leftrightarrow \quad e-1<3 \quad \Leftrightarrow \quad e<4, \text{ e questa è vera.}$$

Nell'intervallo $(0,2)$ la derivata vale $2-2x$ e quindi l'equazione da considerare è

$$2-2x = \frac{1-\frac{1}{e}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2 - \frac{1-\frac{1}{e}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5+\frac{1}{e}}{6}.$$

In questo caso con una calcolatrice si trova immediatamente che il valore è accettabile. Senza la calcolatrice si può fare così:

$$\frac{5+\frac{1}{e}}{6} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5+\frac{1}{e} < 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e} < 7 \quad \Leftrightarrow \quad e > \frac{1}{7}, \text{ che è certamente vera.}$$

Anche se il teorema non è applicabile c'è comunque un (unico) punto in cui la tesi risulta soddisfatta ed è $c = \frac{5+\frac{1}{e}}{6}$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1}$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si determini il segno di f ed eventuali intersezioni con gli assi cartesiani. Si calcoli la derivata di f. Si disegni un possibile grafico di f. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.
($\star$) Si provi che la funzione è decrescente.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è $x \neq 0$, quindi l'insieme di definizione è $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, 0^-, 0^+ e $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (forma indeterminata),}$$

ma possiamo dire che il limite vale 0 in quanto, dopo aver trascurato la costante a denominatore, si tratta di un confronto standard potenza/esponenziale. Si poteva anche usare il teorema di De l'Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{e^{-\infty}-1} = \frac{-\infty}{0-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0}{e^0-1} = \frac{0}{0} \text{ (forma indeterminata)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1 \text{ (a denominatore limite notevole).}$$ [5]

[4] Il significato, detto in aula all'inizio della prova, era che si trattava di una domanda in più, che forniva punteggio oltre i 5 punti previsti.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \text{ (come il precedente) } = 1.$$

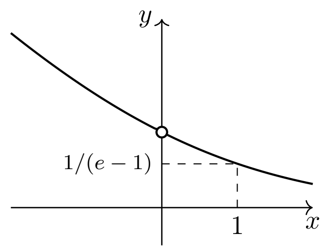
Segno della funzione. La funzione f è positiva se

$$\frac{x}{e^x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ e^x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ e^x-1<0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ e^x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ e^x<1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<0. \end{cases}$$

Pertanto la funzione è positiva dove esiste. Non ci sono intersezioni con gli assi.
La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}.$$

Un possibile grafico di f è il seguente.



Si noti che ho messo in evidenza nel grafico che la funzione, pur avendo limite finito per $x \to 0$, cioè 1, non è definita in $x = 0$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$ è data da

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \quad \text{cioè} \quad y = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{(e-1)^2}(x-1).$$

($\star$) L'ultima domanda, marcata con un asterisco con lo stesso significato di prima, chiede di provare che la funzione è decrescente. Propongo una possibile soluzione (non escludendo che ci siano anche altri modi, forse più semplici). Si tratta di provare che la derivata di f è negativa, cosa che equivale alla disequazione

$$e^x - 1 - xe^x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(1-x) \le 1.$$

Non è difficile provare che questo è vero, con un veloce studio della funzione $x \mapsto e^x(1-x)$. Bastano in realtà i limiti a $-\infty$ e $+\infty$, che risultano rispettivamente 0^+ e $-\infty$ e la derivata, che si annulla solo in $x = 0$. La funzione risulta quindi crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$ e il suo valore massimo, in $x = 0$, è 1. Pertanto è sempre minore o uguale a 1.

[5]Si poteva alternativamente usare il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x-1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x} = 1.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 21/01/2015

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x}\big(1+\ln x\big)^{1/4}\,\mathrm{d}x = \frac{\big(1+\ln x\big)^{5/4}}{\frac{5}{4}}\Bigg|_1^e = \frac{4}{5}\left(2^{5/4}-1\right).$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\ln x\,\mathrm{d}x$

✎

L'integrale si può fare per parti.

$$\begin{aligned}
\int x^{1/4}\ln x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{5/4}}{\frac{5}{4}}\ln x - \frac{4}{5}\int x^{5/4}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{4}{5}\int x^{1/4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{4}{5}\cdot\frac{x^{5/4}}{\frac{5}{4}} + c \\
&= \frac{4}{5}x^{5/4}\ln x - \frac{16}{25}x^{5/4} + c.
\end{aligned}$$

Domanda 3. Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$, usando la definizione

✎

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-5}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-4}}{-4}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^4}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

Domanda 4. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n/3}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n/3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n/3}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2^{1/3})^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. La serie converge e la somma è data dalla formula $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Domanda 5. Dire se converge o diverge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt{n^3+n}}$

✎

Nel termine generale della serie a numeratore il logaritmo è trascurabile rispetto alla potenza, per $n\to+\infty$; a denominatore n è trascurabile rispetto a $\sqrt{n^3}$ (cioè $n^{3/2}$). Quindi il termine generale $\frac{\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt{n^3+n}}$, per $n\to+\infty$, è equivalente a $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}$. Dato che quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica propriamente detta, che è una serie divergente, allora per il criterio del confronto diverge anche la serie data.

Domanda 6. Scrivere la matrice dei complementi algebrici della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

✎

La matrice dei complementi algebrici di A è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Domanda 7. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

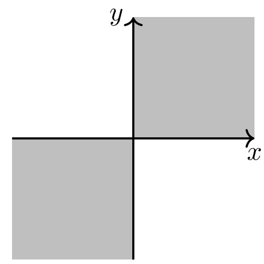
✎

Il rango è 2, osservando che ad esempio la sottomatrice di A ottenuta con le ultime 2 colonne ha determinante diverso da zero.

Domanda 8. Disegnare il dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{xy}$

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è $xy \geq 0$, che è verificata nel primo o nel terzo quadrante, frontiera compresa.[6] Il dominio è rappresentato in grigio è qui sotto.



Domanda 9. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = xe^{1/y}$

✎

$$\nabla f(x, y) = \left(e^{1/y} \ , \ xe^{1/y}\Big(-\frac{1}{y^2} \Big) \right) = \frac{e^{1/y}}{y^2} \big(y^2 \ , \ -x \big).$$

Domanda 10. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = 2xy - 2y^2$

✎

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Essendo negativo il determinante, che è un minore del secondo ordine, cioè di ordine pari, la forma quadratica è indefinita.

[6] La disequazione $xy \geq 0$ equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 23/01/2015

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = xe^{-x}$$
se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $[0,1]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

✎

L'integrale indefinito si può calcolare per parti.
$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x\big(-e^{-x}\big) - \int \big(-e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$
Ora l'integrale definito:
$$\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^1 = (-e^{-1} - e^{-1}) - (-1) = 1 - \frac{2}{e}.$$
L'integrale generalizzato si può calcolare,[7] dato che conosciamo una primitiva.
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\big(-xe^{-x} - e^{-x}\big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\big(-be^{-b} - e^{-b} + 1\big) = 1.\ ^{8}$$

Alla domanda se l'integrale converge o diverge si poteva anche rispondere utilizzando uno dei criteri di convergenza. Infatti la funzione
$$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \text{ è trascurabile rispetto a } \frac{1}{x^2}, \text{ per } x \to +\infty,$$
in quanto
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x/e^x}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0 \text{ (per confronto standard).}$$
Dato che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato a $+\infty$, allora anche la nostra funzione lo è.

ESERCIZIO 2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
si stabilisca se le sue righe sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica poi se le colonne sono generatori di $\mathbb{R}^3$ e se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio S da esse generato. Si stabilisca infine il segno della forma quadratica associata alla matrice A.

✎

Per stabilire se le righe r^1, r^2, r^3 sono linearmente dipendenti il metodo più semplice è calcolare il determinante di A (dato che le matrice è quadrata).
$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{ (prima riga) } 2\cdot 1 - 1\cdot 2 = 0.$$

---

[7] Ricordo che gli integrali generalizzati si possono *calcolare* usando la definizione. Per fare questo occorre però essere in grado di trovare una primitiva (e ci sono funzioni per cui non siamo in grado di trovare una primitiva, come ad esempio e^{x^2}). Nei casi in cui non si è in grado di trovare una primitiva ci si accontenta di capire se l'integrale *converge o diverge*, ricorrendo a qualche criterio di convergenza. Nel caso proposto, dato che abbiamo trovato una primitiva, alla domanda "l'integrale converge o diverge?" possiamo rispondere in due modi.

[8] $\lim_{b\to+\infty} be^{-b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = 0$ (confronto standard).

Questo prova che le righe sono linearmente dipendenti.

Di conseguenza anche le colonne sono linearmente dipendenti e quindi non possono essere generatori di $\mathbb{R}^3$, dato che esse generano un sottospazio di dimensione al più 2.

Vediamo se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$, cioè $u^1 = (1,0,0)$ appartiene al sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Vediamo due modi possibili. Nel primo usiamo la definizione di sottospazio generato, cioè sottospazio delle combinazioni lineari dei vettori dati. Allora u^1 appartiene ad S se si può scrivere come combinazione lineare delle colonne. Non conviene utilizzare tutte e tre le colonne, dato che sono dipendenti: conviene usare una coppia di colonne indipendenti, ad esempio $c^1 = (2,1,0)$ e $c^2 = (1,1,1)$. Scriviamo quindi

$$u^1 = ac^1 + bc^2 \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = a(2,1,0) + b(1,1,1) \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = (2a,a,0) + (b,b,b) \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = (2a+b, a+b, b).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} 2a+b = 1 \\ a+b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{, che è evidentemente impossibile. Quindi } u^1 \text{ non appartiene al sottospazio } S.$$

Si poteva, in modo molto più rapido, osservare che il determinante della matrice ottenuta accostando u^1 come terza colonna a c^1 e c^2, cioè

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ e quindi } u^1 \text{ non dipende dagli altri due.}$$

Ora il segno della forma quadratica associata alla matrice A (si noti che A è simmetrica). Usiamo ovviamente il metodo dei minori principali/principali di Nord–Ovest (li indico con MP e MPNO).

Iniziamo con il calcolo dei MPNO:

$$\text{MPNO ordine } 1 = 2\ ,\ \text{MPNO ordine } 2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\ ,\ \text{MPNO ordine } 3 = \det A = 0 \text{ (già calcolato prima).}$$

Essendo nullo uno dei MPNO, questi non sono sufficienti per concludere. Il loro segno è compatibile con una forma semidefinita positiva. Per verificare che in effetti è così dobbiamo calcolare tutti i MP, che sono:

MP di ordine 1: 2,1,2 (elementi sulla diagonale principale).

$$\text{MP di ordine 2: } \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4, \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Pertanto è confermato che la forma quadratica è semidefinita positiva.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\big(x+y\big)\cdot\ln\big(1-x^2-y\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si dica se il punto $(2,-2)$ è interno, esterno o di frontiera per il dominio di f. Si calcoli la derivata parziale di f rispetto alla variabile y e si dica infine se lungo la retta di equazione $x+y=1$ ci sono punti stazionari di f.

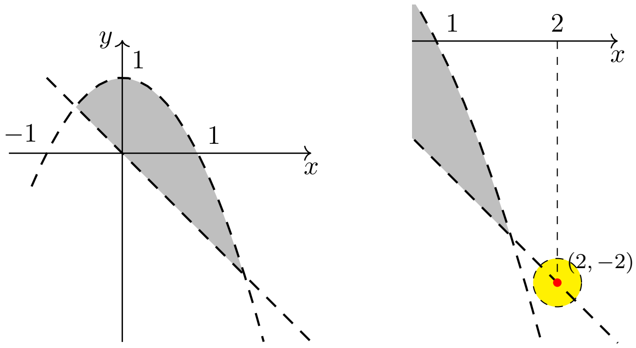
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x+y > 0 \\ 1-x^2-y > 0 \end{cases} \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases} y > -x \\ y < 1-x^2. \end{cases}$$

La prima disequazione individua il semipiano aperto che sta al di sopra della bisettrice del secondo e quarto quadrante. La seconda disequazione individua la regione che sta al di sotto della parabola di equazione $y = 1-x^2$, il cui grafico si ottiene facilmente con le trasformazioni elementari. Si tratta della parabola con asse verticale, concavità verso il basso, vertice nel punto $(0,1)$ e che incontra l'asse x in $x = \pm 1$.

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.



Per dire se il punto $(2,-2)$, punto del quarto quadrante, è interno, esterno o di frontiera per il dominio di f possiamo procedere in diversi modi. Faccio osservare ad esempio che, essendo il dominio un insieme aperto, se il punto appartenesse al dominio allora necessariamente sarebbe un punto interno, dato che in un insieme aperto tutti i punti sono interni. Il punto $(2,-2)$ però non appartiene al dominio, dato che non soddisfa la prima disequazione.

Il punto $(2,-2)$ sta sulla bisettrice e non soddisfa nemmeno la seconda disequazione del sistema dato che $-2 < 1-4$, cioè $-2 < -3$ è falsa. Quindi il punto sta al di sopra della parabola ed è quindi un punto esterno al dominio. È raffigurato in rosso nella figura di destra e in giallo è indicato un suo intorno, tutto contenuto nell'insieme complementare del dominio, che prova che il punto è esterno.

La derivata parziale di f rispetto alla variabile y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} \cdot \ln\left(1-x^2-y\right) + \ln\left(x+y\right) \cdot \frac{-1}{1-x^2-y}.$$

L'ultima domanda è stabilire se lungo la retta di equazione $x+y=1$ ci sono punti stazionari di f.[9] Attenzione a non fraintendere: non si chiede di trovare eventuali punti stazionari vincolati sul vincolo di equazione $x+y=1$, ma se su questa retta ci sono punti stazionari (non vincolati). Non conviene ovviamente trovare tutti gli eventuali punti stazionari, per vedere poi se alcuni stanno sulla retta indicata. Ricordando che i punti stazionari annullano entrambe le derivate parziali e disponendo della derivata parziale rispetto ad y, appena calcolata, la cosa più semplice è vedere intanto se sulla retta si può annullare la $\frac{\partial f}{\partial y}$. Facciamo quindi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x+y=1} = \ln(1-x^2-1+x) = \ln(x-x^2)$$

e poniamo questa uguale a zero:

$$\ln(x-x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+1 = 0,$$

ma questa è impossibile perché il discriminante è negativo. Quindi lungo la retta non ci possono essere punti stazionari della funzione.

[9] Si noti che la domanda non è priva di significato in quanto la retta è in parte interna al dominio della funzione.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 21/01/2015

Domanda 1. Determinare gli zeri del polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$

✎

Cerchiamo di scomporre il polinomio in fattori. Possiamo raccogliere x e si ottiene $P(x) = x(2x^3 - 3x^2 + 1)$. Ora il polinomio tra parentesi si annulla in $x = 1$ e quindi è divisibile per $x - 1$. Possiamo scomporlo con la regola di Ruffini:

	2	-3	0	1
1		2	-1	-1
	2	-1	-1	0

Quindi si ha $P(x) = x(x-1)(2x^2 - x - 1)$. Cerchiamo gli zeri del polinomio di secondo grado con la formula risolutiva: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$. Pertanto gli zeri di P sono: 0, 1 e $-\frac{1}{2}$.

Domanda 2. Nell'espressione $\dfrac{x}{y^4} e^{1/y} + \dfrac{2}{y^3} e^{2/y}$ raccogliere $\dfrac{1}{y^4} e^{1/y}$ e se possibile semplificare

✎

$$\frac{x}{y^4} e^{1/y} + \frac{2}{y^3} e^{2/y} = \frac{e^{1/y}}{y^4} \left(\frac{\frac{x}{y^4} e^{1/y}}{\frac{e^{1/y}}{y^4}} + \frac{\frac{2}{y^3} e^{2/y}}{\frac{e^{1/y}}{y^4}} \right) = \frac{e^{1/y}}{y^4} \left(x + 2y e^{2/y - 1/y} \right) = \frac{e^{1/y}}{y^4} \left(x + 2y e^{1/y} \right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2(x+1)\ln x + 3(x+1) = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi possiamo raccogliere $x + 1$. L'equazione equivale quindi al sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ (x+1)\big(2\ln x + 3\big) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \ \vee \ \ln x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \ \vee \ x = e^{-3/2}. \end{cases}$$

Soltanto la soluzione positiva è accettabile, cioè $x = e^{-3/2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$x^4 - 6x^2 + 8 > 0$$

✎

Si tratta di un'equazione intera di quarto grado riconducibile ad una di secondo grado. Con il cambio di variabile $x^2 = t$ l'equazione diventa

$$t^2 - 6t + 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-2)(t-4) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < 2 \ \vee \ t > 4.$$

Le soluzioni vanno quindi cercate nelle x per cui

$$x^2 < 2 \ \vee \ x^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \ \vee \ x < -2 \ \vee \ x > 2$$

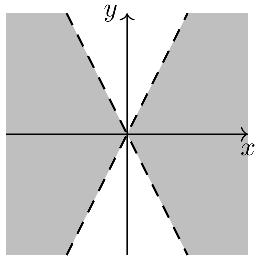
cioè l'insieme $(-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $4x^2 - y^2 > 0$

✎

Il membro di sinistra è la differenza di due quadrati. La disequazione equivale quindi a $(2x - y)(2x + y) > 0$, che a sua volta equivale ai due sistemi

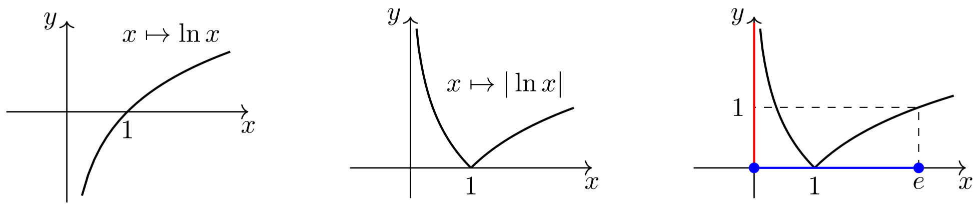
$$\begin{cases} 2x - y > 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - y < 0 \\ 2x + y < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y < 2x \\ y > -2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y > 2x \\ y < -2x. \end{cases}$$



Domanda 6. Aiutandosi con un grafico, determinare l'immagine dell'intervallo $(0, e)$ attraverso la funzione $f(x) = |\ln x|$

✎

Il grafico della funzione f si ottiene con trasformazioni grafiche elementari a partire dal grafico di $\ln x$.



Dal grafico risulta che l'immagine dell'intervallo $(0, e)$ (indicato in blu) è l'intervallo $[0, +\infty)$ (indicato in rosso).

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} + e^{-1/x}\right)$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} + e^{-1/x}\right) = \frac{1}{\ln 0^+} + e^{-1/0^+} = \frac{1}{-\infty} + e^{-\infty} = 0 + 0 = 0.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\Big(x + e^{-1/x}\Big)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \Big(x + e^{-1/x}\Big) + x\Big(1 + e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}\Big).$$

Domanda 9. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n/2}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3^{1/2})^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^n}.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. La serie converge e la somma è data dalla formula $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$.

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = y \ln\left(\dfrac{y}{1-x}\right)$

✎

$$\nabla f(x,y) = \left(y \cdot \frac{1}{\frac{y}{1-x}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right) \cdot (-1)\ ,\ 1 \cdot \ln\left(\frac{y}{1-x}\right) + y \cdot \frac{1}{\frac{y}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{y}{1-x}\ ,\ \ln\left(\frac{y}{1-x}\right) + 1\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 21/01/2015

Domanda 1. Determinare gli zeri del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

✎

Si può fare un doppio raccoglimento. Raccogliamo x^2 dai primi due termini e -3 dagli ultimi due.

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = x^2(x+1) - 3(x+1) = (x+1)(x^2-3).$$

Pertanto gli zeri sono -1, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $1 + x \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

✎

Iniziando col semplificare per x, l'espressione è uguale a

$$1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2(x+1) - (x+1)e^{1/(x+1)} = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi possiamo raccogliere $x+1$. L'equazione equivale quindi al sistema

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)\big(2 - e^{1/(x+1)}\big) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ e^{1/(x+1)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{1}{x+1} = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x+1 = \frac{1}{\ln 2}. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ricava $x = \frac{1}{\ln 2} - 1$, che è la soluzione.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln^2(x+1) - 2 < 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > -1$. La disequazione equivale poi alla

$$\ln^2(x+1) < 2 \quad\Leftrightarrow\quad -\sqrt{2} < \ln(x+1) < \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\sqrt{2}} < x+1 < e^{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\sqrt{2}} - 1 < x < e^{\sqrt{2}} - 1.$$

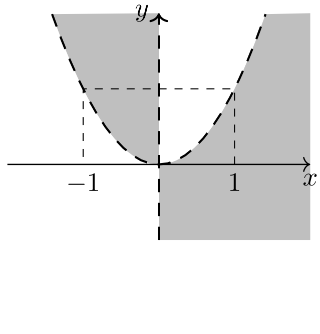
Le soluzioni sono accettabili nella condizione di esistenza. Per agevolare la comprensione del primo passaggio si ricordi che un quadrato è minore di una quantità positiva t per valori nella base compresi tra $-\sqrt{t}$ e $\sqrt{t}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x(x^2 - y) > 0$

✎

La disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y > x^2. \end{cases}$$

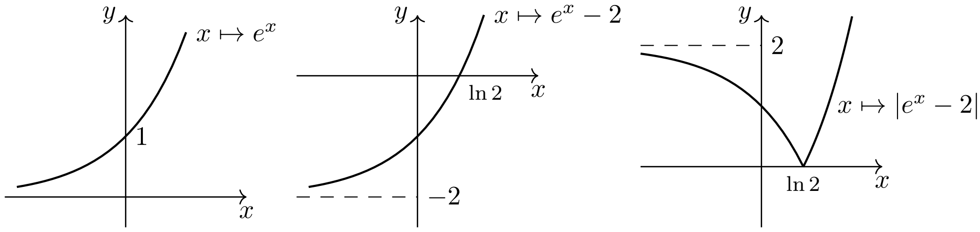


Si tratta quindi dell'insieme rappresentato in grigio qui a fianco.

Domanda 6. Aiutandosi con un grafico, determinare minimo e punto di minimo della funzione $f(x) = |e^x - 2|$

✎

Il grafico della funzione f si ottiene con trasformazioni grafiche elementari a partire dal grafico di e^x.



Il punto in cui la funzione si annulla è la soluzione dell'equazione $e^x - 2 = 0$, e quindi $x = \ln 2$. Il punto di minimo è quindi $x = \ln 2$ e il valore minimo è 0.

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\Big(\dfrac{1}{x+1}\Big) - e^{1/x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\Big(\dfrac{1}{x+1}\Big) - e^{1/x}\right) = \ln\Big(\dfrac{1}{+\infty}\Big) - e^{1/(+\infty)} = \ln 0^+ - e^0 = -\infty - 1 = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\Big(x + \dfrac{1}{\ln x}\Big)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \Big(x + \frac{1}{\ln x}\Big) + x\Big(1 - \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\Big).$$

Domanda 9. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{\frac{1}{3} \cdot 3^{2n}} = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{2}{9}\Big)^n .$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{2}{9}$. La serie converge e la somma è data dalla formula $6 \cdot \frac{1}{1-r} = 6 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{54}{7}$.

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = ye^{x/(y+1)}$

✎

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(ye^{x/(y+1)} \cdot \frac{1}{y+1} \,,\; e^{x/(y+1)} + y \cdot e^{x/(y+1)} \cdot \Big(-\frac{x}{(y+1)^2}\Big)\right) \\ &= \left(\frac{y}{y+1} e^{x/(y+1)} \,,\; \Big(1 - \frac{xy}{(y+1)^2}\Big) e^{x/(y+1)}\right). \end{aligned}$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 23/01/2015

ESERCIZIO 1. Data la funzione

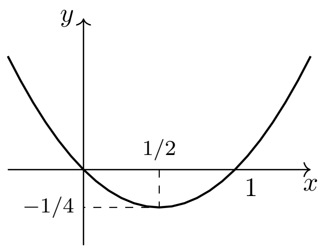
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si determini l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume e si dica se esistono punti di massimo/minimo locali o globali. Si dica infine se f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

✎

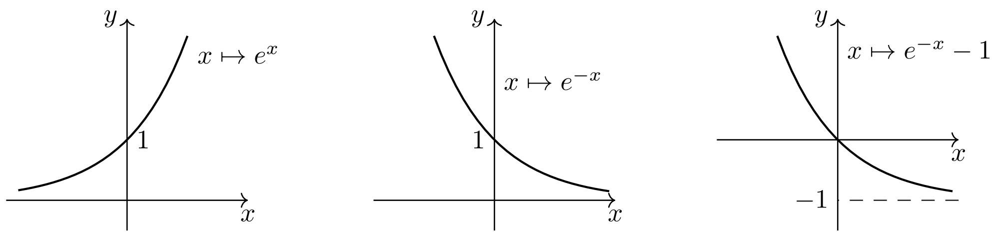
Va detto che in realtà il grafico della funzione $x \mapsto x^2 - x$, più che con le trasformazioni elementari, si ottiene più facilmente scrivendo $x^2 - x = x(x-1)$ e osservando quindi che il grafico è una parabola con concavità rivolta verso l'alto che incontra l'asse x in $x = 0$ e $x = 1$. Indico comunque anche come si possa ottenere il grafico con le trasformazioni elementari. Con il completamento del quadrato si scrive

$$x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

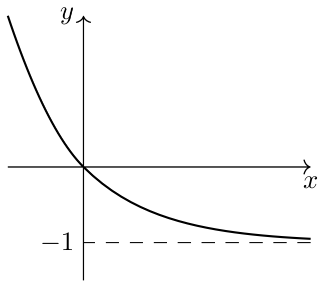


La parabola si ottiene quindi a partire dal grafico di $x \mapsto x^2$, con uno spostamento a destra di $\frac{1}{2}$ e un successivo spostamento verso il basso di $\frac{1}{4}$. Ecco il grafico qui a destra.

Le trasformazioni della funzione esponenziale e^x sono le seguenti



Il grafico della funzione f è pertanto quello qui a fianco.



Dal grafico si vede che l'immagine della funzione è l'intervallo $(-1, +\infty)$.

Ancora dal grafico si vede che non ci sono punti di massimo/minimo, né locali né globali. La motivazione può essere che la funzione è decrescente nel suo dominio.

Passiamo alla continutà e derivabilità. Dal grafico si vede che f è continua nel suo dominio, compreso il punto $x = 0$. Per motivare la cosa in modo più rigoroso dobbiamo dire quanto segue.

La funzione f è certamente continua negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$,[10] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = 0$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 0$ da sinistra, in quanto in un intorno sinistro di 0 coincide con il polinomio. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione esponenziale.

La continuità da destra è data dall'uguaglianza tra

$$f(0) = 0^2 - 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^{-x} - 1) = 0.$$

Passiamo alla derivabilità. Possiamo intanto dire, in modo simile alla continuità, che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, dato che coincide con funzioni elementari. La derivabilità in $x = 0$ va

[10] Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo aperto $(-\infty, 0)$, cioè in tutti i punti x, con $x < 0$ e nell'intervallo aperto $(0, +\infty)$, e cioè in tutti i punti x, con $x > 0$. Attenzione che non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda il punto $x = 0$, che quindi andrà studiato successivamente.

studiata a parte. Il grafico non fornisce un'evidenza che ci sia un punto di non derivabilità. Sfruttando la derivabilità per $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo[11]

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-e^{-x}) = -1.$$

Quindi f è derivabile anche in $x = 0$.

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica poi se le colonne sono generatori di $\mathbb{R}^3$ e se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio S da esse generato. Si stabilisca infine il segno della forma quadratica associata alla matrice A.

✎

Per stabilire se le righe r^1, r^2, r^3 sono linearmente dipendenti il metodo più semplice è calcolare il determinante di A (dato che le matrice è quadrata).

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{(prima riga) } 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Questo prova che le righe sono linearmente dipendenti.

Di conseguenza anche le colonne sono linearmente dipendenti e quindi non possono essere generatori di $\mathbb{R}^3$, dato che esse generano un sottospazio di dimensione al più 2.

Vediamo se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$, cioè $u^1 = (1, 0, 0)$ appartiene al sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Vediamo due modi possibili. Nel primo usiamo la definizione di sottospazio generato, cioè sottospazio delle combinazioni lineari dei vettori dati. Allora u^1 appartiene ad S se si può scrivere come combinazione lineare delle colonne. Non conviene utilizzare tutte e tre le colonne, dato che sono dipendenti: conviene usare una coppia di colonne indipendenti, ad esempio $c^1 = (2, 1, 0)$ e $c^2 = (1, 1, 1)$. Scriviamo quindi

$$u^1 = ac^1 + bc^2 \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = a(2,1,0) + b(1,1,1) \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = (2a, a, 0) + (b, b, b) \;\Leftrightarrow\; (1,0,0) = (2a + b, a + b, b).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{, che è evidentemente impossibile. Quindi } u^1 \text{ non appartiene al sottospazio } S.$$

Si poteva, in modo molto più rapido, osservare che il determinante della matrice ottenuta accostando u^1 come terza colonna a c^1 e c^2, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ e quindi } u^1 \text{ non dipende dagli altri due.}$$

Ora il segno della forma quadratica associata alla matrice A (si noti che A è simmetrica). Usiamo ovviamente il metodo dei minori principali/principali di Nord–Ovest (li indico con MP e MPNO).

[11]Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

Iniziamo con il calcolo dei MPNO:

$$\text{MPNO ordine } 1 = 2\ ,\ \text{MPNO ordine } 2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\ ,\ \text{MPNO ordine } 3 = \det A = 0 \text{ (già calcolato prima).}$$

Essendo nullo uno dei MPNO, questi non sono sufficienti per concludere. Il loro segno è compatibile con una forma semidefinita positiva. Per verificare che in effetti è così dobbiamo calcolare tutti i MP, che sono:

MP di ordine 1: 2,1,2 (elementi sulla diagonale principale).

$$\text{MP di ordine 2: } \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1, \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4, \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Pertanto è confermato che la forma quadratica è semidefinita positiva.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\big(x+y\big)\cdot\ln\big(1-x^2-y\big)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si dica se il punto $(2,-2)$ è interno, esterno o di frontiera per il dominio di f. Si calcoli la derivata parziale di f rispetto alla variabile y e si dica infine se il punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è stazionario.

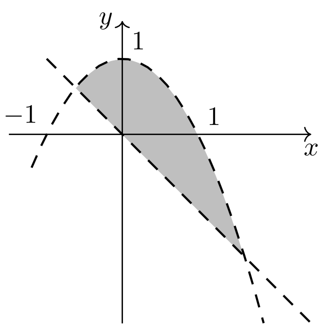
✎

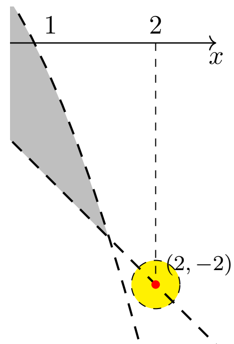
Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x+y>0 \\ 1-x^2-y>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y>-x \\ y<1-x^2. \end{cases}$$

La prima disequazione individua il semipiano aperto che sta al di sopra della bisettrice del secondo e quarto quadrante. La seconda disequazione individua la regione che sta al di sotto della parabola di equazione $y = 1-x^2$, il cui grafico si ottiene facilmente con le trasformazioni elementari. Si tratta della parabola con asse verticale, concavità verso il basso, vertice nel punto $(0,1)$ e che incontra l'asse x in $x = \pm 1$.

Il dominio di f è rappresentato qui sotto a sinistra in grigio.





Per dire se il punto $(2,-2)$, punto del quarto quadrante, è interno, esterno o di frontiera per il dominio di f possiamo procedere in diversi modi. Faccio osservare ad esempio che, essendo il dominio un insieme aperto, se il punto appartenesse al dominio allora necessariamente sarebbe un punto interno, dato che in un insieme aperto tutti i punti sono interni. Il punto $(2,-2)$ però non appartiene al dominio, dato che non soddisfa la prima disequazione.

Il punto $(2,-2)$ sta sulla bisettrice e non soddisfa nemmeno la seconda disequazione del sistema dato che $-2 < 1-4$, cioè $-2 < -3$ è falsa. Quindi il punto sta al di sopra della parabola ed è quindi un punto esterno al dominio. È raffigurato in rosso nella figura di destra e in giallo è indicato un suo intorno, tutto contenuto nell'insieme complementare del dominio, che prova che il punto è esterno.

La derivata parziale di f rispetto alla variabile y è

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}\cdot\ln\big(1-x^2-y\big) + \ln\big(x+y\big)\cdot\frac{-1}{1-x^2-y}.$$

Per dire infine se il punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è stazionario si può intanto calcolare in tale punto la derivata parziale appena trovata (se dovesse risultare diversa da zero abbiamo finito). Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot\ln\big(1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\big) - \ln\big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\big)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{4}.$$

Pertanto il punto non è stazionario.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 11/02/2015

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_1^2 \frac{e^{2/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^2 \left(-\frac{2}{x^2}\right) e^{2/x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{2/x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\big(e - e^2\big) = \frac{e}{2}\big(e-1\big).$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

✎

L'integrale si può fare per parti.

$$\begin{aligned}\int x^{-1/2}\ln x\,\mathrm{d}x &= \ln x\cdot\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - 2\int x^{1/2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x^{1/2}\ln x - 2\cdot 2x^{1/2} + c \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

Domanda 3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$, usando la definizione

✎

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\big(-e^{-x}\big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\big(-e^{-b}+1\big) = 1.$$

Domanda 4. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-n/2}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-n/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e}{e^{n/2}} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(e^{1/2})^n} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.$$

Si tratta quindi di una serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (convergente perché $|r| < 1$). La serie geometrica propriamente detta ha per somma $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$ e quindi la somma della serie data è $\frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$.

Domanda 5. Dire se converge o diverge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\ln n}{n^2+n}$

✎

Nel termine generale della serie a numeratore il logaritmo è trascurabile rispetto alla potenza, per $n \to +\infty$; a denominatore n è trascurabile rispetto ad n^2. Quindi il termine generale $\frac{\sqrt[3]{n}+\ln n}{n^2+n}$, per $n \to +\infty$, è equivalente a $\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{5/3}}$. Dato che quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = \frac{5}{3}$ e che in questo caso la serie converge, allora per il criterio del confronto converge anche la serie data.

Domanda 6. Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✎

Il determinante di A è (prima riga) $-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -2$. La matrice dei complementi algebrici di A è

$$A_{\text{ca}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice aggiunta è} \quad A^\star = A_{\text{ca}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star = -\frac{1}{2} A^\star = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Domanda 7. Calcolare i minori principali del 1° e del 2° ordine della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

✎

Ricordo che i minori principali sono i determinanti delle sottomatrici che si ottengono considerando alcune righe e le corrispondenti colonne. Pertanto i MP del 1° ordine sono gli elementi sulla diagonale principale. Quindi

$$\text{MP del 1° ordine:} \quad 2, 1, 3.$$

I MP del 2° ordine sono i determinanti delle sottomatrici 2×2 che si ottengono considerando 1ª e 2ª riga (e 1ª e 2ª colonna), 1ª e 3ª riga (e 1ª e 3ª colonna) e infine 2ª e 3ª riga (e 2ª e 3ª colonna). Quindi

$$\text{MP del 2° ordine:} \quad -2, -3, 2. \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = -3 \quad , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

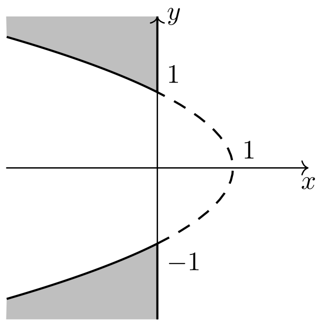
Domanda 8. Disegnare il dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{x + y^2 - 1}$

✎

Le condizioni di esistenza sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 - y^2. \end{cases}$$

Il dominio è quindi dato dai punti che stanno a sinistra dell'asse y e nello stesso tempo a destra della parabola di equazione $x = 1 - y^2$, che è una parabola con asse orizzontale coincidente con l'asse x, concavità rivolta verso sinistra e che incontra l'asse y in $y = -1$ e $y = 1$. L'insieme è raffigurato in grigio qui sotto. I punti di frontiera fanno tutti parte del dominio.



Domanda 9. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = y \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

✎

$$\nabla f(x,y) = \left(y \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}\ ,\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) = \left(\frac{y}{x}\ ,\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right).$$

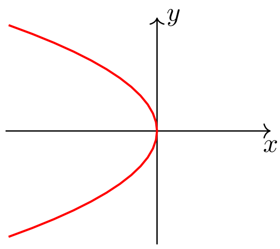
Domanda 10. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y^2+1}$

✎

Si tratta dei punti del piano che sono soluzioni dell'equazione $f(x,y) = -1$, cioè

$$\frac{x-1}{y^2+1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{y^2+1} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1+y^2+1}{y^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y^2.$$

Si tratta dei punti della parabola con asse orizzontale, concavità verso sinistra e vertice nell'origine rappresentata in rosso qui sotto.



Si noti che la funzione f è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto il denominatore y^2+1 non si annulla mai, e quindi tutti i punti della parabola sono accettabili.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 13/02/2015

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = xe^{-x^2}$$
se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Si calcoli poi l'integrale generalizzato di f nell'intervallo $[0, +\infty)$. Si stabilisca infine se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\sqrt{n}\right)$ converge o diverge.

✎

L'integrale indefinito è
$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$
Calcoliamo con la definizione l'integrale generalizzato.
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^b\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$
Infine la serie.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\sqrt{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^n}.$$
Il termine generale tende a zero (confronto standard) e quindi la serie può convergere.

Per studiare se la serie converge o diverge possiamo usare il criterio del rapporto. Indicando con $a_n = \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ il termine generale della serie, calcoliamo il
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{e^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^n\sqrt{n+1}}{e^{n+1}\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{e\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}.$$
Pertanto, essendo il limite minore di 1, per il criterio del rapporto la serie converge.

ESERCIZIO 2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
si stabilisca se le sue righe e le sue colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. È vero che ogni colonna si può scrivere come combinazioni lineari delle altre tre? Si scrivano le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ indicando poi la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni trovate.

✎

Anzitutto possiamo affermare che le colonne sono linearmente dipendenti, dato che si tratta di 4 vettori in $\mathbb{R}^3$.[12]

Per stabilire se le righe r^1, r^2, r^3 sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati. Vediamo entrambi i metodi.

Con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di r^1, r^2, r^3 e poniamola uguale al vettore nullo.
$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(0, 0, 0, 1) + c(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$
Questo significa
$$(0, a, -a, 0) + (0, 0, 0, b) + (c, -c, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (c, a - c, -a, b) = (0, 0, 0, 0).$$

[12] Ricordo che un insieme formato da più vettori di quella che è la dimensione dello spazio al quale essi appartengono è sicuramente un insieme di vettori dipendenti, dato che la dimensione è appunto il massimo numero di vettori indipendenti che si possono trovare in quello spazio.

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto le righe sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Potevamo in alternativa affermare che le tre righe risultano indipendenti se e solo se il rango di A è 3. La sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne (in grigio) ha determinante uguale a 1 e quindi il rango di A è 3 e pertanto le sue righe sono l.i.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per rispondere alla domanda se è vero che ogni colonna si può scrivere come combinazione lineare delle altre tre segnalo anzitutto un possibile equivoco che porta a dare la risposta errata. In generale dei vettori sono dipendenti se e solo se almeno uno si può scrivere come combinazione lineare degli altri. *Almeno uno*, non tutti! Quindi la risposta non è automaticamente sì.

Faccio ora osservare questo: la risposta è sì per tutte le colonne per cui si verifica che il minore di ordine 3 che si ottiene eliminando quella colonna è diverso da zero, in quanto certamente quella colonna dipende dalle altre. Si può verificare facilmente che quanto appena detto accade per le prime tre colonne, che quindi si possono scrivere come combinazione lineare delle altre. Per l'ultima colonna invece si ha intanto che il minore formato con le altre è nullo (e questo sarebbe da solo sufficiente per dare risposta negativa alla domanda, in quanto il rango è 3). Ma possiamo anche esplicitamente osservare che la quarta colonna non può essere combinazione lineare delle prime tre in quanto la sua seconda componente è diversa da zero, mentre le seconde componenti delle altre tre colonne che sono nulle.

Passiamo al sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Esso è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ t = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Potremmo senz'altro risolverlo molto velocemente per sostituzione,[13] ma fornisco comunque la risoluzione attraverso la regola di Cramer. Osservando che il minore ottenuto con le ultime 3 colonne è diverso da zero, possiamo far diventare parametro la variabile x. Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ t = 0 \\ -y = -x \end{cases} \quad \text{con matrici} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -x \end{array}\right).$$

In base alla regola di Cramer (il determinante della matrice incompleta è 1) le componenti della soluzione sono

$$y = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \;;\; z = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \end{pmatrix} = x \;;\; t = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x \end{pmatrix} = 0.$$

Le soluzioni sono pertanto date dallo spazio

$$S = \Big\{(x, x, x, 0) \;:\; x \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{x(1, 1, 1, 0) \;:\; x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Una base di S è evidentemente il vettore $(1, 1, 1, 0)$ e quindi la sua dimensione è 1.

Si osservi che le soluzioni ottenute con Cramer, a parte la loro diversa espressione in funzione di x anziché di y, coincidono con quelle ottenute in nota con un procedimento di sostituzione.

[13] Esprimendo tutto in funzione di y, il sistema equivale a $\begin{cases} z = y \\ t = 0 \\ x = y \end{cases}$ e quindi le soluzioni si possono scrivere come i vettori del tipo $\big(y, y, y, 0\big)$, con $y \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\left(2x^2 + 2xy + y^2\right) - \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio (si osservi che l'argomento del primo logaritmo è una forma quadratica e se ne tenga conto nello studio del segno). Si dica se sugli assi cartesiani ci sono punti in cui la funzione si annulla. Si calcoli infine la derivata parziale di f rispetto alla variabile x.

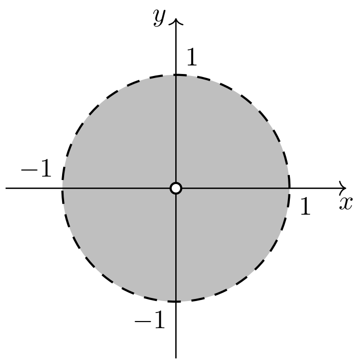
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

La seconda disequazione individua il cerchio (aperto) di centro l'origine e raggio 1. Per lo studio della prima disequazione abbiamo il suggerimento di considerare che il polinomio è una forma quadratica, per le quali abbiamo un metodo generale per lo studio del segno. La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ che è evidentemente definita positiva.}^{14}$$



Questo significa che il polinomio argomento del primo logaritmo è sempre positivo, ad eccezione dell'origine, in cui si annulla. Pertanto dobbiamo escludere dal dominio l'origine. Il dominio è quindi il cerchio aperto privato del centro. La regione è quella rappresentata qui a fianco in grigio.

Per stabilire se sugli assi cartesiani ci sono punti in cui la funzione si annulla possiamo scrivere le restrizioni di f lungo gli assi e vedere se le espressioni ottenute si possono annullare.

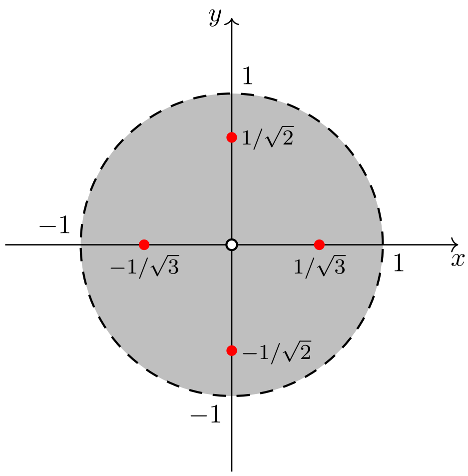
Lungo l'asse x abbiamo $f\big|_{y=0} = \ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1 - x^2\right)$ e quindi

$$\ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1 - x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2\right) = \ln\left(1 - x^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Lungo l'asse y abbiamo invece $f\big|_{x=0} = \ln\left(y^2\right) - \ln\left(1 - y^2\right)$ e quindi

$$\ln\left(y^2\right) - \ln\left(1 - y^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(y^2\right) = \ln\left(1 - y^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Quindi ci sono sugli assi quattro punti in cui la funzione si annulla: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.[15] e sono indicati in rosso nella figura a fianco.

Infine la derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x + 2y}{2x^2 + 2xy + y^2} - \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2}.$$

[14] I minori principali di NW sono 2 e 1, quindi tutti positivi.

[15] Si noti che sono tutti accettabili in quanto appartengono al dominio della funzione.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 11/02/2015

Domanda 1. Determinare gli zeri del polinomio $P(x) = (x^3 - 2x)(x^3 + 3)$

✎

Possiamo scrivere, raccogliendo x nel primo fattore,

$$P(x) = x(x^2 - 2)(x^3 + 3).$$

Il primo fattore si annulla per $x = 0$, il secondo per $x = \pm\sqrt{2}$ e il terzo se

$$x^3 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{3}.$$

Quindi gli zeri sono: $0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

✎

Possiamo anzitutto semplificare per $x + 1$ e poi fare un denominatore comune sulla differenza. Si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2x}{2x(x+1)}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2e^x = e^{2x} - 3$$

✎

Possiamo riscrivere l'equazione in

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \quad \text{che, con il cambio di variabile } e^x = t, \text{ diventa} \quad t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Questa equivale a $(t + 1)(t - 3) = 0$ e quindi ha soluzioni $t = -1$ oppure $t = 3$. Queste equivalgono a

$$e^x = -1 \quad \vee \quad e^x = 3.$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione $x = \ln 3$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\Big(\ln(x+1)\Big)^2 > 0$$

✎

Anzitutto c'è la condizione di esistenza $x + 1 > 0$, cioè $x > -1$. Poi si ricordi che un quadrato è strettamente positivo se e solo se la base è diversa da zero.[16]

Pertanto la nostra disequazione equivale a $\ln(x + 1) \neq 0$, cioè $x + 1 \neq 1$, cioè $x \neq 0$. Quindi le soluzioni sono i valori maggiori di -1, ma diversi da zero, cioè l'insieme $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

[16] Quindi in generale

$$A^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \neq 0.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^3 + x^2 y < 0$

✎

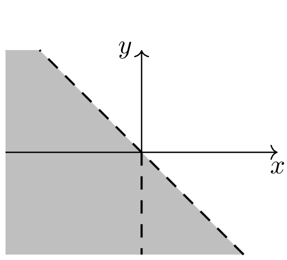
La disequazione equivale a $x^2(x + y) < 0$. Questa equivale ai sistemi (il prodotto positivo si ha quando i due fattori sono di segno opposto)

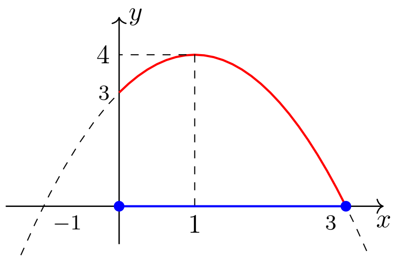
$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 < 0 \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile, dato che un quadrato non può mai essere negativo. Nel primo sistema attenzione: la prima disequazione è analoga a quella dell'esercizio precedente ($x^2 > 0$ equivale ad $x \neq 0$) e quindi il sistema significa

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y < -x, \end{cases}$$

che definisce nel piano la regione che sta al di sotto della bisettrice del secondo e quarto quadrante, ad eccezione dei punti che stanno sull'asse verticale. L'insieme è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.





Domanda 6. Dopo averne disegnato un grafico determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$ nell'intervallo $[0, 3]$

✎

Si tratta di una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che incontra l'asse x nei punti di ascissa -1 e 3. Il grafico è qui sopra a destra.

Dal grafico si vede che in corrispondenza dei punti dell'intervallo $[0, 3]$ la funzione assume sull'asse y i valori da zero (in $x = 3$) a $f(1) = 4$, quindi il minimo è 0 e il massimo è 4 (sono valori sulle y).

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{\ln(x^2)}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{\ln(x^2)} = \frac{e^{-(-\infty)^2}}{\ln((-\infty)^2)} = \frac{e^{-\infty}}{\ln(+\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0 \quad (\text{precisamente } 0^+).$$

Domanda 8. Determinare una funzione che abbia per derivata $f(x) = x^2 \ln x$

✎

La domanda significa in pratica trovare una primitiva di $f(x) = x^2 \ln x$. Quindi dobbiamo fare l'integrale. Integrando per parti si ha

$$\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Faccio osservare che ho aggiunto (per correttezza formale) la costante di integrazione c anche se la richiesta era di *una* primitiva e non di *tutte* le primitive.

Domanda 9. Calcolare i minori principali del 1° e del 2° ordine della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

✎

I minori principali di ordine k di una matrice simmetrica sono dati dai determinanti delle sottomatrici $k \times k$ che si possono ottenere scegliendo k righe *e le corrispondenti colonne*.

Quindi i minori del primo ordine sono gli elementi sulla diagonale e cioè: 1, 3, 2.

I minori del secondo ordine si ottengono dai determinanti delle seguenti sottomatrici 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

e sono quindi: 2, -2, -3.

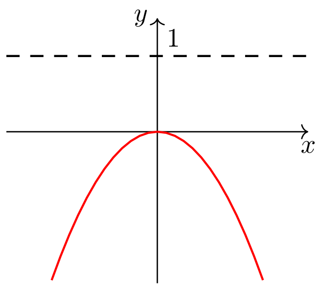
Domanda 10. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 1}{y - 1}$

✎

Si tratta delle soluzione dell'equazione $f(x, y) = -1$.

$$\frac{x^2+1}{y-1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{y-1} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1+y-1}{y-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x^2.$$

Si tratta dei punti della parabola con concavità verso il basso e vertice nell'origine. Si noti che la funzione non è definita sui punti della retta di equazione $y = 1$, ma che la curva di livello non interseca questa retta.



ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 11/02/2015

Domanda 1. Determinare gli zeri del polinomio $P(x) = (x^3 + 2)(x^3 - 3x)$

✎

Possiamo scrivere, raccogliendo x nel secondo fattore,

$$P(x) = x(x^3 + 2)(x^2 - 3).$$

Il primo fattore si annulla per $x = 0$, il terzo per $x = \pm\sqrt{3}$ e il secondo se

$$x^3 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{2}.$$

Quindi gli zeri sono: $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt[3]{2}$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x} - (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

✎

Possiamo anzitutto semplificare per $\sqrt{x}$ e poi fare un denominatore comune sulla differenza. Si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \left(\sqrt{x} - (x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \cdot \frac{2x - x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x(x-1)}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2 \ln x = \ln^2 x - 3$$

✎

Anzitutto osserviamo che c'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi possiamo riscrivere l'equazione come

$$\ln^2 x - 2 \ln x - 3 = 0 \quad \text{che, con il cambio di variabile } \ln x = t \text{, diventa} \quad t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Questa equivale a $(t + 1)(t - 3) = 0$ e quindi ha soluzioni $t = -1$ oppure $t = 3$. Queste equivalgono a

$$\ln x = -1 \quad \vee \quad \ln x = 3.$$

La prima fornisce la soluzione $x = \frac{1}{e}$ e la seconda la soluzione $x = e^3$, entrambe accettabili.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\Big(1 + \ln x\Big)^2 > 0$$

✎

Anzitutto c'è la condizione di esistenza $x > 0$. Poi si ricordi che un quadrato è strettamente positivo se e solo se la base è diversa da zero.[17]

Pertanto la nostra disequazione equivale a $1 + \ln x \neq 0$, cioè $\ln x \neq -1$, cioè $x \neq \frac{1}{e}$. Quindi le soluzioni sono i valori positivi, ma diversi da $\frac{1}{e}$, cioè l'insieme $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

---

[17] Quindi in generale

$$A^2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \neq 0.$$

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $y^3 + xy^2 < 0$

✎

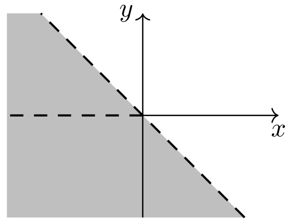
La disequazione equivale a $y^2(y + x) < 0$. Questa equivale ai sistemi (il prodotto positivo si ha quando i due fattori sono di segno opposto)

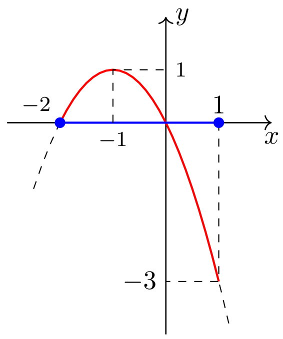
$$\begin{cases} y^2 > 0 \\ y + x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y^2 < 0 \\ y + x > 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile, dato che un quadrato non può mai essere negativo. Nel primo sistema attenzione: la prima disequazione è analoga a quella dell'esercizio precedente ($y^2 > 0$ equivale ad $y \neq 0$) e quindi il sistema significa

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y < -x, \end{cases}$$

che definisce nel piano la regione che sta al di sotto della bisettrice del secondo e quarto quadrante, ad eccezione dei punti che stanno sull'asse orizzontale. L'insieme è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.





Domanda 6. Dopo averne disegnato un grafico determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $f(x) = -x(x + 2)$ nell'intervallo $[-2, 1]$

✎

Si tratta di una parabola con asse verticale, concavità rivolta verso il basso, che incontra l'asse x nei punti di ascissa -2 e 0. Il grafico è qui sopra a destra.

Dal grafico si vede che, relativamente all'intervallo $[-2, 1]$, l'estremo superiore è il valore massimo della funzione, cioè $f(-1) = 1$, mentre l'estremo inferiore è $f(1) = -3$.

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - e^{-x^2}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - e^{-x^2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{1 - e^{-\infty}} = \frac{\ln 0^+}{1 - 0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$$

Domanda 8. Determinare una funzione che abbia per derivata $f(x) = x^3 \ln x$

✎

La domanda significa in pratica trovare una primitiva di $f(x) = x^3 \ln x$. Quindi dobbiamo fare l'integrale. Integrando per parti si ha

$$\ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c.$$

Faccio osservare che ho aggiunto (per correttezza formale) la costante di integrazione c anche se la richiesta era di *una* primitiva e non di *tutte* le primitive.

Domanda 9. Calcolare i minori principali del 1° e del 2° ordine della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

✎

I minori principali di ordine k di una matrice simmetrica sono dati dai determinanti delle sottomatrici $k \times k$ che si possono ottenere scegliendo k righe *e le corrispondenti colonne*.

Quindi i minori del primo ordine sono gli elementi sulla diagonale e cioè: 2, 1, 3.

I minori del secondo ordine si ottengono dai determinanti delle seguenti sottomatrici 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e sono quindi: -2, -3, 2.

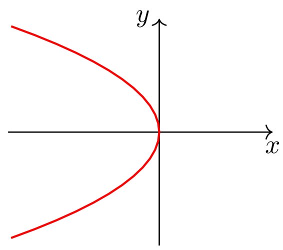
Domanda 10. Disegnare la curva di livello -1 della funzione $f(x, y) = \dfrac{x-1}{y^2+1}$

✎

Si tratta delle soluzione dell'equazione $f(x, y) = -1$.

$$\frac{x-1}{y^2+1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{y^2+1} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1+y^2+1}{y^2+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y^2.$$

Si tratta dei punti della parabola con asse orizzontale, concavità verso sinistra e vertice nell'origine.



ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 13/02/2015

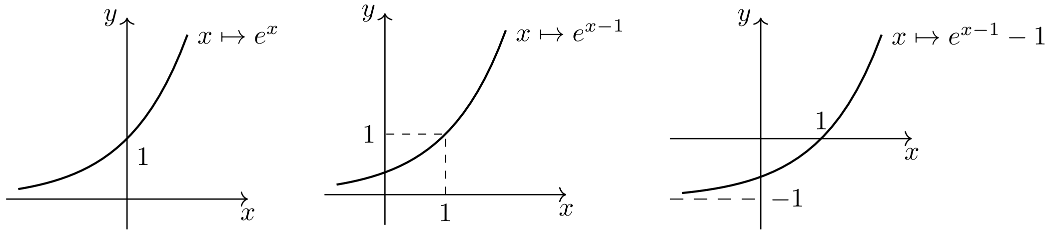
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & x < 1 \\ |\ln x| & x \geq 1, \end{cases}$$

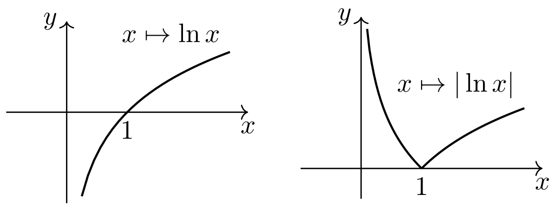
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si provi che ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0, e]$ e si verifichi la tesi. Si provi infine che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

✎

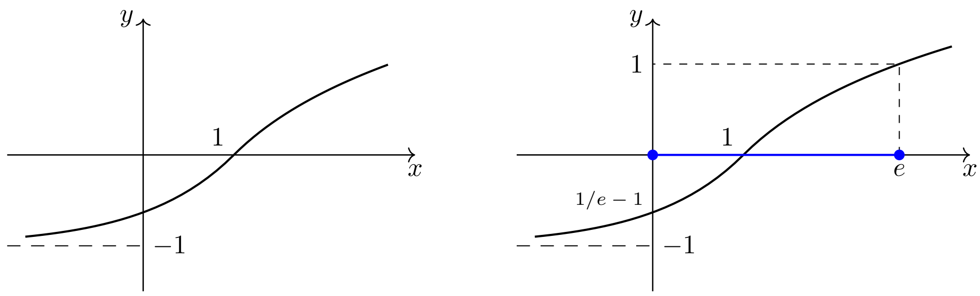
Le trasformazioni della funzione esponenziale e^x sono le seguenti



La trasformazione della funzione logaritmica è questa



Pertanto il grafico della funzione f è quello qui sotto a sinistra. Nella figura a destra è evidenziato in blu l'intervallo in cui poi si chiede di applicare il teorema di Weierstrass.



Il teorema di Weierstrass è applicabile se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato. L'intervallo $[0, e]$ è chiuso e limitato per definizione. Il grafico mostra che la funzione f è continua, ma verifichiamolo esplicitamente con la definizione. Si ha

$$f(1) = \ln 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(e^{x-1} - 1\right) = 0.$$ [18]

Verificare la tesi del teorema significa constatare che nell'esempio dato è vero quanto la tesi afferma.

La tesi del teorema è che la funzione f nell'intervallo $[0, e]$ assume i valori del suo estremo inferiore e del suo estremo superiore in tale intervallo, o equivalentemente che f ha in $[0, e]$ un punto di massimo e un punto di minimo (globali).

[18] Ricordo che possiamo affermare che la funzione f è per definizione continua da destra, in quanto in un intorno destro di 1 coincide con la funzione elementare logaritmica. Quindi è sufficiente verificare la continuità da sinistra. Faccio notare che da sinistra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione logaritmica, mentre a sinistra del punto essa coincide con la funzione esponenziale.

Possiamo osservare che f è crescente in tutto $\mathbb{R}$ e quindi in $[0, e]$. Pertanto gli estremi della funzione sono rispettivamente i valori assunti agli estremi dell'intervallo, cioè $f(0) = \frac{1}{e} - 1$ ed $f(e) = 1$ e che quindi i punti di minimo e di massimo sono rispettivamente $x_m = 0$ e $x_M = e$.

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe e le sue colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. È vero che ogni colonna si può scrivere come combinazione lineare delle altre tre? Si scrivano le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ indicando poi la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni trovate.

✎

Anzitutto possiamo affermare che le colonne sono linearmente dipendenti, dato che si tratta di 4 vettori in $\mathbb{R}^3$.[19]

Per stabilire se le righe r^1, r^2, r^3 sono linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo a disposizione due possibili modi: usare la definizione oppure servirsi del concetto di rango e dei suoi svariati significati. Vediamo entrambi i metodi.

Con la definizione. Formiamo una combinazione lineare di r^1, r^2, r^3 e poniamola uguale al vettore nullo.

$$ar^1 + br^2 + cr^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad a(0, 1, -1, 0) + b(0, 0, 0, 1) + c(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Questo significa

$$(0, a, -a, 0) + (0, 0, 0, b) + (c, -c, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{cioè} \quad (c, a - c, -a, b) = (0, 0, 0, 0).$$

Questa equivale al sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad a = b = c = 0.$$

Pertanto le righe sono linearmente indipendenti, in base alla definizione.

Potevamo in alternativa affermare che le tre righe risultano indipendenti se e solo se il rango di A è 3. La sottomatrice formata dalle ultime 3 colonne (in grigio) ha determinante uguale a 1 e quindi il rango di A è 3 e pertanto le sue righe sono l.i.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per rispondere alla domanda se è vero che ogni colonna si può scrivere come combinazione lineare delle altre tre segnalo anzitutto un possibile equivoco che porta a dare la risposta errata. In generale dei vettori sono dipendenti se e solo se almeno uno si può scrivere come combinazione lineare degli altri. *Almeno uno*, non tutti! Quindi la risposta non è automaticamente sì.

Faccio ora osservare questo: la risposta è sì per tutte le colonne per cui si verifica che il minore di ordine 3 che si ottiene eliminando quella colonna è diverso da zero, in quanto certamente quella colonna dipende dalle altre. Si può verificare facilmente che quanto appena detto accade per le prime tre colonne, che quindi si possono scrivere come combinazione lineare delle altre. Per l'ultima colonna invece si ha intanto che il minore formato con le altre è nullo (e questo sarebbe da solo sufficiente per dare risposta negativa alla domanda, in quanto il rango è 3). Ma possiamo anche esplicitamente osservare che la quarta colonna non può essere combinazione lineare delle prime tre in quanto la sua seconda componente è diversa da zero, mentre le seconde componenti delle altre tre colonne che sono nulle.

Passiamo al sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Esso è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ t = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

[19]Ricordo che un insieme formato da più vettori di quella che è la dimensione dello spazio al quale essi appartengono è sicuramente un insieme di vettori dipendenti, dato che la dimensione è appunto il massimo numero di vettori indipendenti che si possono trovare in quello spazio.

Potremmo senz'altro risolverlo molto velocemente per sostituzione,[20] ma fornisco comunque la risoluzione attraverso la regola di Cramer. Osservando che il minore ottenuto con le ultime 3 colonne è diverso da zero, possiamo far diventare parametro la variabile x. Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ t = 0 \\ -y = -x \end{cases} \qquad \text{con matrici} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -x \end{array}\right).$$

In base alla regola di Cramer (il determinante della matrice incompleta è 1) le componenti della soluzione sono

$$y = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -x & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \ ; \ z = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \end{pmatrix} = x \ ; \ t = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x \end{pmatrix} = 0.$$

Le soluzioni sono pertanto date dallo spazio

$$S = \Big\{(x, x, x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{x(1, 1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Una base di S è evidentemente il vettore $(1, 1, 1, 0)$ e quindi la sua dimensione è 1.

Si osservi che le soluzioni ottenute con Cramer, a parte la loro diversa espressione in funzione di x anziché di y, coincidono con quelle ottenute in nota con un procedimento di sostituzione.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(2x^2 + 2xy + y^2\right) - \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio (si osservi che l'argomento del primo logaritmo è una forma quadratica e se ne tenga conto nello studio del segno). Si dica se sugli assi cartesiani ci sono punti in cui la funzione si annulla. Si calcoli infine la derivata parziale di f rispetto alla variabile x.

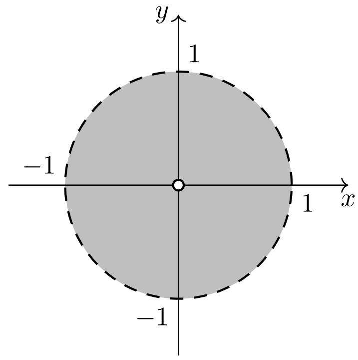
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

La seconda disequazione individua il cerchio (aperto) di centro l'origine e raggio 1. Per lo studio della prima disequazione abbiamo il suggerimento di considerare che il polinomio è una forma quadratica, per le quali abbiamo un metodo generale per lo studio del segno. La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ che è evidentemente definita positiva.}^{21}$$



Questo significa che il polinomio argomento del primo logaritmo è sempre positivo, ad eccezione dell'origine, in cui si annulla. Pertanto dobbiamo escludere dal dominio l'origine. Il dominio è quindi il cerchio aperto privato del centro. La regione è quella rappresentata qui sotto in grigio.

Per stabilire se sugli assi cartesiani ci sono punti in cui la funzione si annulla possiamo scrivere le restrizioni di f lungo gli assi e vedere se le espressioni ottenute si possono annullare.

Lungo l'asse x abbiamo $f\big|_{y=0} = \ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1 - x^2\right)$ e quindi

$$\ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1 - x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2\right) = \ln\left(1 - x^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

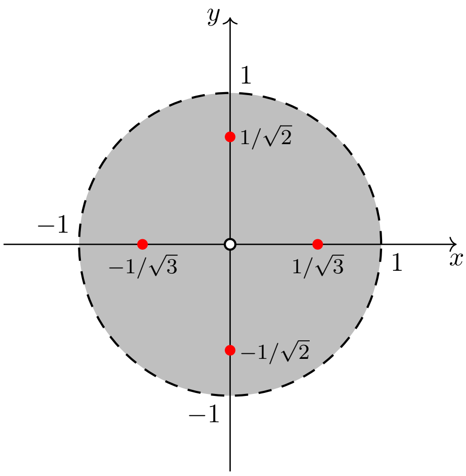
Lungo l'asse y abbiamo invece $f\big|_{x=0} = \ln\left(y^2\right) - \ln\left(1 - y^2\right)$ e quindi

$$\ln\left(y^2\right) - \ln\left(1 - y^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(y^2\right) = \ln\left(1 - y^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[20] Esprimendo tutto in funzione di y, il sistema equivale a $\begin{cases} z = y \\ t = 0 \\ x = y \end{cases}$ e quindi le soluzioni si possono scrivere come i vettori del tipo $\left(y, y, y, 0\right)$, con $y \in \mathbb{R}$.

[21] I minori principali di NW sono 2 e 1, quindi tutti positivi.

Quindi ci sono sugli assi quattro punti in cui la funzione si annulla:
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.[22] e sono indicati in rosso nella figura qui sotto.



Infine la derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x + 2y}{2x^2 + 2xy + y^2} - \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2}.$$

[22] Si noti che sono tutti accettabili in quanto appartengono al dominio della funzione.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 22/06/2015

Domanda 1. Scomporre in fattori il polinomio $P(x) = x^5 - x^4 + x - 1$

Possiamo usare un doppio raccoglimento:

$$x^5 - x^4 + x - 1 = x^4(x-1) + x - 1 = (x-1)(x^4+1).$$

Alternativamente, dopo aver osservato che $P(1) = 0$, si può effettuare la divisione (con la regola di Ruffini) del polinomio per $x - 1$.

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $e^{1/x} - e^{x-1/x}$ raccogliendo $e^{1/x}$

$$e^{1/x} - e^{x-1/x} = e^{1/x}\left(1 - e^{x-1/x-1/x}\right) = e^{1/x}\left(1 - e^{x-2/x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$e^{2x} - e^x = 6$$

Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad una di secondo grado. Possiamo riscrivere l'equazione nella

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad \text{che, con il cambio di variabile } e^x = t, \text{ diventa} \quad t^2 - t - 6 = 0.$$

Questa equivale a $(t+2)(t-3) = 0$ e quindi ha soluzioni $t = -2$ oppure $t = 3$. Queste equivalgono a

$$e^x = -2 \quad \vee \quad e^x = 3.$$

La prima è impossibile e la seconda fornisce l'unica soluzione $x = \ln 3$.

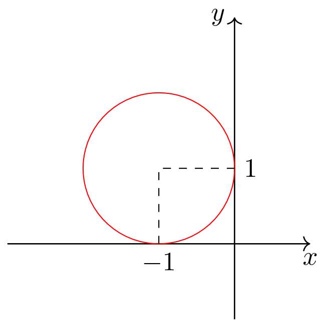
Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$2\ln(x+1) - 1 < 0$$

La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x+1 > 0 \text{ (C.E.)} \\ \ln(x+1) < \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ x+1 < e^{1/2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ x < e^{1/2} - 1. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $-1 < x < e^{1/2} - 1$, cioè l'intervallo $S = (-1, e^{1/2} - 1)$.



Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

Usiamo il completamento del quadrato sulle x e sulle y. L'equazione diventa

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + 1 = 2 \quad \iff \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1,$$

che individua la circonferenza di centro il punto $(-1, 1)$ e raggio 1, raffigurata qui sopra.

Domanda 6. Determinare l'espressione della funzione inversa di $f(x) = 2\ln(x+1)$

Ponendo per comodità $f(x) = y$ e ricavando x in funzione di y si ottiene:

$$y = 2\ln(x+1) \quad \iff \quad \ln(x+1) = \frac{y}{2} \quad \iff \quad x + 1 = e^{y/2} \quad \iff \quad x = e^{y/2} - 1.$$

L'espressione della funzione inversa di f è quindi $f^{-1}(y) = e^{y/2} - 1$.

Domanda 7. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{\ln(x^2)}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{\ln(x^2)} = \frac{e^{1/0^-}}{\ln(0^-)^2} = \frac{e^{-\infty}}{\ln(0^+)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$ (precisamente 0^-).

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

✎

$$f'(x) = 1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,\mathrm{d}x$

✎

Si può osservare che la derivata di $\frac{1}{x}$ è $-\frac{1}{x^2}$ e quindi moltiplicando "dentro e fuori l'integrale" per -1 si ottiene un integrale quasi immediato del tipo $\int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$.

$$\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,\mathrm{d}x = -\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}\,\mathrm{d}x = -e^{1/x} + c.$$

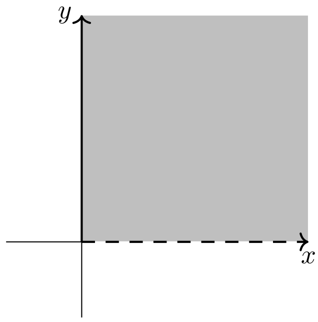
Domanda 10. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x} + \ln y$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

e quindi il dominio è dato dal primo quadrante, compresi i punti che stanno sull'asse y ma esclusi quelli sull'asse x.



ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 24/06/2015

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = x + \ln(1 - x)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si studi il segno di questa. Con le informazioni ottenute si disegni un possibile grafico di f. Si dica se la funzione è invertibile in tutto il suo dominio e, in caso negativo, si indichi un intervallo in cui è invertibile. Si studi infine se la funzione è concava o convessa nel suo dominio.

✎

La condizione di esistenza è $1 - x > 0$, cioè $x < 1$. Quindi il dominio di f è l'intervallo $(-\infty, 1)$.

I limiti significativi sono pertanto $-\infty$ e 1 da sinistra.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + \ln(1 - 1^-) = 1 + \ln(0^+) = 1 - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - \ln(+\infty) = -\infty + \infty \text{ (forma indeterminata).}$$

La forma indeterminata si può risolvere o osservando che la funzione logaritmica è trascurabile rispetto ad x (e quindi il limite è $-\infty$), oppure con un raccoglimento e una successiva applicazione della regola di De l'Hôpital.

$$\lim_{x \to -\infty} \big[x + \ln(1 - x)\big] = \lim_{x \to -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(1 - x)}{x}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 - x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - 1} = 0,$$

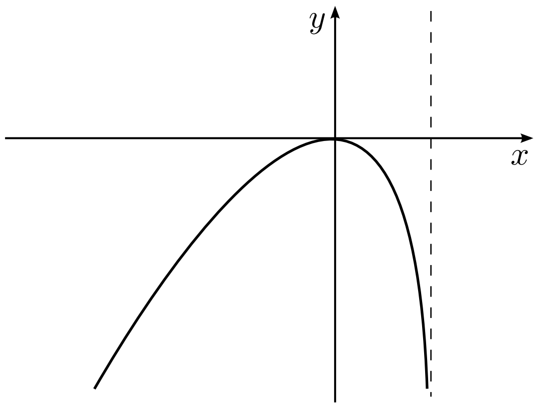
da cui appunto si ricava che il limite è $-\infty$.

La derivata di f è

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 - x} \cdot (-1) = \frac{1 - x - 1}{1 - x} = \frac{x}{x - 1}.$$

La derivata si annulla in $x = 0$ (punto stazionario) e si trova facilmente che è positiva in $(-\infty, 0)$ e negativa in $(0, 1)$. Pertanto la funzione f è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, 1)$ e quindi $x = 0$ è punto di massimo (globale).

Un possibile grafico è riportato qui sotto. Per un grafico più preciso è bene anche osservare che $f(0) = 0$ e quindi 0 è il valore massimo della funzione.



La funzione f non è invertibile in tutto il dominio, dato che non è iniettiva. Possiamo affermare che è invertibile invece (essendo monotona) in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1)$ (o in ogni sottointervallo contenuto in uno dei due).

Per dire se la f è concava o convessa calcoliamo e studiamo il segno della derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \frac{x - 1 - x}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{(x - 1)^2},$$

che risulta negativa in tutto il dominio di f. Quindi la funzione f è concava, come il grafico già raffigurava.

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si calcoli $A \cdot A^T$ e si verifichi che sia A sia $A \cdot A^T$ hanno rango 2. Si trovino poi le soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ e si dica se uno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^4$ è una delle soluzioni del sistema.

✎

Si ha

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proviamo che il rango è 2 sia per A sia per $A \cdot A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A non può avere rango 3 in quanto le prime due righe sono proporzionali (opposte in particolare). Il rango è 2 poiché (ad esempio) il minore che si ottiene eliminando la 1ª riga e la 3ª e 4ª colonna è diverso da zero.

La matrice $A \cdot A^T$ analogamente non può avere rango 3 in quanto le prime due righe sono proporzionali (opposte anche in questo caso) e il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero. Quindi anche $A \cdot A^T$ ha rango 2.

Passiamo al sistema omogeneo $Ax = 0$, cioè il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Per risolverlo usiamo il metodo generale, che lo riduce ad un sistema quadrato con parametri, il quale si risolve poi in genere con la regola di Cramer.

Anzitutto osservo che le prime due equazioni sono dipendenti e quindi elimino la seconda. Successivamente posso osservare (è bene comunque fare questa osservazione prima di modificare il sistema) che è lecito esprimere x_1 e x_2 in funzione di x_3 e x_4 dato che la sottomatrice relativa a x_1 e x_2 ha determinante diverso da zero. Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Qui chiaramente non serve la regola di Cramer, dato che le due variabili sono già espresse ciascuna in funzione dei parametri. Le soluzioni possono essere scritte pertanto come l'insieme

$$S = \Big\{ (a, a + b, a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \Big\}.$$

L'ultima domanda è se uno dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^4$ è una di queste soluzioni. La risposta è no. Infatti

$$\begin{aligned} u^1 &= (1,0,0,0) \notin S \quad \text{(avremmo } a = 1 \text{ e contemporaneamente } a = 0); \\ u^2 &= (0,1,0,0) \notin S \quad \text{(avremmo } a = b = 0 \text{ e contemporaneamente } a + b = 1); \\ u^3 &= (0,0,1,0) \notin S \quad \text{(avremmo } a = 1 \text{ e contemporaneamente } a = 0); \\ u^4 &= (0,0,0,1) \notin S \quad \text{(avremmo } a = 0,\ b = 1 \text{ e contemporaneamente } a + b = 0). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{2x - y} - \sqrt{y - x^2 + 2x}$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si indichi nel dominio la regione in cui la funzione è positiva e i punti in cui si annulla. Si calcoli la derivata parziale di f rispetto alla variabile x e si dica se il punto $(1, 0)$ può essere stazionario.

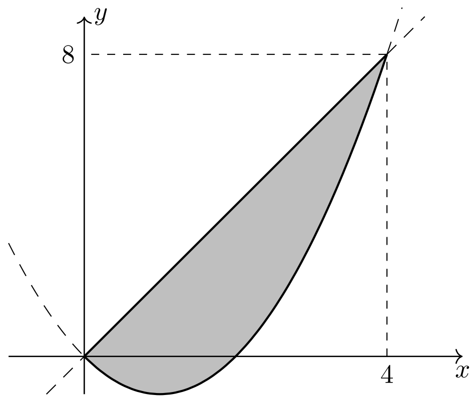
✎

Le condizioni di esistenza della funzione f sono date dal sistema

$$\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y - x^2 + 2x \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq x(x-2). \end{cases}$$

La prima disequazione individua il semipiano al di sotto della retta per l'origine di pendenza 2 e la seconda la regione ad di sopra della parabola con la concavità verso l'alto che passa per i punti dell'asse x di ascissa 0 e 2. La retta e la parabola si incontrano, oltre che nell'origine, nel punto $(4, 8)$.

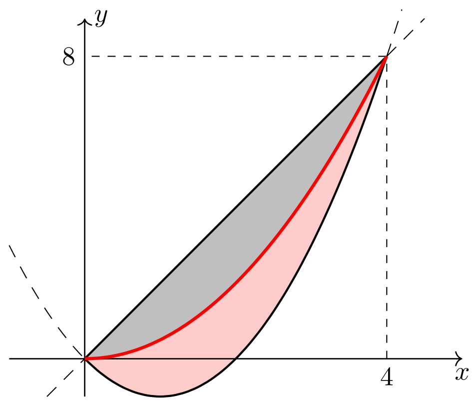
Il dominio di f è raffigurato in grigio qui sotto.



La funzione è positiva se e solo se

$$2x - y > y - x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2y < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y < \frac{x^2}{2},$$

quindi nel sottoinsieme del dominio che sta al di sotto della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2}$. Si osservi che questa parabola, oltre che per l'origine, passa come l'altra per il punto $(4, 8)$. La funzione si annulla sui punti della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2}$. La figura a fianco rappresenta in rosso i punti in cui la f si annulla e in rosa i punti in cui è positiva.



La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2\sqrt{2x - y}} - \frac{-2x + 2}{2\sqrt{y - x^2 + 2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x - y}} + \frac{x - 1}{\sqrt{y - x^2 + 2x}}.$$

Il punto $(1, 0)$, che è interno al dominio, non può essere stazionario in quanto risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi il gradiente di f in $(1, 0)$ non si annulla.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 24/08/2015

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^3 + 6x - 7$

✎

Dopo aver osservato che $P(1) = 0$, si può effettuare la divisione (con la regola di Ruffini) del polinomio per $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 6 & -7 \\ 1 & & 1 & 1 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 7)$. Il polinomio di secondo grado non è ulteriormente scomponibile in quanto "il delta è negativo".

Domanda 2. Riscrivere l'espressione $e^{2/x} - e^{3/x}$ raccogliendo $e^{1/x}$

✎

$$e^{2/x} - e^{3/x} = e^{1/x}\left(e^{2/x-1/x} - e^{3/x-1/x}\right) = e^{1/x}\left(e^{1/x} - e^{2/x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\ln^2 x + \ln x = 0$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. Si tratta di un'equazione logaritmica riconducibile ad una di secondo grado. In generale si risolvono con un cambio di variabile ($\ln x = t$), ma in questo caso, mancando il termine noto, l'equazione si può risolvere più semplicemente con un raccoglimento. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\ln x(\ln x + 1) = 0, \text{ che equavale a } \quad \ln x = 0 \quad \vee \quad \ln x + 1 = 0.$$

La prima porta a $x = 1$ e la seconda, equivalente a $\ln x = -1$, porta a $x = \frac{1}{e}$. Entrambe le soluzioni sono accettabili.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$e^{1-x} - 2 < 0$$

✎

La disequazione equivale a

$$e^{1-x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x < \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 - \ln 2.$$

Quindi le soluzioni sono date dall'intervallo $S = (1 - \ln 2, +\infty)$.

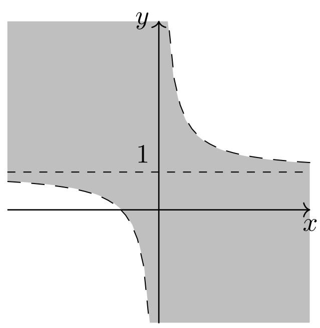
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - x < 1$

✎

La disequazione si può riscrivere come

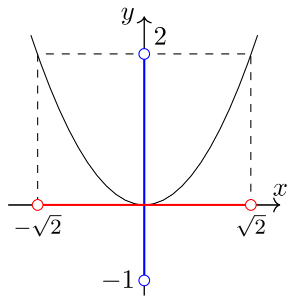
$$x(y - 1) < 1.$$

L'equazione corrispondente individua l'iperbole di centro $(0, 1)$, assi paralleli agli assi cartesiani e rami che stanno nei corrispondenti del primo e terzo quadrante (rispetto al centro). Dato che ad esempio il centro soddisfa la disequazione, questa è verificata nella regione evidenziata in grigio nella figura a fianco.



Domanda 6. Determinare la controimmagine dell'intervallo $(-1,2)$ attraverso la funzione $f(x) = x^2$

✎



È utile disegnare un grafico della funzione f e indicare, nell'asse y, l'intervallo $(-1,2)$. Dal grafico si vede che la controimmagine dell'intervallo dato, cioè l'insieme delle x per cui il corrispondente valore $f(x)$ sta in questo intervallo, è data dall'intervallo $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Alla domanda si poteva anche rispondere analiticamente, cercando cioè le soluzioni della doppia disequazione $-1 < x^2 < 2$. Dato che la disequazione di sinistra $x^2 > -1$ è sempre verificata, la doppia disequazione equivale a $x^2 < 2$. Le sue soluzioni sono evidentemente $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Domanda 7. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-1/x}}{\ln(1/x - x)}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-1/x}}{\ln(1/x - x)} = \frac{e^{-\infty-1/(-\infty)}}{\ln\big(1/(-\infty)-(-\infty)\big)} = \frac{e^{-\infty+0}}{\ln(0+\infty)} = \frac{e^{-\infty}}{\ln(+\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = xe^{x-1/x}$

✎

$$f'(x) = 1\cdot e^{x-1/x} + xe^{x-1/x}\left(1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{x-1/x} + xe^{x-1/x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = e^{x-1/x}\left(1 + x + \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$

✎

L'integrale si può riscrivere come

$$\int \frac{1/x}{1+\ln x}\,\mathrm{d}x$$

ed è ora evidente che il numeratore è la derivata del denominatore. Quindi si tratta di un integrale quasi immediato del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$. Quindi

$$\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x = \ln\Big|1+\ln x\Big| + c.$$

Faccio anche osservare che non possiamo togliere il valore assoluto, dato che l'argomento può anche essere negativo.

Domanda 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x,y) = ye^{x^2/y}$

✎

Le due derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{x^2/y}\frac{2x}{y} = 2xe^{x^2/y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1\cdot e^{x^2/y} + ye^{x^2/y}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) = e^{x^2/y}\left(1 - \frac{x^2}{y}\right).$$

Il gradiente è poi il vettore $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/08/2015

ESERCIZIO 1. Data la funzione

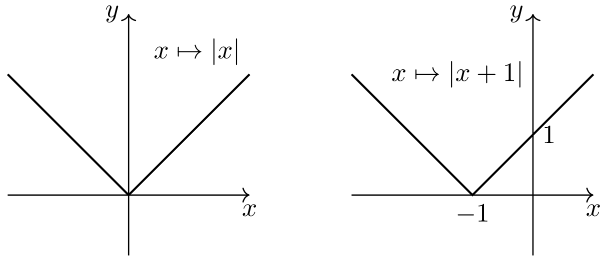
$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \le 0 \\ 2 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si provi che ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si dica poi in quali punti è verificata la tesi. Si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si scriva infine l'espressione di f' dove essa esiste.

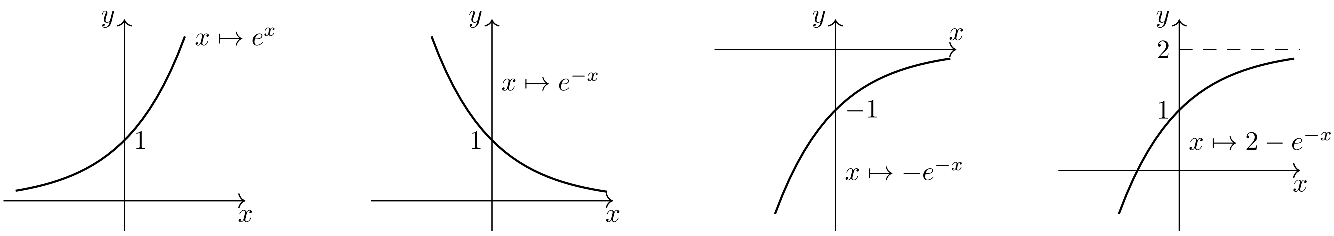
✎

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. Usiamo le trasformazioni elementari per ottenere il grafico.

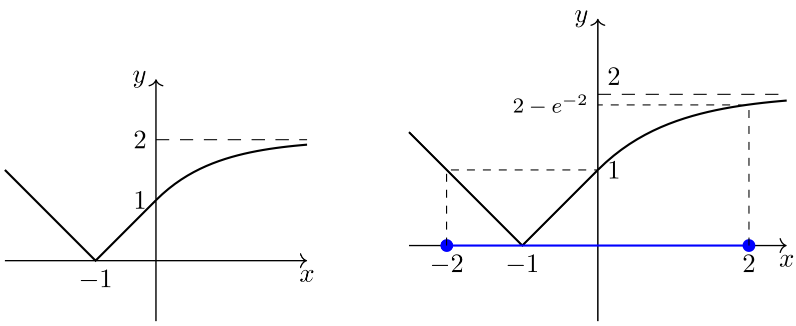
Per quanto riguarda la funzione $x \mapsto |x+1|$ si parte dal grafico di $x \mapsto |x|$ e si effettua una traslazione a sinistra di 1 unità.



Per quanto riguarda la funzione $x \mapsto 2 - e^{-x}$ si parte dal grafico di e^x.



Il grafico della funzione f è pertanto



L'applicabilità del teorema di Weierstrass (figura qui sopra a destra) richiede che siano soddisfatte le ipotesi del teorema stesso, che cioè la funzione sia continua nell'intervallo chiuso e limitato assegnato, nel nostro caso $[-2, 2]$. Dal grafico ottenuto risulta che la funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}$ e quindi in particolare nell'intervallo $[-2, 2]$. Per fornire una giustificazione più rigorosa della continuità possiamo osservare che nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è continua in quanto composizione di funzioni elementari. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la continuità segue dalla continuità della funzione valore assoluto.[23] L'unico punto in cui la continuità va verificata direttamente è $x = 0$. Si ha

$$f(0) = |0 + 1| = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 - e^{-x}).$$

[23] Il valore assoluto non è propriamente una funzione elementare, ma sappiamo che è una funzione continua.

Quindi possiamo concludere che f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Il teorema è quindi applicabile. Pertanto è vera la tesi del teorema, e cioè esistono punti in $[-2, 2]$ in cui la funzione assume il suo valore massimo e il suo valore minimo. Per determinarli, come richiesto, possiamo servirci ancora del grafico. Risulta evidente che $x = -1$ è il punto di minimo globale (con valore minimo 0) e $x = 2$ è il punto di massimo globale (con valore massimo $f(2) = 2 - e^{-2}$). Per quanto riguarda il punto di massimo si noti che anche $x = -2$ è di massimo, però locale. Infatti $f(-2) = 1 < 2 - e^{-2} = f(2)$, dato che $e^{-2} < 1$.

Passiamo ora allo studio della derivabilità.

Sempre sulla base del grafico possiamo osservare che è evidente la presenza di un punto angoloso in $x = -1$, conseguente al fatto che $x \mapsto |x|$ ha in $x = 0$ un punto angoloso. Basterebbe questo per rispondere alla domanda, affermando che la funzione f non è derivabile tutto $\mathbb{R}$. Però la successiva richiesta di scrivere l'espressione di f' dove esiste porta anche a cercare altri possibili punti in cui la derivata non c'è. Allora, in modo simile a quanto detto per la continuità, possiamo affermare che nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è derivabile in quanto composizione di funzioni elementari. Nell'insieme $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ la funzione è derivabile in quanto è un polinomio.[24] Quindi anche adesso l'unico punto da studiare è $x = 0$. In conseguenza di quanto appena detto possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & x < -1 \\ x+1 & -1 \le x \le 0 \\ 2 - e^{-x} & x > 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Essendo f continua in 0, possiamo studiare la sua derivabilità calcolando i limiti destro e sinistro della derivata in 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} = 1.$$

Pertanto f è derivabile in $x = 0$ e possiamo completare la scrittura della sua derivata scrivendo

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ e^{-x} & x \ge 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se essa è invertibile e, in caso affermativo, si determini la sua matrice inversa. Si dica se la prima riga di A si può scrivere come combinazione lineare delle ultime due colonne. Si dica se i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ appartengono tutti al sottospazio generato dalle righe di A. Si stabilisca infine il segno della forma quadratica associata alla matrice A.

✎

Anzitutto calcoliamo il determinante di A. Sviluppando ad esempio rispetto alla prima riga si ha

$$\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4.$$

Il determinante è diverso da zero e quindi A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è

$$A_{CA} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e la matrice aggiunta è} \quad A^\star = (A_{CA})^T = A_{CA} \quad \text{dato che } A_{CA} \text{ è simmetrica.}$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\star = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

[24] Ricordo che $|x+1|$ significa $x+1$ per $x \ge -1$ e $-x-1$ per $x < -1$.

Per dire se la prima riga di A si può scrivere come combinazione lineare delle ultime due colonne si può utilizzare la definizione, cioè porre

$$(2,1,0) = a(1,2,1) + b(0,1,2)$$

e trovare se esistono dei coefficienti in modo che questo sia possibile (si trova che non è possibile). Però c'è un modo più veloce: essendo A simmetrica, la domanda equivale a "Si dica se la prima riga di A si può scrivere come combinazione lineare delle ultime due righe" e questo è chiaramente impossibile dato che le tre righe sono linearmente indipendenti (il determinante è diverso da zero).

Analogamente, per rispondere alla successiva domanda se i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ appartengano tutti al sottospazio generato dalle righe di A si potrebbe cercare di scrivere ogni vettore fondamentale come c.l. delle righe. Ma è molto più semplice osservare che, essendo le righe indipendenti, esse generano tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi la risposta è certamente sì.

Per stabilire infine il segno della forma quadratica associata alla matrice A possiamo calcolare i minori principali di Nord Ovest (MPNO) di A. Essi sono:

$$\text{MPNO di ordine } 1 = 2 \quad ; \quad \text{MPNO di ordine } 2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad ; \quad \text{MPNO di ordine } 3 = \det A = 4.$$

Essendo tutti positivi la forma quadratica associata ad A è definita positiva.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2) - \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto e convesso. Si calcoli la derivata parziale di f rispetto alla variabile x e si dica se il punto $(0,0)$ può essere stazionario. Esistono nel dominio punti in cui la funzione si annulla?

✎

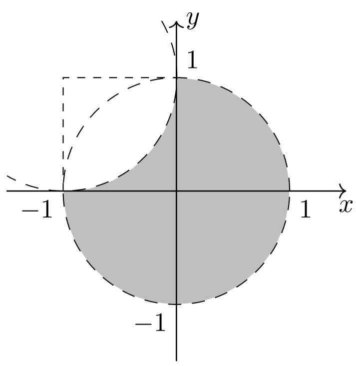
Le condizioni di esistenza della funzione f sono date dal sistema

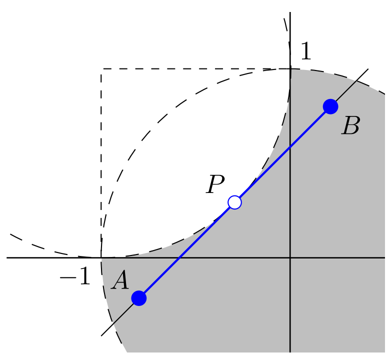
$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 > 0. \end{cases}$$

La prima disequazione individua la regione interna alla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Per la seconda si può usare il completamento del quadrato. Si ha

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(y-1)^2} + 1 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 > 1.$$

Si tratta quindi della regione esterna alla circonferenza di centro $(-1,1)$ e raggio unitario. L'intersezione delle due regioni, cioè il dominio della funzione f, è raffigurata in grigio qui sotto a sinistra.





Il dominio di f è un insieme aperto, cioè tutti i suoi punti sono interni oppure, in termini equivalenti, nessun punto di frontiera dell'insieme appartiene all'insieme stesso.

Il dominio non è un insieme convesso (figura sopra a destra), cioè non è vero che, scelti comunque due punti dell'insieme, il segmento che li congiunge è tutto contenuto nell'insieme. Per fornire un controesempio la scelta "naturale" sarebbero i due punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, ma questi non appartengono al dominio. L'idea potrebbe essere quella di prendere due punti "abbastanza vicini" ai due precedenti, eventualmente per semplicità sugli assi cartesiani.[25] Forse il modo più semplice è considerare sulla frontiera del dominio il punto, chiamiamolo P, del secondo quadrante che sta sulla retta di equazione $y = -x$ (non serve trovare le coordinate, anche se non è difficile). La retta tangente alla frontiera in questo punto P (che ha pendenza 1) chiaramente ha almeno un punto A del primo quadrante che sta nel dominio di f e almeno un punto B del terzo quadrante che sta nel dominio di f. Possiamo ora affermare che per costruzione A e B appartengono al dominio di f ma il segmento che li congiunge non è tutto contenuto nel dominio, dato che il punto P non vi appartiene.

La derivata parziale di f rispetto alla variabile x è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \cdot (-2x) - \frac{1}{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1} \cdot (2x + 2).$$

Il punto $(0, 0)$, che è interno al dominio, non può essere stazionario in quanto risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -2$$

e quindi il gradiente di f non si può annullare in $(0, 0)$.

Cerchiamo i punti in cui la funzione f si annulla. Basta risolvere l'equazione $f(x, y) = 0$, cioè

$$\ln(1 - x^2 - y^2) - \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1 - x^2 - y^2) = \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1)$$

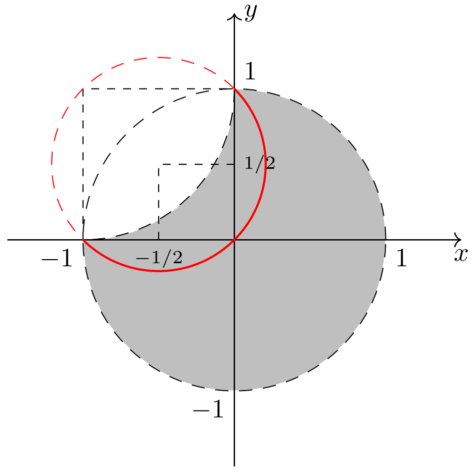
che equivale a sua volta a

$$1 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + x - y = 0.$$

Ancora con il completamento del quadrato quest'ultima si può scrivere come

$$\underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2} + \underbrace{y^2 - y + \frac{1}{4}}_{(y-\frac{1}{2})^2} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}.$$

Si tratta della circonferenza di centro $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La circonferenza è solo in parte contenuta nel dominio di f (tratto rosso continuo nella figura qui sotto). Per un disegno più preciso si osservi che la circonferenza passa per l'origine e per i punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.



[25] Riporto nel dettaglio la dimostrazione relativa al controesempio per scrupolo di completezza, ma segnalo che nello svolgimento del tema mi sarei accontentato che lo studente fornisse l'idea, non i dettagli rigorosi, o anche solo un disegno.