Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2015/16

Alberto Peretti

01/01/2015

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2015

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

✎

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3) = x^2(x+1)(x-3).$$

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$2e^{-x} - 1 = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$2e^{-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -x = \ln\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$2\ln(-x) + 1 = 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $x < 0$ l'equazione equivale a

$$2\ln(-x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(-x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -x = e^{-1/2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

La soluzione è accettabile nella condizione di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$x(x+1) < 1$$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 + x - 1 < 0. \quad \text{Gli zeri sono} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori interni: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Domanda 5. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2}{x+1} > x$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{x^2}{x+1} - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} < 0.$$

La disequazione equivale ai sistemi (segni discordi)

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x > -1. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo fornisce le soluzioni $-1 < x < 0$.

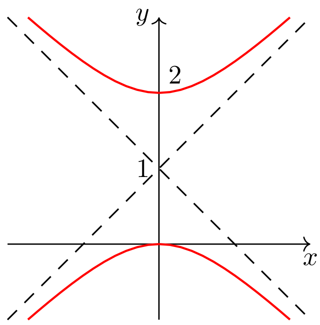
Domanda 6. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 - y^2 + 2y = 0$

✎

Usando il completamento del quadrato si ha

$$x^2 - (y^2 - 2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (y^2 - 2y + 1 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (y-1)^2 = -1.$$

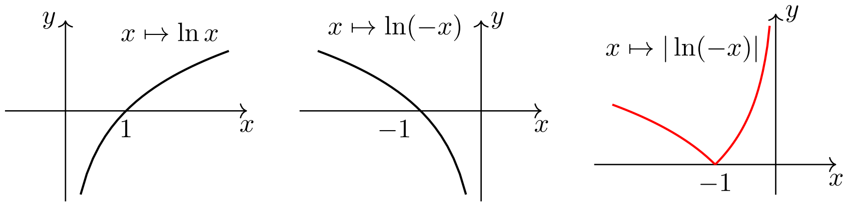
Si tratta dell'equazione di un'iperbole con centro nel punto $(0, 1)$, asintoti obliqui (di pendenze ± 1) e rami che stanno al di sopra e al di sotto del centro. La curva è raffigurata in rosso qui a fianco.



Domanda 7. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = \left|\ln(-x)\right|$

✎

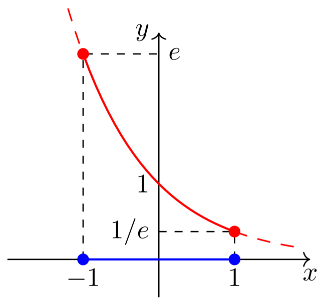
Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x \mapsto \ln x$ con le trasformazioni qui sotto riportate.



Domanda 8. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = e^{-x}$, si determinino i punti di massimo e di minimo di f

✎

Il grafico è qui a fianco. Dal grafico si vede che il punto di massimo è in $x_{\max} = -1$ mentre il punto di minimo è in $x_{\min} = 1$.



Domanda 9. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x)}{x^3}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(-x)}{x^3} = \frac{\ln(-(0^-))}{(0^-)^3} = \frac{\ln(0^+)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Domanda 10. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = xe^{2/x}$

✎

$$f'(x) = e^{2/x} + xe^{2/x}(-2/x^2).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2015

Domanda 1. Dire se il polinomio $P(x) = x^5 + x + 1$ è divisibile per $x + 1$

✎

Possiamo applicare il teorema di Ruffini. Dato che il divisore $x+1$ si annulla in -1, basta calcolare il dividendo $P(x)$ in -1. Si ha

$$P(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0.$$

Quindi $P(x)$ non è divisibile per $x + 1$.

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$1 - 2e^{2x} = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$2e^{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$1 + 2\ln(2x) = 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $x > 0$ l'equazione equivale a

$$2\ln(2x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = e^{-1/2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}e^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

La soluzione è accettabile nella condizione di esistenza.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$x < x(x-1)$$

✎

La disequazione equivale a

$$x^2 - 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) > 0.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono per valori esterni: $x < 0$ oppure $x > 2$.

Domanda 5. Risolvere la disequazione

$$x < \frac{x^2}{x+1}$$

✎

C'è la condizione di esistenza $x \neq -1$. Poi la disequazione equivale a

$$\frac{x^2}{x+1} - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} < 0.$$

La disequazione equivale ai sistemi (segni discordi)

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x > -1. \end{cases}$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo fornisce le soluzioni $-1 < x < 0$.

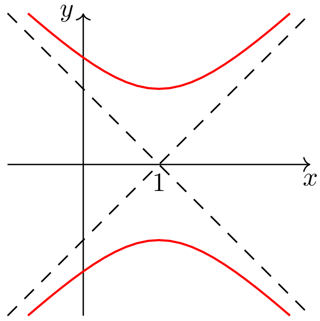
Domanda 6. Disegnare nel piano con riferimento cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2-2x-y^2+2=0$

✎

Usando il completamento del quadrato si ha

$$x^2-2x+1-y^2=-2+1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2-y^2=-1.$$

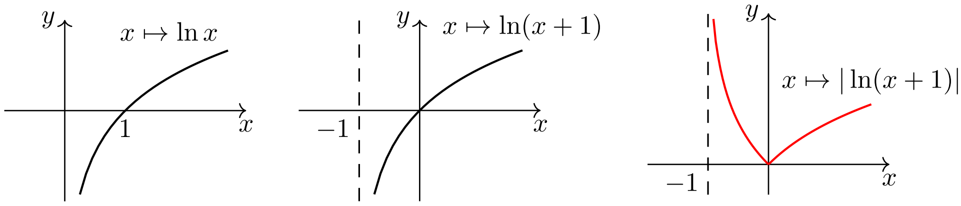
Si tratta dell'equazione di un'iperbole con centro nel punto $(1,0)$, asintoti obliqui (di pendenze ±1) e rami che stanno al di sopra e al di sotto del centro. La curva è raffigurata in rosso qui a fianco.



Domanda 7. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x)=\left|\ln(x+1)\right|$

✎

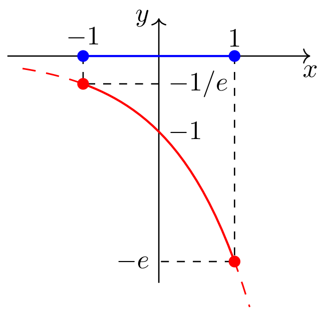
Il grafico si ottiene a partire dal grafico di $x\mapsto \ln x$ con le trasformazioni qui sotto riportate.



Domanda 8. Dopo aver disegnato un grafico della funzione $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, con $f(x)=-e^x$, si determinino i punti di massimo e di minimo di f

✎

Il grafico è qui a fianco. Dal grafico si vede che il punto di massimo è in $x_{\max}=-1$ mentre il punto di minimo è in $x_{\min}=1$.



Domanda 9. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}=\frac{e^{-\infty}}{(+\infty)^3}=\frac{0}{+\infty}=0.$$

Domanda 10. Si calcoli la derivata della funzione $f(x)=x\ln\left(\frac{2}{x}\right)$

✎

$$f'(x)=\ln\left(\frac{2}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 06/11/2015

ESERCIZIO 1. Date le due funzioni

$$f(x) = \frac{1}{e(x-1)} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{e^x - e}$$

si provi che entrambe tendono a $+\infty$ per $x \to 1^+$. Si dimostri poi che f e g sono equivalenti per $x \to 1^+$. Si determini infine l'espressione della funzione inversa di entrambe.

✎

Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e(x-1)} = \frac{1}{e(1^+ - 1)} = \frac{1}{e \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e^x - e} = \frac{1}{e^{1^+} - e} = \frac{1}{e^+ - e} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Occorre dimostrare che il limite del quoziente di f e g tende a 1.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{e(x-1)}}{\frac{1}{e^x-e}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - e}{e(x-1)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{e} = 1.$$ [1]

Per quanto riguarda le funzioni inverse si ha

$$y = \frac{1}{e(x-1)} \quad \Leftrightarrow \quad e(x-1) = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = \frac{1}{ey} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{ey}$$

e quindi $f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{ey}$. Per la g si ha

$$y = \frac{1}{e^x - e} \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e + \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(e + \frac{1}{y}\right)$$

e quindi $g^{-1}(y) = \ln\left(e + \frac{1}{y}\right)$.

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & -1 \le x \le 0 \\ -\ln(x+1) & 0 < x \le e - 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari.
Si provi che alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, e-1]$ e si verifichi la tesi.
Si stabilisca se alla funzione f è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, e-1]$.

✎

Per quanto riguarda la funzione polinomiale propongo due possibili modi di procedere. Si può più semplicemente scrivere $-x^2 - x = -x(x+1)$, da cui si ricava che il grafico è quello di una parabola con la concavità rivolta verso il basso e che incontra l'asse x in $x = -1$ oppure $x = 0$.[2]

---

[1] Si poteva anche fare:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - e}{e(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{e(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$$

e con il cambio di variabile $x - 1 = t$ si trasforma nel limite notevole

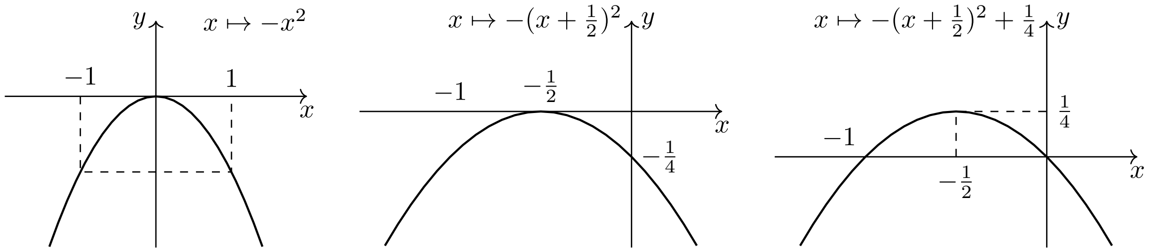
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

[2] Questo modo di procedere non utilizza per la verità le trasformazioni elementari ma è comunque accettabile.

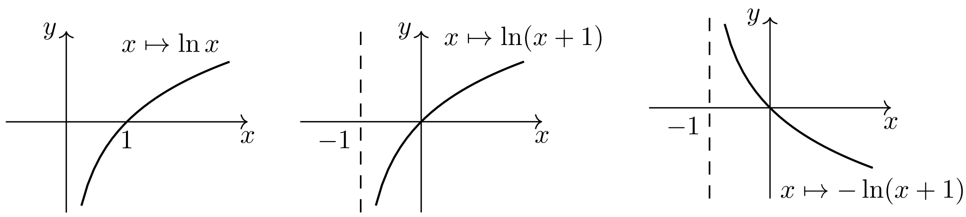
Si può arrivare al grafico anche attraverso le trasformazioni elementari, ma occorre prima riscrivere l'espressione $-x^2-x$ completando il quadrato.

$$-x^2 - x = -\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

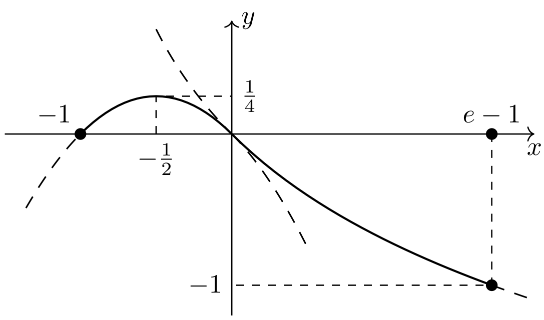
Quindi il grafico cercato è quello che si ottiene dal grafico di $x \mapsto -x^2$ con una traslazione a sinistra di $\frac{1}{2}$ e in alto di $\frac{1}{4}$, come raffigurato qui sotto



Per quanto riguarda la funzione logaritmica invece, il grafico si ottiene con le seguenti trasformazioni elementari.



Quindi il grafico della funzione f è quello rappresentato qui sotto.



Il teorema di Weierstrass è applicabile se la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato. L'intervallo $[-1, e-1]$ è chiuso e limitato per definizione.

Per verificare la continuità di f in questo intervallo possiamo anzitutto affermare che f è certamente continua negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, 1-e]$,[3] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con una funzione elementare (o somma/prodotto/quoziente/composta di funzioni elementari).

Nel punto $x = 0$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo però affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 0$ da sinistra, in quanto in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra del punto essa coincide con la funzione logaritmica.

La continuità da destra è data dall'uguaglianza tra

$$f(0) = 0^2 - 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(-\ln(x+1)\big) = -\ln 1 = 0.$$

Verificare la tesi del teorema significa constatare che nell'esempio dato è vero quanto la tesi afferma.

[3] Metto in evidenza questo aspetto, a volte non così chiaro agli studenti: con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo $[-1, 0)$, cioè in tutti i punti x, con $-1 \le x < 0$ e nell'intervallo $(0, e-1]$, e cioè in tutti i punti x, con $0 < x \le e-1$ (agli estremi -1 ed $e-1$ la continuità si intende rispettivamente da destra e da sinistra). Quindi non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda la continuità nel punto $x = 0$, che andrà studiato successivamente.

La tesi del teorema di Weierstrass è che la funzione f nell'intervallo $[-1, e-1]$ assume i valori del suo estremo inferiore e del suo estremo superiore in tale intervallo, o equivalentemente che f ha in $[-1, e-1]$ un punto di massimo e un punto di minimo (globali). Dal grafico possiamo vedere che la tesi è verificata e che il punto di massimo è in $x = -\frac{1}{2}$, con valore corrispondente $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ (massimo di f) e il punto di minimo è in $x = e-1$, con valore corrispondente $f(e-1) = -1$ (minimo di f).

Passiamo all'ultima domanda, l'applicabilità del teorema di Lagrange, le cui ipotesi sono che la funzione sia continua nell'intervallo $[-1, e-1]$ (già verificato) e derivabile nei punti interni, cioè nell'intervallo $(-1, e-1)$.

Quindi studiamo la derivabilità. Possiamo intanto dire che dal grafico non pare esserci evidenza di un punto di non derivabilità (punti angolosi o cuspidi), ma dobbiamo provarlo rigorosamente. In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, e-1)$, coincidendo con funzioni elementari. Sfruttando appunto la derivabilità in questi punti possiamo poi scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -\dfrac{1}{x+1} & \text{se } 0 < x < e-1. \end{cases}$$

Pertanto avremo[4]

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x - 1) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \big(-\frac{1}{x+1} \big) = -1.$$

Pertanto f è derivabile in $x = 0$ e quindi il teorema di Lagrange è applicabile. Non è richiesta la verifica della tesi del teorema.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(1-x)$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si dica poi in quali intervalli la funzione f è crescente o decrescente e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali. Si disegni infine un possibile grafico di f.

✎

La condizione di esistenza per la funzione f è data dal sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 1, \end{cases}$$

e quindi l'insieme di definizione è $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Pertanto i limiti significativi da calcolare sono: $-\infty$, 0^-, 0^+ e 1^-. Con l'algebra dei limiti si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} - \ln(1 - (-\infty)) = 0 - \ln(+\infty) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} - \ln(1 - 0) = -\infty - 0 = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - \ln(1 - 0) = +\infty - 0 = +\infty.$$

Infine

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 - \ln(1 - 1^-) = 1 - \ln(0^+) = 1 - (-\infty) = +\infty.$$

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

[4] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

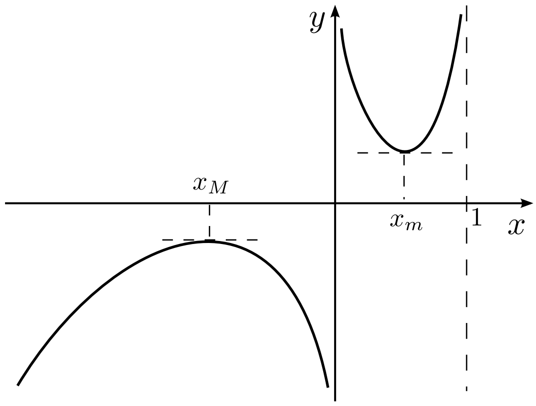
Per studiare dove la funzione cresce o decresce studiamo il segno della derivata.

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x - 1}{x^2(1-x)} > 0.$$

Dato che il denominatore nel campo di esistenza è sempre positivo, la disequazione equivale alla

$$x^2 + x - 1 > 0, \quad \text{che è verificata per} \quad x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pertanto la funzione f è crescente in $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ e decrescente in $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Inoltre $x_M = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo (locale non globale) e $x_m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo (locale non globale). Un possibile grafico di f è il seguente.



PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/01/2016

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \frac{x+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{x+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x = x + \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{1/e}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \ln x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + c$$

e quindi

$$\int_{1/e}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x = \Big(x\ln x - x\Big|_{1/e}^{e} = (e\ln e - e) - \left(\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) = (e-e) - \left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

Domanda 3. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n/2}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{n/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{1/2}}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = \frac{1}{1-\sqrt{e}}.$$

Domanda 4. Dire se converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$

✎

Per $n\to+\infty$ a numeratore 1 è trascurabile rispetto a $\sqrt[3]{n}$ e a denominatore $\sqrt{n}$ è trascurabile rispetto ad n. Quindi il termine generale è equivalente a

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \frac{n^{1/3}}{n} = \frac{1}{n^{2/3}},$$

che è il termine generale di una serie armonica generalizzata con parametro $\alpha = 2/3 < 1$. La serie diverge e pertanto diverge anche la serie data.

Domanda 5. Calcolare il prodotto tra matrici $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Domanda 6. Scrivere la matrice dei complementi algebrici della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

✎

Ricordando che il complemento algebrico dell'elemento di posto (i, j) è il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, cambiato di segno se "il posto è dispari", si ha

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Domanda 7. Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

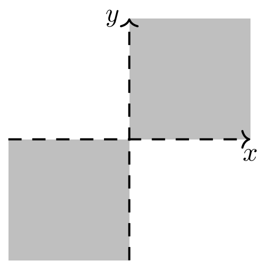
✎

Il determinante è nullo, o calcolandolo o osservando che le prime due righe sono opposte, e quindi il rango non è 3. Il rango è 2 osservando che ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 1)$ è 1.

Domanda 8. Disegnare il dominio della funzione $f(x, y) = x \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

✎

La condizione di esistenza è $\frac{y}{x} > 0$, che equivale a dire entrambe le variabili positive oppure entrambe negative. Si tratta quindi dell'unione del primo e del terzo quadrante, assi cartesiani esclusi. L'insieme è raffigurato in grigio a fianco.



Domanda 9. Classificare in base al segno la forma quadratica

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz + y^2 - 2yz$$

✎

La matrice simmetrica della forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il determinante si annulla in quanto le prime due righe sono opposte. I minori principali del primo ordine sono $1, 1, 0$; i minori principali del secondo ordine sono $0, -1, -1$. Essendoci un minore principale di ordine pari negativo la forma è indefinita.

Si poteva anche concludere osservando che ad esempio $Q(1, 0, 0) = 1 > 0$ e $Q(0, 1, 1) = -1 < 0$.

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = y \ln(x^2 + y)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \ln(x^2 + y) + y \cdot \frac{1}{x^2 + y} \cdot 1.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 18/01/2016

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si dica perché l'integrale di f nell'intervallo $[1,e]$ deve essere positivo e, successivamente, lo si calcoli. Si stabilisca infine se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge o diverge.

✎

Per l'integrale indefinito si ha

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

L'integrale di Riemann nell'intervallo $[1,e]$ è certamente positivo in quanto la funzione integranda è non negativa in tale intervallo (il numeratore si annulla in 1 e poi è positivo e il denominatore è sempre positivo). Ricordo che quando la funzione integranda è non negativa l'integrale di Riemann è non negativo e coincide con l'area della regione che sta tra l'asse x e il grafico della funzione stessa.
Ora calcoliamo l'integrale definito:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right|_1^e = \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0-1) = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Passiamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Si può verificare (provate a farlo!) che il confronto con la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ non porta ad alcun risultato in quanto $\frac{\ln n}{n^2}$ è trascurabile rispetto ad $\frac{1}{n}$, ma la serie armonica diverge.
Analogamente non dà risultati il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, dato che questa converge, ma il termine generale $\frac{\ln n}{n^2}$ non è trascurabile rispetto ad $\frac{1}{n^2}$.
Funziona invece il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot n^{3/2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^{1/2}} = 0$$

in quanto è un confronto standard. Pertanto il termine generale $\frac{\ln n}{n^2}$ è trascurabile rispetto ad $\frac{1}{n^{3/2}}$ e, dato che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge in quanto $\alpha = 3/2 > 1$, allora converge anche la serie data.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica anzitutto se, in base al teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni. In caso affermativo si risolva il sistema e si indichi una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si dica infine se tra le soluzioni di $Ax = b$ ci sono vettori a componenti tutte positive.

✎

Affinché il sistema abbia almeno una soluzione è necessario e sufficiente che il rango di A sia uguale al rango della matrice completa $(A|b)$.

Il determinante di A si annulla (la terza riga è la differenza delle prime due). Quindi il rango di A non è 3. Il minore complementare dell'elemento di posto $(3,3)$ è diverso da zero (vale 1) e quindi il rango di A è 2.

Passiamo ad

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Osservando che anche nella matrice completa si ha ancora che la terza riga è la differenza delle prime due, possiamo dire che il rango non è 3 (le righe sono linearmente dipendenti) e quindi anche il rango di $(A|b)$ è 2. Il teorema di Rouché–Capelli garantisce l'esistenza di soluzioni.

Dobbiamo ora risolvere il sistema $Ax = b$. Si tratta di un sistema quadrato 3×3, ma con rango 2. Il metodo di risoluzione generale prevede quindi di eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e di trasformare in parametro una delle variabili. Eliminando la terza equazione e trasformando in parametro la variabile z (si osservi che il minore principale di Nord-Ovest del secondo ordine è diverso da zero), possiamo trasformare il sistema nel sistema equivalente

$$\begin{cases} x = 6 - 5z \\ y = 5 - 4z. \end{cases}$$

Possiamo direttamente scrivere le soluzioni, date dall'insieme

$$S = \Big\{(6-5z, 5-4z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato si può ottenere scrivendo le soluzioni nella forma standard "soluzione particolare + soluzioni del sistema omogeneo":

$$S = \Big\{(6,5,0) + z(-5,-4,1) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Pertanto una base è $\big\{(-5,-4,1)\big\}$. Possiamo anche affermare che il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione 1 (è una retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$).

L'ultima domanda: tra le soluzioni di $Ax = b$ ci sono vettori a componenti tutte positive? Sì, ad esempio la soluzione che si ottiene dall'espressione $(6-5z, 5-4z, z)$ ponendo $z = 1$, cioè la soluzione $(1,1,1)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

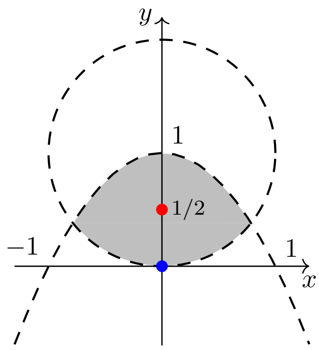
$$f(x,y) = \ln\Big(1 - x^2 - (y-1)^2\Big) - \ln\Big(1 - x^2 - y\Big)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si indichino un punto interno e un punto di frontiera per il dominio di f. Si calcolino le derivate parziali di f e si dica se il punto $(0, \frac{1}{2})$ è stazionario. Si determini infine la curva di livello 0 di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 - (y-1)^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 < 1 \\ y < 1 - x^2. \end{cases}$$



La prima disequazione individua il cerchio (aperto) di centro il punto $(0,1)$ e raggio 1. La seconda disequazione individua la regione che sta al di sotto della parabola di equazione $y = 1 - x^2$, il cui grafico si ottiene facilmente con le trasformazioni elementari. Si tratta della parabola con asse verticale, concavità verso il basso, vertice nel punto $(0,1)$ e che incontra l'asse x in $x = \pm 1$.

Il dominio di f è rappresentato qui a destra in grigio.

Un punto interno è ad esempio il punto $(0, \frac{1}{2})$ (rosso); un punto di frontiera è ad esempio il punto $(0,0)$ (blu).[5]

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1 - x^2 - (y-1)^2} - \frac{-2x}{1 - x^2 - y}$$

[5] Attenzione! È errato affermare, come molti hanno fatto, che non esistono punti di frontiera in quanto l'insieme è aperto.

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2(y-1)}{1-x^2-(y-1)^2} - \frac{-1}{1-x^2-y}.$$

Per dire se il punto $(0, \frac{1}{2})$ è stazionario basta calcolare le derivate parziali in tale punto. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \tfrac{1}{2}) = 0$$

ma

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{-2\cdot(-\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\frac{3}{4}} + \tfrac{1}{\frac{1}{2}} = \tfrac{4}{3} + 2 = \tfrac{10}{3}.$$

Pertanto il punto non è stazionario.

Concludiamo con la curva di livello 0 della funzione f. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big(1-x^2-(y-1)^2\big) - \ln\big(1-x^2-y\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big(1-x^2-(y-1)^2\big) = \ln\big(1-x^2-y\big)$$

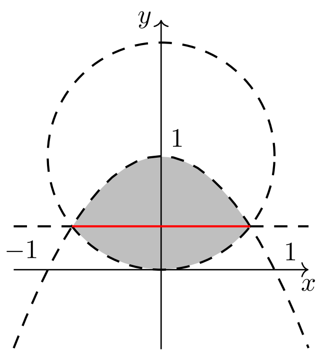
cioè

$$1-x^2-(y-1)^2 = 1-x^2-y \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2-3y+1=0.$$

Le soluzioni sono $y = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, che nel piano individuano le due rette di equazione

$$y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

La prima retta è esterna al dominio ($\frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62$), mentre la seconda è in parte contenuta nel dominio ($\frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.38$). I punti della curva di livello zero sono indicati in rosso nella figura che segue.



Con qualche semplice calcolo si trova che il segmento di livello 0 congiunge i due punti in cui la parabola e la circonferenza si intersecano. Tali punti sono (provare a verificarlo) $\Big(-(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{1/2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)$ e $\Big((\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{1/2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 15/01/2016

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x$

✎

$$x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x = x\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = x\left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Domanda 2. Nell'espressione $x^2e^{2x} + xe^{1/x}$ raccogliere x^2e^x e se possibile semplificare

✎

$$x^2e^{2x} + xe^{1/x} = x^2e^x\left(\frac{x^2e^{2x}}{x^2e^x} + \frac{xe^{1/x}}{x^2e^x}\right) = x^2e^x\left(e^x + \frac{e^{1/x-x}}{x}\right).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x^2(e^x - 1) - e^x + 1 = 0$$

✎

Raccogliendo un -1 tra il terzo e quarto termine si ha

$$x^2(e^x - 1) - (e^x - 1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (e^x - 1)(x^2 - 1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 1 \ \vee\ x^2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \ \vee\ x = 1 \ \vee\ x = -1.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\log_2(x^2) + 2 < 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x^2 > 0$, che equivale (attenzione!) a $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\log_2(x^2) < -2 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2(x^2) < \log_2\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 < \frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Considerando la condizione di esistenza le soluzioni sono l'insieme $S = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

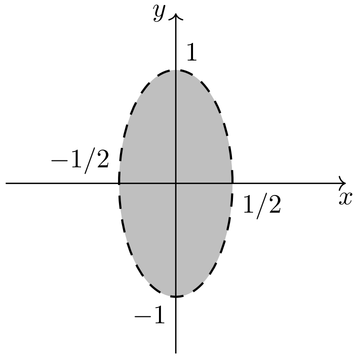
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $4x^2 + y^2 < 1$

✎

L'equazione $4x^2 + y^2 = 1$ definisce un'ellisse con centro l'origine. Per trovare l'informazione corretta sui semiassi dobbiamo scrivere l'equazione nella forma

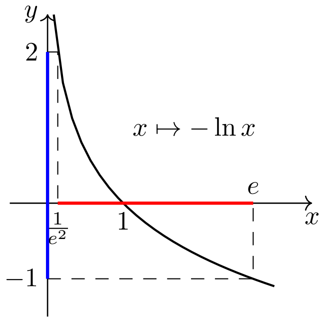
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1. \quad \text{Si ha} \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 < 1.$$

Quindi $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. Pertanto si ottiene l'ellisse raffigurata a fianco.



Domanda 6. Aiutandosi con un grafico, determinare la controimmagine dell'intervallo $(-1, 2)$ attraverso la funzione $f(x) = -\ln x$

✎



Dal grafico a sinistra si deduce che la controimmagine dell'intervallo $(-1, 2)$ è l'intervallo di estremi dati dalle controimmagini di $y = -1$ e $y = 2$. Per trovare queste x basta porre la funzione uguale a -1 e 2. Si ha

$$-\ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$$

e

$$-\ln x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Quindi possiamo scrivere $f^{-1}(-1, 2) = \left(\frac{1}{e^2}, e\right)$.

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{1-e^{-\infty}} + \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \frac{1}{1-0} + \ln\left(0^+\right) = 1 - \infty = -\infty.$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\left(e^{-1/x} + x\right)$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \left(e^{-1/x} + x\right) + x\left(e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} + 1\right).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\int \frac{e^{10/x}}{x^2}\,dx$

✎

$$\int \frac{e^{10/x}}{x^2}\,dx = -\frac{1}{10}\int e^{10/x} \cdot \frac{-10}{x^2}\,dx = -\frac{1}{10}e^{10/x} + c.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = \frac{x}{\ln(xy)}$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 \cdot \ln(xy) - x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y}{\ln^2(xy)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\left(-\frac{1}{\ln^2(xy)}\right) \cdot \frac{1}{xy} \cdot x.$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 18/01/2016

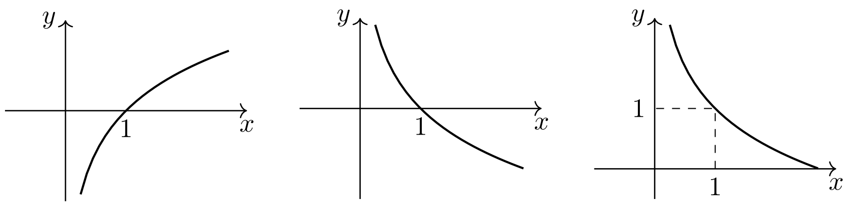
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \ln x & 0 < x < 1 \\ 1 - (x-1)^2 & x \geq 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in $(0, +\infty)$. Si giustifichi l'affermazione che f è invertibile e si scriva l'espressione della funzione inversa.

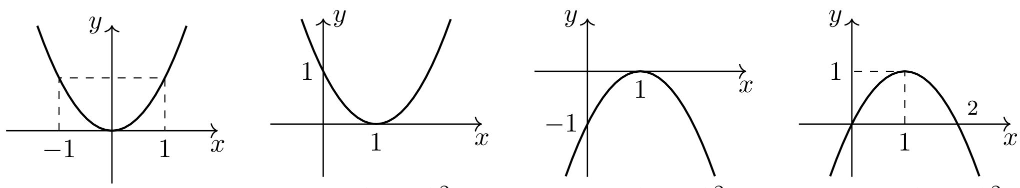
✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione logaritmica sono riportate qui sotto.



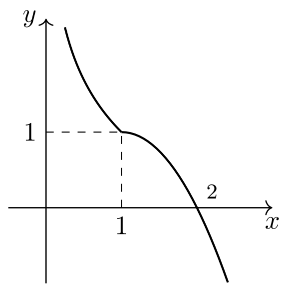
$x \mapsto \ln x$ $\quad x \mapsto -\ln x$ $\quad x \mapsto 1 - \ln x$

Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



$x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto (x-1)^2$ $\quad x \mapsto -(x-1)^2$ $\quad x \mapsto 1 - (x-1)^2$

Il grafico della funzione f è pertanto quello qui a fianco.



Passiamo alla continuità e derivabilità. Dal grafico si vede che f è continua nel suo dominio, compreso il punto $x = 1$. Per motivare la cosa in modo più rigoroso dobbiamo dire quanto segue.

La funzione f è certamente continua negli intervalli $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$,[6] in quanto in tali intervalli la funzione coincide con trasformazioni di funzioni elementari.

Nel punto $x = 1$, come detto in nota, dobbiamo verificare la continuità usando la definizione. Possiamo affermare che la funzione f è per definizione continua in $x = 1$ da destra, in quanto in un intorno destro di 1 coincide con il polinomio. Quindi è sufficiente verificare la continuità da sinistra. Faccio notare che da sinistra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 1$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a sinistra del punto è una funzione logaritmica.

La continuità da sinistra è data dall'uguaglianza tra

$$f(1) = 1 - (1-1)^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - \ln x) = 1.$$

Passiamo alla derivabilità. Possiamo intanto dire, in modo simile a quanto fatto con la continuità, che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$, dato che coincide con funzioni elementari. La derivabilità in $x = 1$ va studiata a parte. Aspetti geometrici del grafico, come il fatto che il punto $(1, 1)$ è il vertice della parabola, suggeriscono la presenza di un punto di non derivabilità. Ma dimostriamo la non derivabilità rigorosamente. Per $x \neq 1$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -2(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

[6] Con questa scrittura stiamo affermando che la funzione è continua nell'intervallo aperto $(0, 1)$, cioè in tutti i punti x, con $0 < x < 1$ e nell'intervallo aperto $(1, +\infty)$, e cioè in tutti i punti x, con $x > 1$. Attenzione che non stiamo dicendo nulla per quanto riguarda il punto $x = 1$, che quindi andrà studiato a parte.

Pertanto avremo[7]

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-\tfrac{1}{x}) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2(x-1)) = 0.$$

Quindi, essendo diverse le derivate destra e sinistra, f non è derivabile in $x = 1$.

Possiamo affermare che f è invertibile nel suo dominio, cioè l'intervallo $(0, +\infty)$, in quanto è (strettamente) decrescente e lo vediamo dal grafico. Concludiamo con l'espressione della funzione inversa. Procuriamoci intanto l'espressione delle funzioni inverse di $f_1(x) = 1 - \ln x$ e $f_2(x) = 1 - (x-1)^2$. Con

$$y = 1 - \ln x \quad \text{si ha} \quad \ln x = 1 - x \quad ; \quad x = e^{1-y}$$

e con

$$y = 1 - (x-1)^2 \quad \text{si ha} \quad (x-1)^2 = 1 - y \quad ; \quad x - 1 = \pm\sqrt{1-y} \quad ; \quad x = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

Tra le due espressioni finali bisogna scegliere "quella con il +", dato che nel tratto relativo alla funzione quadratica abbiamo che x è maggiore di 1.

Per la scrittura finale e complessiva della funzione inversa occorre considerare che la funzione f_1 ha come valori (cioè le y) l'intervallo $(1, +\infty)$, mentre la funzione f_2 ha come valori l'intervallo $(-\infty, 1]$. Questi sono gli intervalli di variabilità delle y. Pertanto abbiamo

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1-y} & y \le 1 \\ e^{1-y} & y > 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si dica tra quali spazi essa opera e si scriva la sua matrice di rappresentazione. Si determini il rango di T e una base della sua immagine. Si determini infine il sottospazio in cui la trasformazione si annulla.

✎

La trasformazione T è definita in $\mathbb{R}^4$ e assume valori in $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo scrivere $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. La matrice di rappresentazione di T è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{in quanto} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Il rango di T è il rango della matrice A. Si vede facilmente che il rango è massimo, cioè 3, dato che il minore che si ottiene dalle ultime tre colonne è diverso da zero. Infatti

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Ricordo che l'immagine di T è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Una base è formata da tre colonne indipendenti, ad esempio le ultime tre, quindi

$$\text{una base di Im}T \text{ è} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

[7] Un aspetto un po' tecnico ma che è il caso di sottolineare: la derivata destra è per definizione il limite del rapporto incrementale da destra, non il limite destro della derivata. Quindi fare il limite di f' non sempre equivale a calcolare la derivata destra. Però se la funzione è continua da destra ed esiste il limite della derivata, allora questo è uguale alla derivata destra (potrebbe essere infinita). Lo stesso ovviamente vale per la derivata sinistra. Solitamente è più semplice il calcolo del limite della derivata rispetto al limite del rapporto incrementale. Attenzione che se la funzione non è continua potremmo avere un limite della derivata finito con una derivata che invece non esiste.

Faccio osservare che si poteva anche rispondere così: dato che l'immagine di T è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 (il rango di T è la dimensione della sua immagine), si tratta di tutto $\mathbb{R}^3$. Quindi una sua base è la base fondamentale. Peraltro le ultime tre colonne di A sono la base fondamentale, anche se l'ordine dei vettori è inverso.

Per finire determiniamo il sottospazio in cui la trasformazione si annulla. Esso è l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$T(x) = 0, \text{ dove } x \in \mathbb{R}^4 \text{ e } 0 \in \mathbb{R}^3.$$

In sostanza si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono il sottospazio (di $\mathbb{R}^4$)

$$S_0 = \big\{(-t, 0, t, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}\big\}, \text{ sottospazio generato dal vettore } (-1, 0, 1, 0).$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

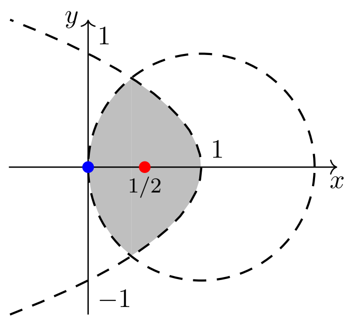
$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2 - x} - \sqrt{1 - y^2 - (x - 1)^2}$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si indichino un punto interno e un punto di frontiera per il dominio di f. Si calcolino le derivate parziali di f e si dica se il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ è stazionario. Si determini infine la curva di livello 0 di f.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - y^2 - x \geq 0 \\ 1 - y^2 - (x - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 1 - y^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$$



La prima disequazione individua la regione che sta a sinistra della parabola di equazione $x = 1 - y^2$, il cui grafico si ottiene facilmente con le trasformazioni elementari. Si tratta della parabola con asse orizzontale, concavità verso sinistra, vertice nel punto $(1, 0)$ e che incontra l'asse y in $y = \pm 1$.

La prima disequazione individua il cerchio (aperto) di centro il punto $(1, 0)$ e raggio 1.

Il dominio di f è rappresentato qui sotto a sinistra in grigio.

Un punto interno è ad esempio il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ (rosso); un punto di frontiera è ad esempio il punto $(0, 0)$ (blu).[8]

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{1 - y^2 - x}} - \frac{-2(x - 1)}{2\sqrt{1 - y^2 - (x - 1)^2}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2 - x}} - \frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2 - (x - 1)^2}}.$$

Per dire se il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ è stazionario basta calcolare le derivate parziali in tale punto. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tfrac{1}{2}, 0) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e questo è sufficiente per dire che il punto non è stazionario.

Concludiamo con la curva di livello 0 della funzione f. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - y^2 - x} - \sqrt{1 - y^2 - (x - 1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - y^2 - x} = \sqrt{1 - y^2 - (x - 1)^2}$$

[8]Attenzione! È errato affermare, come molti hanno fatto, che non esistono punti di frontiera in quanto l'insieme è aperto.

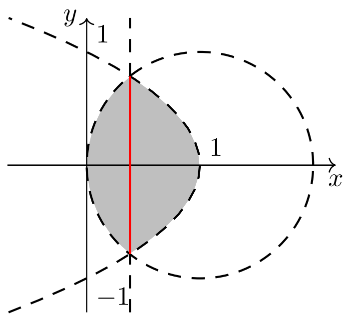
cioè

$$1 - y^2 - x = 1 - y^2 - (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le soluzioni sono $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, che nel piano individuano le due rette

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

La prima retta è esterna al dominio ($\frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62$), mentre la seconda è in parte contenuta nel dominio ($\frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.38$). I punti della curva di livello zero sono indicati in rosso nella figura che segue.



Con qualche semplice calcolo si trova che il segmento di livello 0 congiunge i due punti in cui la parabola e la circonferenza si intersecano. Tali punti sono (provare a verificarlo) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{1/2}\right)$ e $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{1/2}\right)$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 01/02/2016

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\big|\ln x\big| + c. \qquad \left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\big|f(x)\big| + c.\right)$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

e quindi

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = (-e^{-1} - e^{-1}) - (e - e) = -\frac{2}{e}.$$

Domanda 3. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-n/10}$

✎

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{1-n/10} = e\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n/10} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-1/10}\right)^n = e\cdot\frac{1}{1-e^{-1/10}} = e\cdot\frac{\sqrt[10]{e}}{\sqrt[10]{e}-1}.$$

Domanda 4. Dire se converge o diverge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n^3}}$

✎

Per $n \to +\infty$ a numeratore $\sqrt[3]{n}$ (cioè $n^{1/3}$) è trascurabile rispetto a $\sqrt{n}$ (cioè $n^{1/2}$), mentre a denominatore n è trascurabile rispetto a $\sqrt{n^3}$ (cioè $n^{3/2}$). Quindi il termine generale della serie è equivalente a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n},$$

che è il termine generale della serie armonica. Quest'ultima diverge e pertanto diverge anche la serie data.

Domanda 5. Dire se i vettori $\big(1,-2,3\big)$ e $\big(2,-\frac{1}{2},-1\big)$ sono ortogonali oppure no

✎

Basta calcolare il prodotto interno dei due vettori e vedere se questo si annulla oppure no.

$$\Big\langle \big(1,-2,3\big), \big(2,-\tfrac{1}{2},-1\big)\Big\rangle = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-\tfrac{1}{2}) + 3\cdot(-1) = 2+1-3 = 0$$

e quindi i due vettori sono ortogonali.

Domanda 6. Calcolare il prodotto tra matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Domanda 7. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

✎

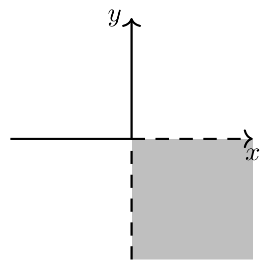
Il determinante vale -1. La matrice dei complementi algebrici è

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. La sua trasposta è $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi l'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 8. Disegnare il dominio della funzione $f(x, y) = \ln x \cdot \ln(-y)$

✎

La condizione di esistenza è data dal sistema $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$. Si tratta quindi del quarto quadrante, assi cartesiani esclusi. L'insieme è raffigurato in grigio a fianco.



Domanda 9. Classificare in base al segno la forma quadratica

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$

✎

La matrice simmetrica della forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante si annulla (ci sono righe o colonne uguali). I minori principali del primo ordine sono tutti uguali ad 1; i minori principali del secondo ordine sono tutti nulli e quindi la forma è semidefinita positiva.

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = x^2 \left(y + \dfrac{\ln x}{y} \right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \left(y + \frac{\ln x}{y} \right) + x^2 \cdot \frac{1}{xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \left(1 + \ln x \left(-\frac{1}{y^2} \right) \right).$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/02/2016

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

si stabilisca se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge o diverge. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si dica perché l'integrale di f nell'intervallo $[-1,1]$ deve essere positivo e, successivamente, lo si calcoli.

✎

Abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

Il termine generale tende a zero (confronto standard) e quindi la serie può convergere.

Propongo due modi alternativi per studiare la convergenza. Il primo è attraverso l'uso del criterio del rapporto. Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 e^n}{n^2 e^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Il limite vale $\ell = \frac{1}{e}$ e, dato che si tratta di un numero minore di 1, per il criterio del rapporto la serie converge.

Si poteva alternativamente operare con un criterio di confronto, ad esempio con la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \text{Il limite } \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{e^n} = 0,$$

dato che si tratta di un confronto standard potenza/esponenziale. Possiamo quindi affermare che il termine generale $\frac{n^2}{e^n}$ è trascurabile rispetto a $\frac{1}{n^2}$ e, dato che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$), allora converge anche la serie data.

Passiamo all'integrale indefinito, dove è richiesta un'integrazione per parti. Si ha

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = x^2(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 2x\,\mathrm{d}x = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrando nuovamente per parti (il grado del polinomio si è abbassato) si ha

$$\ldots = -x^2 e^{-x} + 2\left(x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x\right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + c.$$

L'integrale può essere anche scritto come $-e^{-x}\big(x^2 + 2x + 2\big) + c$.

Concludiamo con l'integrale di Riemann nell'intervallo $[-1,1]$. Esso è certamente positivo in quanto la funzione integranda ($x^2 e^{-x}$) è positiva in tale intervallo, ad eccezione di $x = 1$, dove si annulla. Ricordo che quando la funzione integranda è non negativa l'integrale di Riemann è non negativo e coincide con l'area della regione che sta tra l'asse x e il grafico della funzione stessa.

Ora calcoliamo l'integrale:

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(- e^{-x}\big(x^2 + 2x + 2\big)\Big|_{-1}^{1} = -e^{-1}\big(1 + 2 + 2\big) + e\big(1 - 2 + 2\big) = -\frac{5}{e} + e = \frac{e^2 - 5}{e},$$

che è infatti una quantità positiva.

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare

$$T(x) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

si dica tra quali spazi essa opera e si scriva la sua matrice di rappresentazione. Si dica se T è invertibile. Si determini il rango di T e una base della sua immagine. Si determini infine una base del sottospazio definito da $T(x) = 0$.

✎

La trasformazione T è evidentemente definita in $\mathbb{R}^3$ e ha i suoi valori in $\mathbb{R}^3$, quindi scriviamo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. La sua matrice di rappresentazione è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T è invertibile se e solo se la matrice A è invertibile e questo si ha se e solo se il determinante di A non si annulla. Però si vede facilmente che invece $\det A = 0$, in quanto le prime due colonne sono opposte. Quindi T non è invertibile.

Il rango di T coincide con il rango della matrice A, che evidentemente non è 3. Per affermare che è 2 possiamo osservare che ad esempio il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero (vale -1).

Una base dell'immagine di T: ricordo che le tre colonne di A sono generatori di $\mathrm{Im}T$. Non sono però una base in quanto linearmente dipendenti. Dato che il rango è 2 ci sono al più due colonne indipendenti e, in considerazione del minore considerato in precedenza, possiamo dire che la seconda e la terza colonna formano una base di $\mathrm{Im}T$.

Per determinare infine una base del sottospazio definito da $T(x) = 0$ dobbiamo chiaramente prima determinare questo sottospazio. Esso è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $T(x) = 0$. Questa significa

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Osservo che si tratta di un sistema quadrato omogeneo.[9]

Qui dobbiamo sfruttare quanto già trovato in precedenza. Anziché procedere col metodo di sostituzione, col quale è facile fare "pasticci", usiamo il metodo generale.

Dato che il rango di A è 2 e abbiamo 3 equazioni, possiamo eliminare un'equazione dipendente: la prima (coerentemente con il minore usato prima). Il sistema equivale quindi a

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Ancora in coerenza con il solito minore possiamo far diventare parametro la x_1, portandola a destra.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi date dall'insieme (sottospazio di $\mathbb{R}^3$)

$$S = \Big\{(x, x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{x(1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

L'ultima scrittura evidenzia che il vettore $(1, 1, 0)$ è il generatore e base di S, sottospazio di dimensione 1.

[9] Potremmo già dire che l'omogeneità garantisce almeno una soluzione e che $\det A = 0$ garantisce l'esistenza di infinite soluzioni (come conseguenza del teorema di Cramer).

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = (y-1)(x^2-y)$$

si trovino i suoi punti stazionari e si stabilisca la loro natura, cioè se sono eventualmente punti di massimo o di minimo. Si determini e si disegni la regione in cui la funzione è positiva, indicando infine la curva in cui si annulla.

✎

La funzione è un polinomio di terzo grado, ed è quindi definita in tutto il piano.

Calcoliamo le derivate parziali.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y-1)\cdot 2x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y + (y-1)\cdot(-1).$$

Cerchiamo ora i punti stazionari, annullando le due derivate. Occorre risolvere quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x(y-1) = 0 \\ x^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

I due sistemi equivalgono quindi a

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Pertanto abbiamo 3 punti stazionari: $(0, \frac{1}{2})$, $(-1,1)$ e $(1,1)$.

Ora dobbiamo studiare la natura di questi punti attraverso le condizioni del secondo ordine, cioè le derivate seconde. Calcoliamo quindi il gradiente secondo di f.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y-1) & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Il gradiente secondo va ora calcolato nei tre punti stazionari.

$\nabla^2 f(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice è definita negativa e pertanto il punto $(0, \frac{1}{2})$ è punto di massimo locale.

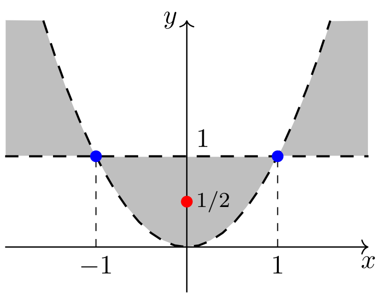
$\nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice è indefinita e pertanto il punto $(-1,1)$ è punto di sella (né di massimo né di minimo).

$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice è indefinita e pertanto il punto $(1,1)$ è punto di sella (né di massimo né di minimo).

La regione in cui la funzione è positiva è l'insieme delle soluzioni della disequazione $(y-1)(x^2-y) > 0$, che equivale ai sistemi

$$\begin{cases} y - 1 > 0 \\ x^2 - y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y - 1 < 0 \\ x^2 - y < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y > 1 \\ y < x^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y < 1 \\ y > x^2. \end{cases}$$

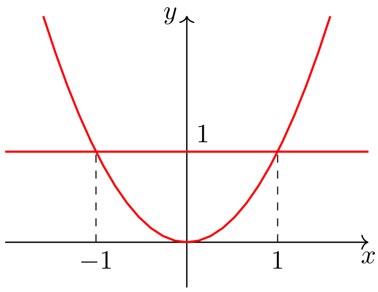
La rappresentazione della regione è qui sotto in grigio. Il punto di massimo è in rosso e i punti di sella sono in blu.



Per determinare la curva in cui la funzione si annulla basta risolvere l'equazione $(y-1)(x^2-y) = 0$, che equivale a

$$y - 1 = 0 \quad \text{oppure} \quad x^2 - y = 0 \;\text{[10]} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1 \quad \text{oppure} \quad y = x^2.$$

La funzione si annulla sui punti della retta di equazione $y = 1$ oppure sui punti della parabola di equazione $y = x^2$, indicati in rosso nella figura.



Non richiesto: per stabilire se il punto di massimo locale è anche di massimo globale si può osservare che lungo la retta di equazione $y = x$ la restrizione di f è

$$f\Big|_{y=x} = (x-1)(x^2-x) = x(x-1)^2$$

e questa quantità tende a $+\infty$ se $x \to +\infty$. Quindi il punto $(0, \frac{1}{2})$ non è di massimo globale. Il massimo globale non esiste.

[10]Attenzione, non si deve fare il sistema delle due equazioni!! Altrimenti si trovano soltanto i due punti in cui si annullano contemporaneamente entrambi i fattori.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 01/02/2016

Domanda 1. Nell'espressione $x^2e^{-x} + \sqrt{x}e^{2x}$ raccogliere xe^{-x} e, se possibile, semplificare

✎

$$x^2e^{-x} + \sqrt{x}e^{2x} = xe^{-x}\left(\frac{x^2e^{-x}}{xe^{-x}} + \frac{\sqrt{x}e^{2x}}{xe^{-x}}\right) = xe^{-x}\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}e^{3x}\right).$$

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$(x+1)e^{-x} = (x+1)e^{2x}$$

✎

Attenzione. Dividendo subito ambo i membri per $x+1$ si sbaglia, dato che si perde una possibile soluzione. L'equazione equivale a

$$(x+1)e^{-x} - (x+1)e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(e^{-x} - e^{2x}) = 0.$$

Questa equivale a

$$x+1 = 0 \quad \text{oppure} \quad e^{-x} - e^{2x} = 0 \quad \text{cioè} \quad x = -1 \quad \text{oppure} \quad e^{-x} = e^{2x}$$

e quindi $x = -1$ oppure $x = 0$. Quindi $S = \big\{-1, 0\big\}$.

Domanda 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x} > 0$$

✎

La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(x-3) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+1)(x-3) < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni $x > 3$ e il secondo $-1 < x < 0$. Quindi $S = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(x^2) + 1 < 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x^2 > 0$, che equivale (attenzione!) a $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(x^2) < -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{e}} < x < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

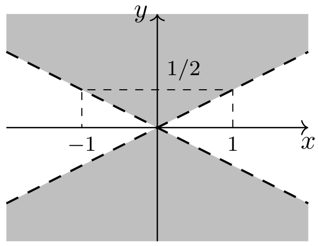
Considerando la condizione di esistenza le soluzioni sono l'insieme $S = \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - 4y^2 < 0$

✎

La disequazione equivale a $(x-2y)(x+2y) < 0$ e quindi ai sistemi

$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 2y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 2y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y < \frac{x}{2} \\ y < -\frac{x}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y > \frac{x}{2} \\ y > -\frac{x}{2}. \end{cases}$$



L'insieme è raffigurato qui sopra in grigio.

Domanda 6. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^-}\left(\ln|x| + e^{1/x}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $$\lim_{x\to 0^-}\left(\ln|x| + e^{1/x}\right) = \ln|0^-| + e^{1/0^-} = \ln 0^+ + e^{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty.$$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e^x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(e^x + \frac{\ln x}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(e^x + \frac{1-\ln x}{x^2}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\big|\ln x\big| + c. \qquad \left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\big|f(x)\big| + c.\right)$$

Domanda 9. Scrivere la matrice dei complementi algebrici della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

✎

Ricordando che il complemento algebrico dell'elemento di posto (i, j) è il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, cambiato di segno se "il posto è dispari", si ha

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = y^2\left(x + \dfrac{\ln y}{x}\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\left(1 + \ln y\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\left(x + \frac{\ln y}{x}\right) + y^2 \cdot \frac{1}{xy}.$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 01/02/2016

Domanda 1. Nell'espressione $\sqrt{x}e^x + x^2e^{-2x}$ raccogliere xe^{-2x} e, se possibile, semplificare

✎

$$\sqrt{x}e^x + x^2e^{-2x} = xe^{-2x}\left(\frac{\sqrt{x}e^x}{xe^{-2x}} + \frac{x^2e^{-2x}}{xe^{-2x}}\right) = xe^{-2x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}e^{3x} + x\right).$$

Domanda 2. Risolvere l'equazione

$$xe^x = x(1 - e^x)$$

✎

Attenzione. Dividendo subito ambo i membri per x si sbaglia, dato che si perde una possibile soluzione. L'equazione equivale a

$$xe^x - x(1 - e^x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2e^x - 1) = 0.$$

Questa equivale a

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 2e^x - 1 = 0 \quad \text{cioè} \quad x = 0 \quad \text{oppure} \quad e^x = \frac{1}{2}$$

e quindi $x = 0$ oppure $x = \ln\frac{1}{2}$. Quindi $S = \left\{0, \ln\frac{1}{2}\right\}$.

Domanda 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{x}{x^2 + x - 2} > 0$$

✎

La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x+2) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ (x-1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \ \vee \ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -2 < x < 1. \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni $x > 1$ e il secondo $-2 < x < 0$. Quindi $S = (-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(x^2) - 1 < 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x^2 > 0$, che equivale (attenzione!) a $x \neq 0$. Poi la disequazione equivale a

$$\ln(x^2) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < e \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}.$$

Considerando la condizione di esistenza le soluzioni sono l'insieme $S = \left(-\sqrt{e}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{e}\right)$.

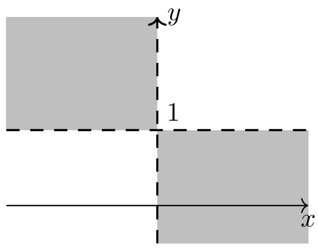
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy - x < 0$

✎

Raccogliendo x, la disequazione equivale a $x(y - 1) < 0$ e quindi ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y > 1. \end{cases}$$

L'insieme è raffigurato qui sotto in grigio.



Domanda 6. Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{x}+e^{-x^2}\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti $\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{x}+e^{-x^2}\right)=\ln\frac{1}{+\infty}+e^{-(+\infty)^2}=\ln 0^+ + e^{-\infty}=-\infty+0=-\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=\frac{1}{x}\left(\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$

✎

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\ln x+\frac{e^x}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}\right).$$

Domanda 8. Calcolare l'integrale $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}(\ln x)^{1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{(\ln x)^{3/2}}{3/2}+c=\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+c. \qquad \left(\int f^\alpha(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c.\right)$$

Domanda 9. Scrivere la matrice dei complementi algebrici della matrice $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

✎

Ricordando che il complemento algebrico dell'elemento di posto (i,j) è il determinante della sottomatrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, cambiato di segno se "il posto è dispari", si ha

$$\begin{pmatrix}-7&-1&5\\-1&5&-7\\5&-7&-1\end{pmatrix}.$$

Domanda 10. Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)=x^2\left(y+\frac{\ln x}{y}\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\left(y+\frac{\ln x}{y}\right)+x^2\cdot\frac{1}{xy}\qquad\text{e}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\left(1+\ln x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right).$$

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/02/2016

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{-x},$$

dopo averne studiato il segno, i limiti significativi e la derivata, si arrivi a disegnarne un possibile grafico. Si determinino i punti di massimo e di minimo di f nell'intervallo $[0,3]$ e i corrispondenti valori massimo e minimo. Si disegni infine il grafico della funzione $-f(x+1)$.

✎

Osserviamo che non ci sono condizioni di esistenza e quindi la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Cominciamo con il segno. Studiamo dove la funzione è positiva.

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)e^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1>0 \\ e^{-x}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1<0 \\ e^{-x}<0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>1 \\ e^{-x}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<1 \\ e^{-x}<0. \end{cases}$$

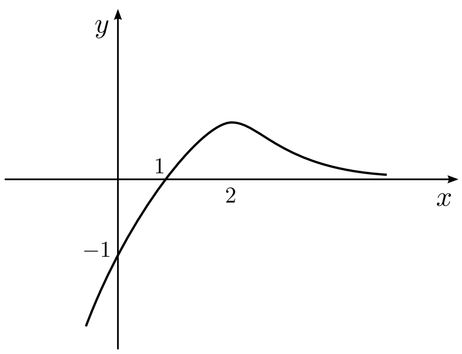
Osservando che la seconda disequazione è sempre vera nel primo sistema e sempre falsa nel secondo, la funzione f risulta positiva per $x > 1$, negativa per $x < 1$ e si annulla in $x = 1$.

I limiti significativi sono soltanto gli infiniti. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x} = (-\infty-1)e^{+\infty} = -\infty\cdot(+\infty) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x} = (+\infty-1)e^{-\infty} = +\infty\cdot 0 \quad \text{(forma indeterminata)}.$$



Per risolvere la forma indeterminata basta ad esempio fare

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$ [11]

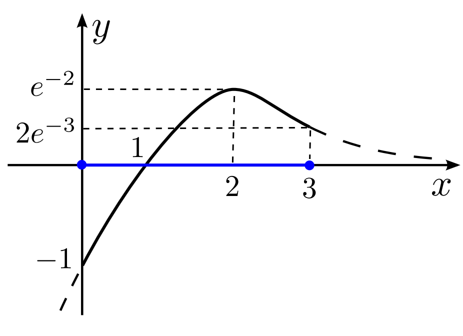
Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x+1) = e^{-x}(2-x).$$

Chiaramente c'è un solo punto stazionario: $x = 2$. Ricordando che la funzione esponenziale è sempre positiva, la derivata di f risulta positiva per $x < 2$ e negativa per $x > 2$. Quindi la funzione f è crescente in $(-\infty, 2]$, decrescente in $[2,+\infty)$ e ha un punto di massimo (globale) in $x = 2$.

Un possibile grafico è quello riportato qui sopra.

Ora consideriamo la funzione nell'intervallo $[0,3]$ per determinarne i punti di massimo e di minimo e i corrispondenti valori massimo e minimo.

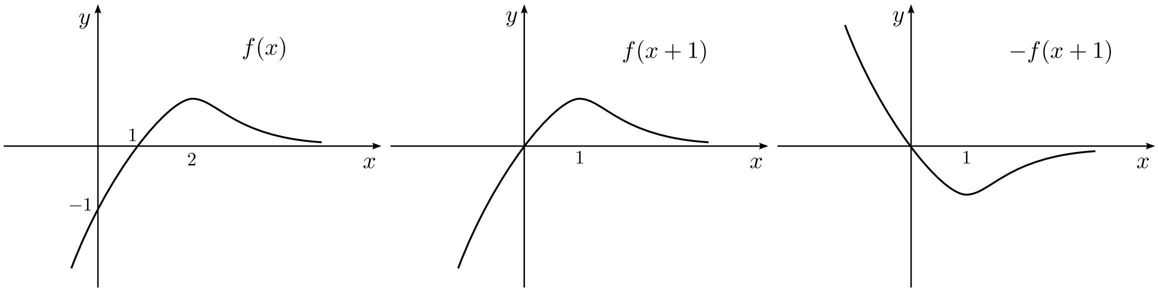


Dal grafico ottenuto si vede che nell'intervallo $[0,3]$ la funzione è crescente da 0 a 2 e poi decrescente fino a 3. Il punto di minimo è $x_m = 0$ e il punto di massimo è $x_M = 2$. I valori corrispondenti sono

$$f(x_m) = f(0) = -1 = \min_{x\in[0,3]} f \qquad \text{e} \qquad f(x_M) = f(2) = e^{-2} = \max_{x\in[0,3]} f.$$

Per disegnare infine il grafico della funzione $-f(x+1)$ basta usare le trasformazioni grafiche elementari applicandole al grafico che abbiamo ottenuto della funzione f. Serve uno spostamento a sinistra di 1 e un "ribaltamento" rispetto all'asse x. Ecco i due passaggi.

[11] Si poteva anche ricorrere al fatto che, trascurata la costante, è un confronto standard.



ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ -x + y = 3. \end{cases}$$

Si scrivano anzitutto le matrici del sistema. Si provi, attraverso il teorema di Rouché–Capelli, che il sistema ha soluzioni. Successivamente si risolva il sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

✎

Le matrici del sistema, cioè le matrici incompleta e completa, sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se il rango di A è uguale al rango di $(A|b)$. Il determinante di A si annulla, ad esempio osservando che le prime due colonne sono opposte. Quindi il rango di A non è 3. Il minore complementare dell'elemento di posto $(1, 1)$ è diverso da zero (vale -1) e quindi il rango di A è 2.

Passiamo ad $(A|b)$, che potrebbe avere rango 3.

Possiamo calcolare i tre minori del terzo ordine[12] (troveremmo che sono tutti nulli) oppure osservare che la terza riga è combinazione lineare delle prime due, dato che si ottiene dalla prima più due volte la seconda. Questo permette di affermare che il rango di $(A|b)$ non è 3 e quindi è 2 grazie ad esempio allo stesso minore considerato poco fa per A. Essendo uguali i due ranghi, il sistema ha soluzioni.

Dobbiamo ora risolvere il sistema $Ax = b$. Si tratta di un sistema quadrato 3×3, ma con rango 2. Il metodo di risoluzione generale prevede quindi di eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e di trasformare in parametro una delle variabili. Eliminando la prima equazione e trasformando in parametro la variabile x (questo coerentemente con il minore del secondo ordine che abbiamo considerato ai fini del rango), possiamo trasformare il sistema nel sistema equivalente

$$\begin{cases} y + z = 1 + x \\ y = 3 + x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ z = 1 + x - 3 - x \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 3 + x \\ z = -2. \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere le soluzioni, date dall'insieme

$$S = \Big\{(x, 3 + x, -2) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Per ottenere, come richiesto, una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato basta scrivere le soluzioni nella forma equivalente

$$S = \Big\{(0, 3, -2) + x(1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\Big\},$$

dalla quale si ricava che $(0, 3, -2)$ è una soluzione particolare e che le soluzioni del sistema omogeneo associato sono i vettori del tipo $x(1, 1, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$ (cioè i multipli del vettore $(1, 1, 0)$).

[12] In $(A|b)$ ci sono 4 sottomatrici quadrate di ordine 3, ma il determinante di una di queste (cioè A) lo abbiamo già calcolato.

Infine, la dimensione delle soluzioni del sistema omogeneo associato è 1 (lo si vede dal numero di parametri che permettono di esprimerle oppure dalla formula $n - r(A) = 3 - 2 = 1$) e una base è formata dal vettore $(1, 1, 0)$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = (x - 1)(y^2 - x)$$

si trovino i suoi punti stazionari e si stabilisca la loro natura, cioè se sono eventualmente punti di massimo o di minimo. Si determini e si disegni la regione in cui la funzione è positiva, indicando infine la curva in cui si annulla.

✎

La funzione è un polinomio di terzo grado, ed è quindi definita in tutto il piano.

Calcoliamo le derivate parziali.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - x + (x - 1) \cdot (-1) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x - 1) \cdot 2y.$$

Cerchiamo ora i punti stazionari, annullando le due derivate. Occorre risolvere quindi il sistema

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x - 1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

I due sistemi equivalgono quindi a

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Pertanto abbiamo 3 punti stazionari: $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$.

Ora dobbiamo studiare la natura di questi punti attraverso le condizioni del secondo ordine, cioè le derivate seconde. Calcoliamo quindi il gradiente secondo di f.

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2(x - 1) \end{pmatrix}.$$

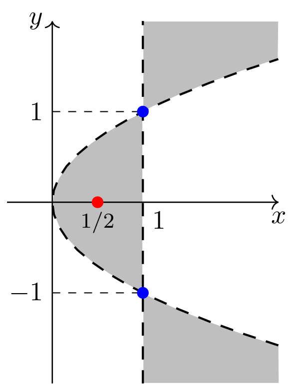
Il gradiente secondo va ora calcolato nei tre punti stazionari.

$\nabla^2 f(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice è definita negativa e pertanto il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ è punto di massimo locale.

$\nabla^2 f(1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice è indefinita e pertanto il punto $(1, -1)$ è punto di sella (né di massimo né di minimo).

$\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice è indefinita e pertanto il punto $(1, 1)$ è punto di sella (né di massimo né di minimo).

La regione in cui la funzione è positiva è l'insieme delle soluzioni della disequazione $(x - 1)(y^2 - x) > 0$, che equivale ai sistemi



$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y^2 - x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 < 0 \\ y^2 - x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < y^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x > y^2. \end{cases}$$

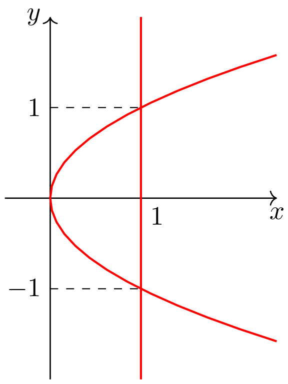
La rappresentazione della regione è qui a destra in grigio. Sono anche indicati il punto di massimo in rosso e i due punti di sella in blu.

Per determinare la curva in cui la funzione si annulla basta risolvere l'equazione

$$(x - 1)(y^2 - x) = 0,$$

che equivale a

$$x - 1 = 0 \quad \text{oppure} \quad y^2 - x = 0 \;^{13} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{oppure} \quad x = y^2.$$



La funzione si annulla quindi sui punti della retta di equazione $x = 1$ oppure sui punti della parabola di equazione $x = y^2$, indicati in rosso nella figura qui sopra.

Non richiesto: per stabilire se il punto di massimo locale è anche di massimo globale si può osservare che lungo la retta di equazione $y = x$ la restrizione di f è

$$f\Big|_{y=x} = (x-1)(x^2-x) = x(x-1)^2$$

e questa quantità tende a $+\infty$ se $x \to +\infty$. Quindi il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ non è di massimo globale. Il massimo globale non esiste.

[13] Attenzione, non si deve fare il sistema delle due equazioni!! Altrimenti si trovano soltanto i due punti in cui si annullano contemporaneamente entrambi i fattori.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 27/06/2016

Domanda 1. Dire se esiste un polinomio $P(x)$ tale che $(x+1)\cdot P(x) = x^3 + x$

✎

La domanda equivale a chiedersi se $A(x) = x^3 + x$ è divisibile per $x+1$. Per il teorema di Ruffini basta calcolare $A(x)$ in $x=-1$. Si ha $A(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \neq 0$ e quindi, appunto per il teorema di Ruffini, $A(x)$ non è divisibile per $x+1$, e cioè non esiste un polinomio $P(x)$ come richiesto.

Domanda 2. Nell'espressione $e^{x/4}\ln 4 + e^{x/2}\ln 2$ raccogliere $e^{x/4}\ln 2$ e semplificare

✎

$$e^{x/4}\ln 4 + e^{x/2}\ln 2 = e^{x/4}\ln 2\left(\frac{e^{x/4}\ln 4}{e^{x/4}\ln 2} + \frac{e^{x/2}\ln 2}{e^{x/4}\ln 2}\right) = e^{x/4}\ln 2\left(\frac{\ln(2^2)}{\ln 2} + e^{x/2-x/4}\right) = e^{x/4}\ln 2\Big(2 + e^{x/4}\Big).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\ln\left(x^3\right) + \ln x + 1 = 0$$

✎

L'equazione è definita per $x > 0$. Ricordando che $\ln\left(x^3\right) = 3\ln x$, possiamo riscrivere l'equazione come

$$3\ln x + \ln x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1/4}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$x + \frac{1}{x} < 1$$

✎

La disequazione è definita per $x \neq 0$. Equivale a

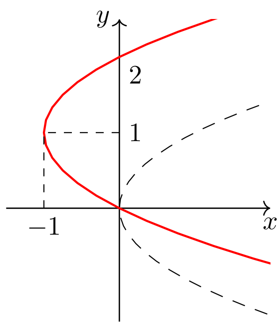
$$x + \frac{1}{x} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x + 1}{x} < 0.$$

Il polinomio a numeratore è positivo per ogni x, dato che "il delta" è negativo. Quindi la frazione è negativa se e solo se $x < 0$, che sono le soluzioni.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x + 1 = (y-1)^2$

✎

Fornisco due modi per arrivare al disegno della curva.



A partire dall'equazione $x = y^2$, relativa ad una parabola con asse orizzontale, vertice nell'origine e concavità rivolta verso destra, si può osservare che l'equazione data si ottiene sostituendo $x+1$ al posto di x e $y-1$ al posto di y. Come noto questo equivale ad una traslazione della parabola originaria che porta il vertice nel punto $(-1, 1)$. Il disegno è quindi quello qui a destra.

Un altro modo può essere la riscrittura dell'equazione nella forma equivalente

$$x + 1 = y^2 - 2y + 1 \qquad ; \qquad x = y^2 - 2y \qquad ; \qquad x = y(y-2).$$

Si tratta quindi della parabola con asse orizzontale, concavità rivolta verso destra, che interseca l'asse y in $y=0$ e $y=2$. La stessa disegnata prima.

Domanda 6. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{\ln\left({}^1\!/x\right)}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{\ln\left({}^1\!/x\right)} = \frac{\ln\left(1^+-1\right)}{\ln\left({}^1\!/1^+\right)} = \frac{\ln 0^+}{\ln 1^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(x^2\right)\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right)\cdot\frac{1}{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x}\ln x.$$

Domanda 8. Trovare una primitiva di $f(x) = x^2\ln x$

✎

Una primitiva si può trovare calcolando l'integrale indefinito di f. Per parti:

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Una primitiva in particolare può essere quella con $c = 0$ (o qualunque altro valore).

Domanda 9. Determinare un vettore non nullo ortogonale a $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

✎

Si tratta di un qualunque vettore (non nullo) (x, y) il cui prodotto interno con il vettore dato dia come risultato zero. Quindi

$$\left\langle (x,y)\ ,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}x + y = 0.$$

Qualunque soluzione (tranne che $x = y = 0$) va bene: ad esempio $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$. Quindi un vettore è $\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Domanda 10. Dire se il punto $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ è di massimo per la funzione $f(x,y) = x^2 + 3x + y^2 + y$

✎

Ricordiamo anzitutto che per essere un punto di massimo deve essere un punto stazionario. Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \left(2x+3, 2y+1\right).$$

Questo vettore non si annulla nel punto assegnato, dato che $\nabla\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 2)$. Quindi il punto assegnato non può essere di massimo.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 29/06/2016

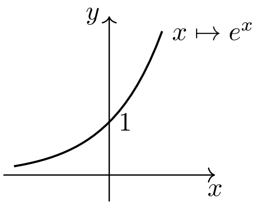
ESERCIZIO 1. Data la funzione

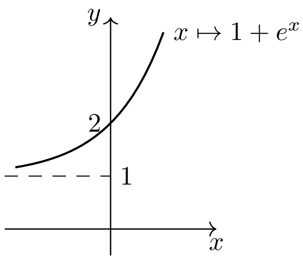
$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^x & -1 \le x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & 0 \le x \le 1 + \sqrt{2}, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si dica qual è l'immagine di f, quali sono i suoi punti di massimo/minimo globali e i corrispondenti valori, cioè il massimo e il minimo di f. Si dica poi se f è continua e derivabile in $\big(-1, 1 + \sqrt{2}\big)$ e si scriva l'espressione della derivata nei punti in cui questa esiste.

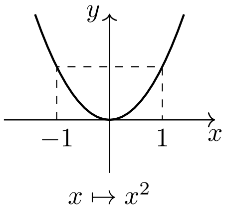
✎

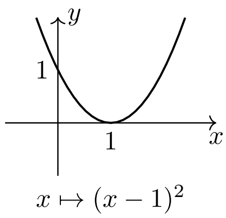
La trasformazione grafica elementare della funzione esponenziale è riportata qui sotto.



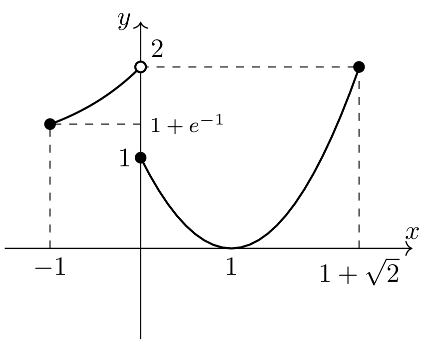


Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto. Conviene considerare che $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.





Il grafico della funzione f è pertanto quello qui sotto.



Dal grafico possiamo affermare che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume, è l'intervallo $[0, 2]$.

Il minimo di f è quindi 0 e il massimo è 2. Punto di minimo globale è $x_m = 1$, con appunto $f(1) = 0$, e punto di massimo globale è $x_M = 1 + \sqrt{2}$, con $f(1 + \sqrt{2}) = 2$.

Passiamo alla continuità e derivabilità. Dal grafico si vede che f non è continua in $x = 0$, unico punto di non continuità. Per motivare la cosa in modo più rigoroso dobbiamo dire quanto segue.

La funzione f è certamente continua negli intervalli $[-1, 0)$ e $\Big(0, 1+\sqrt{2}\Big]$, in quanto in tali intervalli la funzione coincide con trasformazioni di funzioni elementari.

Nel punto $x = 0$ possiamo dire che $f(0) = 1$ (attraverso il polinomio) e che f è continua da destra. Ma

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + e^x) = 2$$

e quindi f non è continua da sinistra in zero.

Passiamo alla derivabilità. Possiamo dire subito che f non è derivabile in $x = 0$, dato che non è continua in $x = 0$. In tutti gli altri punti f è certamente derivabile, dato che coincide con funzioni elementari, e possiamo scrivere direttamente l'espressione della derivata, dove questa esiste:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & -1 \le x < 0 \\ 2x - 2 & 0 < x \le 1 + \sqrt{2}, \end{cases}$$ [14]

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (0, 1, 0, -1) \quad , \quad v^2 = (1, 0, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (-1, 1, 0, 0),$$

e detto V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ da essi generato, si dica, motivando adeguatamente la risposta, se v^1, v^2, v^3 sono una base di V. Successivamente si determini la dimensione di V. Indicata poi con A la matrice formata con i tre vettori disposti in riga, si dica se il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A coincide oppure no con $\mathbb{R}^3$. Si indichi infine una base di questo sottospazio.

✎

Essendo i tre vettori chiaramente generatori del sottospazio V da essi generato, per essere una base di questo sarà necessario e sufficiente che essi siano linearmente indipendenti. La dipendenza o indipendenza può essere studiata con la definizione, ma conviene servirsi dei legami tra questa e il rango della matrice formata con i tre vettori: i tre vettori sono l.i. se e solo se il rango della matrice è 3. La matrice (dispongo i vettori in riga, è comunque indifferente), è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È facile accorgersi che la prima riga è la somma delle altre due. Questo è sufficiente per dire che il rango di A non è 3. Anche senza calcolarlo esattamente (è comunque 2) possiamo dire che i tre vettori non sono una base di V.

La dimensione di V è uguale al rango di A, quindi 2 (ad esempio grazie al minore formato con le prime due righe e le prime due colonne).

Ora occupiamoci del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Possiamo dire subito che la sua dimensione è la stessa di V, cioè 2, dato che anche questa è uguale al rango di A. Pertanto questo sottospazio non può essere tutto $\mathbb{R}^3$, che ha dimensione 3.

Una base del sottospazio generato dalle colonne di A è data da una coppia di colonne indipendenti. Si vede facilmente che può andare bene una qualunque coppia di colonne, purché non ci sia nella coppia la terza colonna, che è il vettore nullo.[15]

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) - \ln\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si indichino poi nel dominio i punti in cui la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

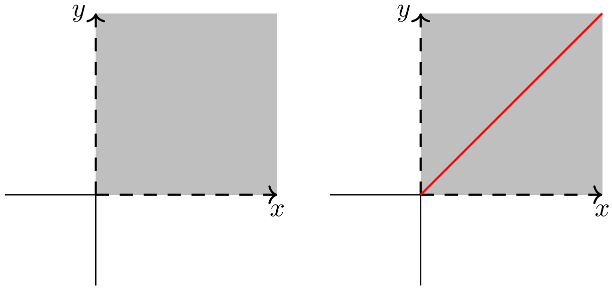
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} > 0 \\ \frac{y^2}{x} > 0 \\ x, y \neq 0. \end{cases}$$

[14] La derivabilità agli estremi si intende o da destra o da sinistra.

[15] Ricordo che per verificare che due colonne sono linearmente indipendenti il modo più rapido è calcolare il rango della sottomatrice di A formata da quelle due colonne e verificare che questo è 2. Quindi, ad esempio, le prime due colonne sono l.i. in quanto nella relativa sottomatrice il minore formato dalle prime due righe è diverso da zero.

Dato che con $x, y \neq 0$ i rispettivi quadrati sono certamente positivi, le soluzioni del sistema sono semplicemente $x > 0$ e $y > 0$, condizioni che individuano il primo quadrante (aperto, cioè senza i punti sugli assi cartesiani).

Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.



I punti in cui la funzione f si annulla sono le soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, cioè

$$\ln\left(\frac{x^2}{y}\right) - \ln\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = \ln\left(\frac{y^2}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x}.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per xy (certamente diverso da zero) otteniamo

$$x^3 = y^3, \text{ che equivale a } x = y.$$

Si tratta quindi dei punti che stanno sulla bisettrice del quadrante. Sono rappresentati in rosso nella figura sopra a destra.

Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2/y} \cdot \frac{2x}{y} - \frac{1}{y^2/x} \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2/y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{1}{y^2/x} \cdot \frac{2y}{x} = -\frac{1}{y} - \frac{2}{y} = -\frac{3}{y}.$$

Quindi si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{3}{x}\ ,\ -\frac{3}{y}\right)$$

ed è facile vedere che questo vettore non può mai essere nullo, dato che entrambe le derivate parziali non si possono mai annullare. Quindi non ci sono punti stazionari.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 29/08/2016

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3$

✎

Prima il raccoglimento di x^3 e poi la scomposizione del polinomio di secondo grado:

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 = x^3(x^2 - 2x - 3) = x^3(x + 1)(x - 3).$$

Domanda 2. Nell'espressione $\sqrt{x}\, e^{2x} + \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ raccogliere $\sqrt[3]{x}\, e^x$ e semplificare

✎

$$\sqrt{x}\, e^{2x} + \sqrt[3]{x}\, e^{-x} = \sqrt[3]{x}\, e^x \left(\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}e^{2x-x} + e^{-x-x}\right) = \sqrt[3]{x}\, e^x \Big(x^{1/2-1/3}e^x + e^{-2x}\Big) = \sqrt[3]{x}\, e^x \Big(x^{1/6}e^x + e^{-2x}\Big).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\ln x + \ln(2x) = 0$$

✎

Dobbiamo assumere $x > 0$ per la condizione di esistenza. Propongo diversi modi per arrivare alla soluzione.
Ricordando che $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ $(a, b > 0)$, l'equazione equivale a

$$\ln(2x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e soltanto la soluzione positiva $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è accettabile.
Secondo modo. Per la stessa proprietà $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ $(a, b > 0)$, l'equazione equivale anche a

$$\ln x + \ln x + \ln 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln x = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2}\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}\ln 2},$$

che naturalmente è solo un modo diverso di scrivere $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Si noti che in questo caso si trova direttamente soltanto la soluzione positiva.)
Terzo modo. L'equazione equivale a

$$\ln(2x) = -\ln x$$

e, ricordando che $-\ln x = \ln x^{-1} = \ln\frac{1}{x}$ (oppure $\ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$), si ha

$$\ln(2x) = \ln\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1$$

e si ritrova la stessa equazione intera del primo modo.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{2}{x} + 1 < \frac{4}{x^2} - 1$$

✎

La condizione di esistenza è $x \neq 0$. Poi l'equazione equivale a

$$2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + x - 2}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x^2} < 0.$$

Dato che x^2 non può essere negativo, la disequazione fratta equivale al solo sistema

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2 < x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'insieme $S = (-2, 0) \cup (0, 1)$.

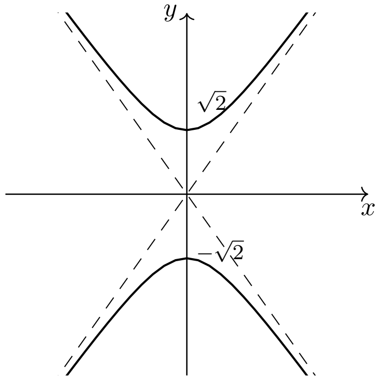
Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = \dfrac{y^2}{2}$

✎

Possiamo semplicemente riscrivere l'equazione nella forma

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = -1$$

e riconoscere la forma generale $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, con $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$, le cui soluzioni sono i punti di un'iperbole con centro l'origine, asintoti obliqui e rami che stanno al di sopra e al di sotto del centro. Precisamente possiamo anche notare che le pendenze degli asintoti sono date da $m = \pm\frac{b}{a} = \pm\sqrt{2}$.



Domanda 6. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln\left(1 - x^2\right)}{e^{x-1} - 1}$

✎

Con l'algebra dei limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln\left(1 - x^2\right)}{e^{x-1} - 1} = \frac{\ln\left(1 - 1^-\right)}{e^{1^- - 1} - 1} = \frac{\ln(0^+)}{e^{0^-} - 1} = \frac{-\infty}{1^- - 1} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$

Domanda 7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{1/x} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

✎

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + e^{1/x} \cdot \frac{1}{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{1}{1/x^2} e^{1/x}\left(\ln\frac{1}{x^2} + 2x\right).$$

Domanda 8. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

✎

Una primitiva si può trovare calcolando l'integrale indefinito di f per parti:[16]

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

Quindi per l'integrale definito si ha

$$\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Domanda 9. Dire se il vettore nullo può essere scritto come combinazione lineare a coefficienti non nulli dei due vettori $(1, -2)$ e $(-1, 3)$

✎

Si può rispondere molto velocemente alla domanda osservando che i due vettori sono linearmente indipendenti (ad esempio perché il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ è diverso da zero). Sappiamo che questo significa che l'unico modo per scrivere il vettore nullo come combinazione lineare dei due vettori è il modo banale, cioè con coefficienti entrambi nulli. Pertanto la risposta alla domanda è no.

Si poteva anche cercare la risposta scrivendo le combinazioni lineari e uguagliandole al vettore nullo:

$$a(1, -2) + b(-1, 3) = (0, 0) \quad\Leftrightarrow\quad (a - b, -2a + 3b) = (0, 0) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + 3b = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a = b \\ a = 0. \end{cases}$$

[16] Parte finita x e parte differenziale e^{-x}. Una primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$.

L'unica soluzione è con coefficienti entrambi nulli.

Domanda 10. Dire se l'origine è punto di minimo per la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$

✎

Ricordiamo anzitutto che per essere un punto di minimo deve essere un punto stazionario. Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = \big(2x + 1, 2y\big).$$

Questo vettore non si annulla nell'origine, dato che $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. Quindi il punto assegnato non può essere di minimo.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 31/08/2016

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = x^2\, e^{-x},$$
dopo averne studiato il segno, i limiti significativi e la derivata, si arrivi a disegnarne un possibile grafico. Si indichino poi i punti di massimo e di minimo di f nell'intervallo $[-1, 1]$ e i corrispondenti valori massimo e minimo in tale intervallo. Usando le trasformazioni grafiche elementari si disegni infine il grafico della funzione $f(|x|)$.

✎

Osserviamo che non ci sono condizioni di esistenza e quindi la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Cominciamo con il segno. Studiamo dove la funzione è positiva.

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2e^{-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 < 0 \\ e^{-x} < 0. \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni dato che entrambe le sue disequazioni sono impossibili. Nel primo sistema la seconda disequazione è sempre vera e la prima equivale a $x \neq 0$. Quindi possiamo concludere che la funzione f è positiva per ogni x diverso da zero e si annulla in x uguale a zero.[17]

I limiti significativi sono soltanto gli infiniti. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (-\infty)^2 \cdot e^{+\infty} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = (+\infty)^2 \cdot e^{-\infty} = +\infty \cdot 0 \quad \text{(forma indeterminata)}.$$

Portando a denominatore l'esponenziale il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \text{(confronto standard potenza/esponenziale)}.$$

Calcoliamo la derivata.
$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = xe^{-x}(2 - x).$$

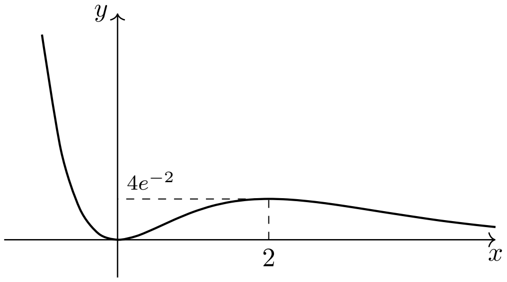
La derivata si annulla in $x = 0$ e $x = 2$, punti stazionari e possibili punti di massimo/minimo.

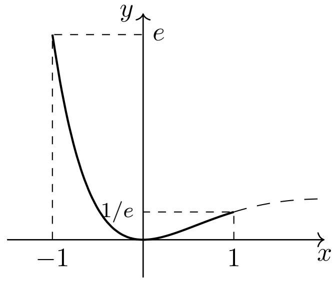
Studiamo il segno della derivata. Dato che l'esponenziale è sempre positivo, la derivata è positiva se e solo se

$$x(2 - x) > 0, \text{ cioè per } 0 < x < 2.$$

Pertanto possiamo affermare che la funzione f decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, 2)$ e ancora decresce in $(2, +\infty)$. Quindi $x = 0$ è punto di minimo e $x = 2$ è punto di massimo.

Un possibile grafico della funzione f è pertanto quello qui sotto a sinistra.





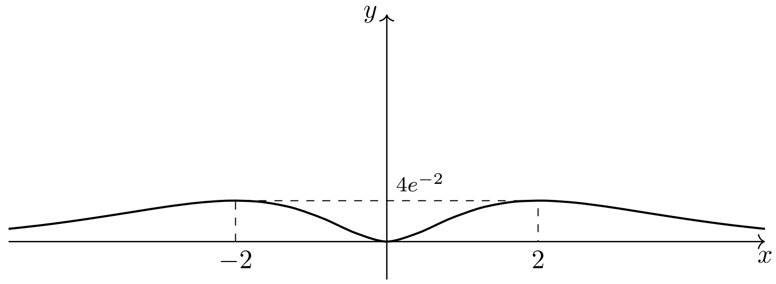
[17] Al risultato si poteva arrivare molto più velocemente osservando che l'esponenziale è sempre positivo e il quadrato è appunto anch'esso sempre positivo ad eccezione dell'origine, in cui si annulla.

Considerando ora la funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$ (figura sopra a destra), si vede che $x = 0$ è certamente punto di minimo globale, con associato il valore $f(0) = 0$ (minimo di f). Per quanto riguarda il punto di massimo è chiaro che la disputa è fra i due estremi. Si ha $f(-1) = e$ e $f(1) = \frac{1}{e}$. Pertanto il punto di massimo globale è $x = -1$, con associato il valore $f(-1) = e$ (massimo di f). Da notare anche che $x = 1$ è punto di massimo locale.

Infine disegniamo il grafico di $f(|x|)$ usando le trasformazioni grafiche elementari. Ricordo che la definizione di valore assoluto di x porta a scrivere:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi il grafico cercato, detto a parole, è il seguente: per $x \geq 0$ coincide con il grafico di f, mentre per $x < 0$ è il grafico di $f(-x)$, che si ottiene per simmetria sulle x negative da quello che abbiamo sulle x positive. Quindi si ha



ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$Ax = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Che cosa si può affermare in base al teorema di Rouché–Capelli? Si scrivano poi le soluzioni del sistema, indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi poi la dimensione e una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si indichi infine un vettore di $\mathbb{R}^4$ che non è una soluzione del sistema.

✎

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Il teorema di Rouché–Capelli afferma che il sistema ha almeno una soluzione se e solo se il rango di A è uguale al rango di $(A|b)$. Per determinare il rango di A possiamo fare in vari modi.

Il modo più veloce è sicuramente osservare che la terza riga è la somma delle prime due. Questo permette di dire che le righe sono linearmente dipendenti e quindi che il rango di A non è 3. Per arrivare alla stessa conclusione si possono anche calcolare i determinanti delle 4 sottomatrici quadrate 3×3 di A, provando che questi determinanti sono tutti nulli. Seguendo questa via è opportuno però osservare che in A ci sono due colonne uguali e quindi che in realtà basta il calcolo di un solo determinante, ad esempio quello della sottomatrice formata con la prima, seconda e terza colonna.

Dato che il rango non è 3, per poter affermare che è 2 basta indicare una sottomatrice 2×2 con determinate diverso da zero e conviene indicare quella formata dalla prima e terza riga e prime due colonne (questa scelta semplifica la ricerca delle soluzioni, come vediamo subito).

Ora passiamo al rango di $(A|b)$. Si può osservare che anche in $(A|b)$ la terza riga continua ad essere la somma delle prime due. Quindi nemmeno il rango di $(A|b)$ è 3 e dunque è necessariamente 2. Volendo procedere con i determinanti occorre in generale calcolare i minori di ordine 3 che non sono già stati calcolati in A, e quindi quelli che contengono il vettore b (e sono 6). Ma, osservando che b è uguale alla seconda colonna, anche qui si può concludere subito che l'aggiunta di b non può fare aumentare il rango.

Quindi, in base al teorema di Rouché–Capelli, possiamo affermare che il sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione.

Dobbiamo ora risolvere il sistema stesso. Si tratta di un sistema di tre equazioni e quattro incognite (chiamiamole x, y, z, t), con rango 2. Possiamo eliminare un'equazione (in quanto dipendente dalle altre) e avremo due variabili che

diventano parametri. Avendo osservato che il rango è 2 grazie al minore che si ottiene con la prima e terza riga e le prime due colonne, eliminiamo la seconda equazione e trasformiamo in parametro le variabili z, t.
Il sistema equivalente è quindi

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ x - z + t = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = 1 + z \\ x = z - t. \end{cases}$$ [18]

Possiamo scrivere direttamente le soluzioni, che sono date dall'insieme

$$S = \Big\{ (z - t, 1 + z, z, t) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Scrivano ora le soluzioni indicando una soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato. Basta "scomporre" il vettore soluzione in

$$(z - t, 1 + z, z, t) = (0, 1, 0, 0) + z(1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1),$$

e quindi $(0, 1, 0, 0)$ è una soluzione particolare del sistema e

$$\Big\{ z(1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}$$

è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.
La dimensione di tale sottospazio di $\mathbb{R}^4$ è 2 (vi sono 2 generatori indipendenti) e una sua base è data dai due vettori $(1, 1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 0, 1)$.
Infine un vettore di $\mathbb{R}^4$ che non è una soluzione del sistema: banalmente il vettore nullo, dato che il sistema non è omogeneo. Oppure, alternativamente, il primo vettore fondamentale $(1, 0, 0, 0)$, o tanti altri.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\ln x}{x - y}$$

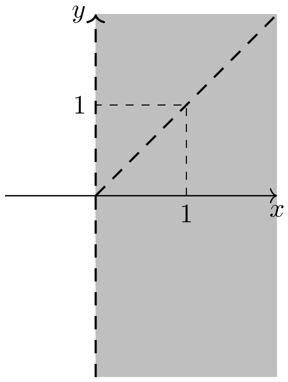
si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si indichino poi nel dominio i punti in cui la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione. Si scriva infine la restrizione di f alla curva di equazione $xy = 1$ precisando se tale curva è interamente contenuta nel dominio della funzione oppure no.

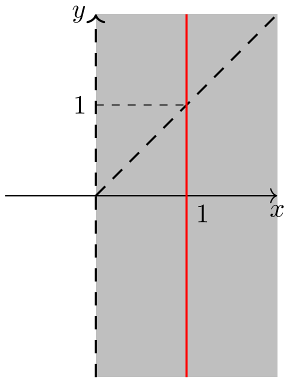
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - y \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y \neq x. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i punti del primo o del quarto quadrante ad eccezione di quelli che stanno sulla bisettrice del primo. Il dominio di f è rappresentato in grigio qui sotto a sinistra.





[18] Qui si vede il motivo per cui la scelta del minore è importante per la rapidità del calcolo delle soluzioni. La possibile scelta alternativa del minore formato dalle prime due righe e prime due colonne avrebbe comportato qualche (piccolo) calcolo in più.

I punti in cui la funzione f si annulla sono le soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, cioè

$$\frac{\ln x}{x-y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Si tratta quindi dei punti del dominio che stanno sulla retta di equazione $x = 1$. Sono rappresentati in rosso nella figura sopra a destra.

Calcoliamo il gradiente di f. Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{x}(x-y) - \ln x}{(x-y)^2} = \frac{1 - \frac{y}{x} - \ln x}{(x-y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x \left(-\frac{1}{(x-y)^2} \right) \cdot (-1) = \frac{\ln x}{(x-y)^2}.$$

Quindi si ha

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2} \left(1 - \frac{y}{x} - \ln x \ , \ \ln x \right).$$ [19]

Cerchiamo i punti stazionari, che devono annullare entrambe le derivate. Dopo aver osservato che la quantità "portata fuori dal vettore", cioè $\frac{1}{(x-y)^2}$, non può annullarsi, conviene iniziare dalla seconda componente, che è più facile: si annulla solo se $x = 1$. Sostituendo $x = 1$ nella prima abbiamo l'equazione

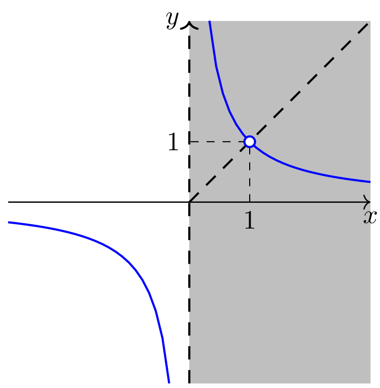
$$1 - y = 0,$$

che quindi fornirebbe la soluzione $(1, 1)$, che però non è accettabile in quanto il punto non appartiene al dominio della funzione. Non ci sono quindi punti stazionari.

Consideriamo infine la curva di equazione $xy = 1$ e scriviamo la restrizione di f a tale curva. Dato che possiamo esprimere la curva con l'equazione equivalente $y = \frac{1}{x}$, la restrizione sarà

$$f\Big|_{y=1/x} = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

La curva è l'iperbole con centro l'origine e rami che stanno nel primo o nel terzo quadrante, e quindi essa non è interamente contenuta nel dominio della funzione, dato che il ramo di sinistra è completamente al di fuori del dominio e anche nel ramo di destra il punto $(1, 1)$ non fa parte del dominio. La figura qui sotto illustra la situazione.



[19] La moltiplicazione scalare dei vettori consente di scrivere in questo modo, in pratica "portando fuori" una quantità moltiplicativa comune nelle componenti del vettore.