Svolgimento dei temi d'esame di Matematica
Anno Accademico 2018/19

Alberto Peretti

Settembre 2019

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/11/2018

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $x^3 + x - 1$ per $x + 1$

Possiamo usare la divisione di Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}$$

Pertanto il quoziente è $Q(x) = x^2 - x + 2$ e il resto è $R = -3$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x+1}}$

Abbiamo

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$e^{1+1/x} = 2$$

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$, l'equazione equivale a

$$1 + \frac{1}{x} = \ln 2 \quad ; \quad \frac{1}{x} = \ln 2 - 1 \quad ; \quad x = \frac{1}{\ln 2 - 1}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(1 + 3x) - 1 < 0$$

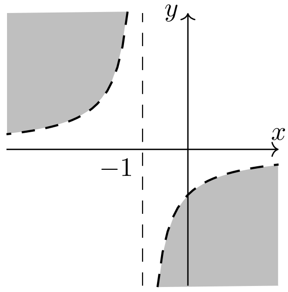
Con la condizione di esistenza $1 + 3x > 0$, cioè $x > -\frac{1}{3}$, la disequazione equivale a

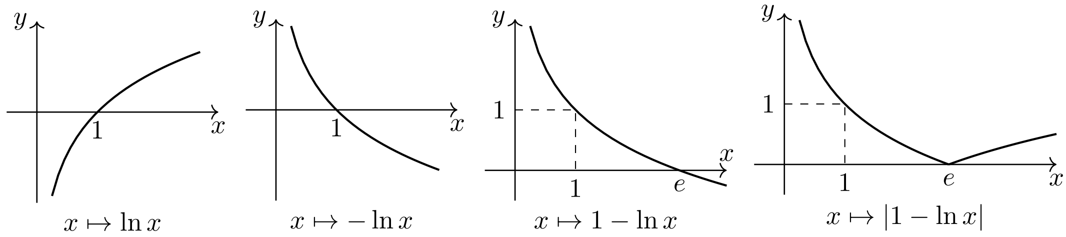
$$\ln(1 + 3x) < 1 \quad ; \quad 1 + 3x < e \quad ; \quad x < \frac{e-1}{3}.$$

Tenendo conto della condizione di esistenza le soluzioni sono $-\frac{1}{3} < x < \frac{e-1}{3}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + y + 1 < 0$

La disequazione si può scrivere come $(x+1)y < -1$ e quindi si tratta della regione delimitata da un'iperbole con asintoti paralleli agli assi cartesiani, centro in $(-1, 0)$ e rami che stanno nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. Il centro non soddisfa la disequazione ($0 < -1$ è falsa) e quindi la regione è quella evidenziata in grigio.





Domanda 6. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = \left|1 - \ln x\right|$

✎

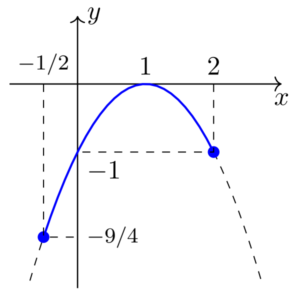
Le trasformazioni sono riportate qui sopra.

Domanda 7. Si determini l'immagine (cioè l'insieme dei valori) della funzione $f : \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = -(x-1)^2$

✎

Il grafico della funzione è rappresentato in blu qui a fianco.

Si osservi che $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$ e $f(2) = -1$. Pertanto l'insieme dei valori che la funzione assume nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ è l'intervallo $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$.



Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{e^{1/x}}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{e^{1/x}} = \frac{\ln(-0^-)}{e^{1/0^-}} = \frac{\ln(0^+)}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x\, e^{1+1/x}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1+1/x} + x \cdot e^{1+1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1+1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Domanda 10. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x) = x + \sqrt{x}$

✎

La derivata è $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1,$$ che però è impossibile. Non ci sono punti stazionari.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 05/11/2018

Domanda 1. Trovare quoziente e resto della divisione di $x^4 + x^2 + 1$ per $x + 1$

✎

Possiamo usare la divisione di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{array}$$

Pertanto il quoziente è $Q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ e il resto è $R = 3$.

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\dfrac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-1} + 1}$

✎

Abbiamo

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-1} + 1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1+x-1}{x-1}} = \frac{1+x}{x} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$e^{1-1/x} = 3$$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$, l'equazione equivale a

$$1 - \frac{1}{x} = \ln 3 \quad ; \quad \frac{1}{x} = 1 - \ln 3 \quad ; \quad x = \frac{1}{1 - \ln 3}.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\ln(1 - 3x) - 1 < 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $1 - 3x > 0$, cioè $x < \frac{1}{3}$, la disequazione equivale a

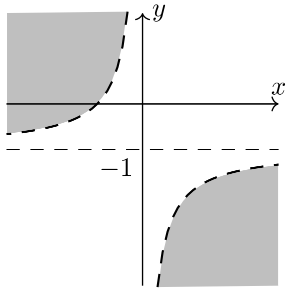
$$\ln(1 - 3x) < 1 \quad ; \quad 1 - 3x < e \quad ; \quad x > \frac{1-e}{3}.$$

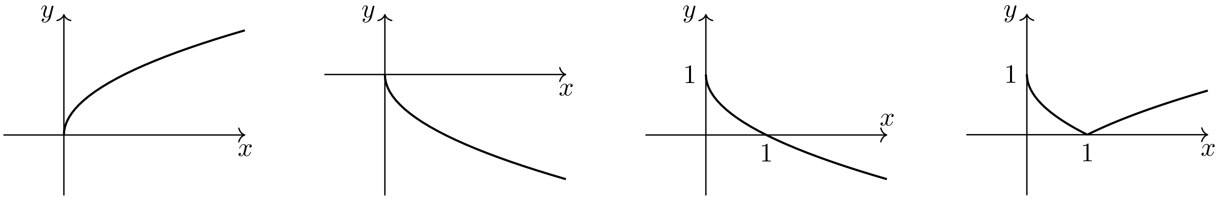
Tenendo conto della condizione di esistenza le soluzioni sono $\frac{1-e}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + x + 1 < 0$

✎

La disequazione si può scrivere come $x(y+1) < -1$ e quindi si tratta della regione delimitata da un'iperbole con asintoti paralleli agli assi cartesiani, centro in $(0, -1)$ e rami che stanno nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. Il centro non soddisfa la disequazione ($0 < -1$ è falsa) e quindi la regione è quella evidenziata in grigio.





$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto -\sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto 1-\sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto |1-\sqrt{x}|$

Domanda 6. Ottenendolo con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = \left|1-\sqrt{x}\right|$

✎

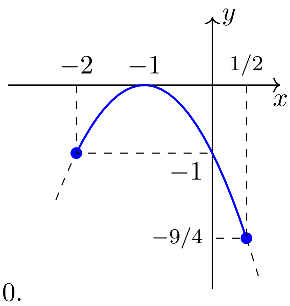
Le trasformazioni sono riportate qui sopra.

Domanda 7. Si determini l'immagine (cioè l'insieme dei valori) della funzione $f : \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, con $f(x) = -(x+1)^2$

✎

Il grafico della funzione è rappresentato in blu qui a fianco.

Si osservi che $f(-2) = -1$ e $f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$. Pertanto l'insieme dei valori che la funzione assume nell'intervallo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ è l'intervallo $\left[-\frac{9}{4}, 0\right]$.



Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\ln x}$

✎

Con l'algebra dei limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\ln x} = \frac{e^{-1/0^+}}{\ln(0^+)} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0^+}{-\infty} = 0.$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x\, e^{1+\sqrt{x}}$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1+\sqrt{x}} + x \cdot e^{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{1+\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right).$$

Domanda 10. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione $f(x) = x + \ln x$

✎

La derivata è $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,$$ che però non è accettabile. Non ci sono punti stazionari.

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 09/11/2018

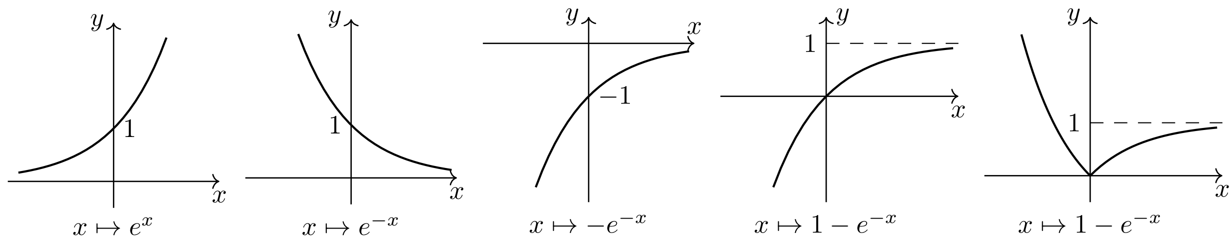
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \left|1 - e^{-x}\right|$$

se ne disegni un grafico, servendosi delle trasformazioni elementari. Si determinino il $\sup f$ e l'$\inf f$ e si dica se ci sono punti di massimo o di minimo (locali/globali) Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$. Si scriva infine l'espressione della funzione $f(\ln x)$, semplificandola.

✎

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono le seguenti.



Dal grafico possiamo affermare che i valori che la funzione f assume sono dati dall'intervallo $[0, +\infty)$. Quindi il $\sup f$ (l'estremo superiore di f) è $+\infty$ (f non è superiormente limitata) e l'$\inf f$ (l'estremo inferiore di f) è 0. Non ci sono punti di massimo, ma c'è un punto di minimo globale, $x = 0$, in cui f assume il suo valore minimo 0.

Per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$ dobbiamo prima scrivere l'espressione della funzione togliendo il valore assoluto. Possiamo scrivere

$$f(x) = \left|1 - e^{-x}\right| = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se} \quad 1 - e^{-x} \geq 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{se} \quad 1 - e^{-x} < 0. \end{cases}$$

Dato che

$$1 - e^{-x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0,$$

allora abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Pertanto, per avere l'equazione della retta tangente in $x_0 = -1$, serve la seconda espressione, quella per $x < 0$.

Dato che per $x < 0$ si ha $f'(x) = -e^{-x}$, abbiamo

$$f(-1) = |1 - e| = e - 1 \qquad \text{e} \qquad f'(-1) = -e.$$

L'equazione è quindi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{cioè} \qquad y = e - 1 - e(x + 1).$$

Infine, per quanto riguarda l'ultima domanda, si ha

$$f(\ln x) = \left|1 - e^{-\ln x}\right| = \left|1 - \frac{1}{e^{\ln x}}\right| = \left|1 - \frac{1}{x}\right|.$$

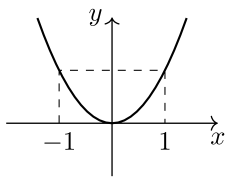
ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x & -1 \leq x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & 0 < x \leq 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

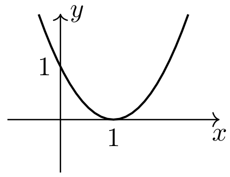
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Si dica se alla funzione f è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, 1 + \sqrt{3}\right]$. Si trovi infine in quali punti è verificata la tesi del teorema.

✎

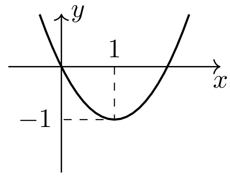
Il grafico sulle x negative è una retta per l'origine di pendenza -2. Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate nella pagina seguente.



$x \mapsto x^2$

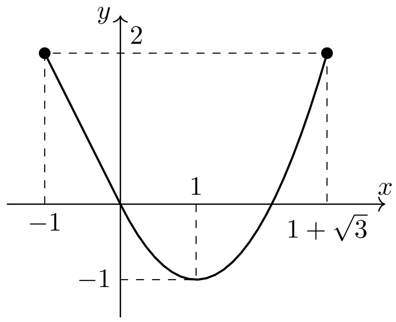


$x \mapsto (x-1)^2$



$x \mapsto (x-1)^2 - 1$

Il grafico della funzione f è qui a destra.



Stabilire se il teorema di Rolle è applicabile significa stabilire se le sue ipotesi sono verificate. Queste sono: funzione continua nell'intervallo $\big[-1, 1+\sqrt{3}\big]$, derivabile nei punti interni a tale intervallo e infine uguale valore agli estremi, cioè $f(-1) = f(1+\sqrt{3})$.

Iniziamo dalla più semplice, l'ultima. Si ha

$$f(-1) = -2 \cdot (-1) = 2 \quad \text{e} \quad f(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Passiamo alla continuità. Possiamo affermare che f è certamente continua negli intervalli $\big[-1,0\big)$ e $\big(0, 1+\sqrt{3}\big]$, dato che in questi è una trasformazione di funzioni elementari. Occorre verificare la continuità in $x = 0$. Il grafico ci dice che f è continua in 0, ma facciamolo anche con la definizione. La funzione è continua da sinistra in 0, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione lineare. Quindi è sufficiente verificare la continuità in zero da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione lineare, mentre a destra è una funzione di secondo grado.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(0) = -2 \cdot 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big((x-1)^2 - 1\big) = (-1)^2 - 1 = 0.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo $[-1, 1+\sqrt{3}]$.

Passiamo alla derivabilità. In modo analogo a quanto fatto con la continuità, possiamo affermare che la funzione f è certamente derivabile negli intervalli $\big(-1,0\big)$ e $\big(0, 1+\sqrt{3}\big)$, dato che in questi è trasformazione di funzioni elementari. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2(x-1) & \text{se } 0 < x < 1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$. Il teorema di Rolle è dunque applicabile.

Passiamo all'ultima domanda: in quali punti è verificata la tesi del teorema. La tesi è che c'è un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla. Tale punto non può essere ovviamente negativo e non è nemmeno $x = 0$, perché abbiamo appena trovato che $f'(0) = -2$. Con le x positive $f'(x) = 2(x-1)$ si annulla in $x = 1$ ed è quindi questo l'unico punto che verifica la tesi del teorema.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x) = 2x + e^{-x} - 2$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si disegni un possibile grafico di f. Si dica infine quante soluzioni ha l'equazione $f(x) + 1 = 0$.

✎

Non ci sono condizioni di esistenza da porre. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$.

I limiti significativi sono pertanto $+\infty$ e $-\infty$. Il primo si può fare con l'algebra dei limiti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(2x + e^{-x} - 2\big) = +\infty + e^{-\infty} - 2 = +\infty + 0 - 2 = +\infty.$$

Il secondo è una forma indeterminata.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \big(2x + e^{-x} - 2\big) = -\infty + e^{+\infty} - 2 = -\infty + \infty - 2 = -\infty + \infty.$$

In modo poco formale ma sostanzialmente corretto possiamo osservare che e^{-x} è un infinito "di tipo esponenziale" e quindi prevale sull'infinito "di tipo potenza" $(2x)$. Il limite è allora $+\infty$. Più rigorosamente possiamo usare un cambio di variabile per ricondurci al confronto standard. Ponendo $-x = t$ il limite diventa

$$\lim_{t\to+\infty}\big(-2t+e^t-2\big) = \lim_{t\to+\infty} e^t\left(-2\frac{t}{e^t}+1-\frac{2}{e^t}\right).$$

Tra parentesi il primo termine tende a zero (confronto standard) e il terzo tende ugualmente a zero in quanto è una forma $\frac{2}{+\infty}$. Quindi il limite è ora nella forma $+\infty\cdot 1 = +\infty$.

Il segno della funzione non è richiesto. La derivata di f è

$$f'(x) = 2 - e^{-x}.$$

I punti stazionari si cercano annullando la derivata. Quindi

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-e^{-x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}=2 \quad\Leftrightarrow\quad -x=\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\ln 2.$$

Questo è l'unico punto stazionario della funzione. Dato che i limiti sono entrambi $+\infty$ e quello trovato è l'unico punto stazionario, questo non può essere che il punto di minimo globale della funzione. In ogni caso il facile studio del segno della derivata porta a questa conclusione.

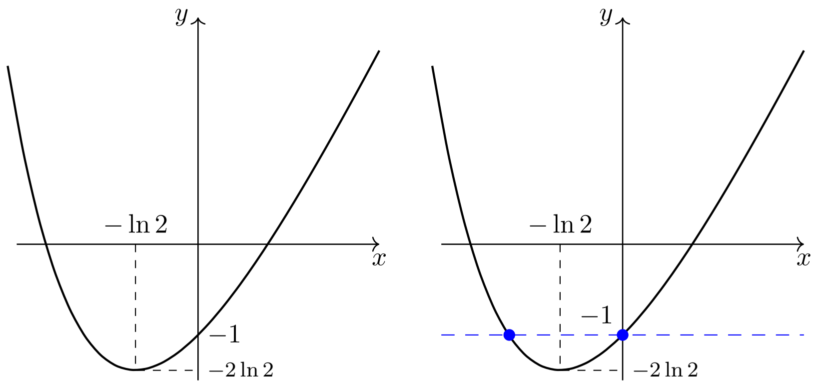
$$f'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-e^{-x}>0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}<2 \quad\Leftrightarrow\quad -x<\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad x>-\ln 2.$$

La funzione è quindi decrescente fino a $-\ln 2$ e poi crescente.

Per disegnare un grafico più preciso è utile calcolare

$$f(-\ln 2) = -2\ln 2 + e^{\ln 2} - 2 = -2\ln 2 + 2 - 2 = -2\ln 2,$$

che è un valore negativo. Un possibile grafico di f è riportato qui sotto a sinistra.



Concludiamo con l'ultima domanda: quante soluzioni ha l'equazione $f(x)+1=0$. Faccio notare che non viene chiesto di trovare questi punti, ma solo di dire quanti sono.[1]

L'equazione equivale a $f(x)=-1$ e quindi significa cercare in quanti punti la funzione assume il valore -1. Nel grafico si può trovare facilmente l'altezza della funzione all'origine, cioè l'intersezione tra il grafico e l'asse verticale. Si ha $f(0)=e^0-2=-1$. Pertanto, dato che il minimo della funzione è certamente minore di -1, la funzione assume il valore -1 in due punti, di cui uno è $x=0$ e l'altro è un x minore di $-\ln 2$ (vedi grafico qui sopra a destra).

[1] Non siamo in grado di risolvere l'equazione $2x+e^{-x}-2=-1$, cioè $2x+e^{-x}=1$, dato che questa non rientra in nessuna delle categorie che abbiano studiato: non è un'equazione intera e non è un'equazione esponenziale dei casi che sappiamo risolvere. Invito gli studenti a riflettere sul fatto che tra le equazioni esponenziali (quelle in cui la x compare ad esponente) abbiamo un metodo per trovare una soluzione esatta soltanto in casi particolari.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 14/01/2019

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \left(\sqrt{x}+e^{-x}\right) \mathrm{d}x$

✎

$$\int \left(\sqrt{x}+e^{-x}\right) \mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int \left(-e^{-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} - e^{-x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - e^{-x} + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (-2e^{-2x})\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\Big(e^{-2}-e^{2}\Big) = \frac{e^4-1}{2e^2}.$$

Domanda 3. Scrivere un vettore non nullo che sia ortogonale al vettore $(2,-1,1,-1)$

✎

Ad esempio il vettore $(0,0,1,1)$, dato che $\big\langle(0,0,1,1),(2,-1,1,-1)\big\rangle = 1-1=0$.

Domanda 4. Calcolare il prodotto $A^T \cdot A$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

✎

Il determinante (rispetto alla prima riga) è $1\cdot(-1) - 1\cdot(-1) = 0$ e quindi il rango non è 3. Dato che ad esempio il minore principale di Nord-Ovest di ordine 2 vale 1, il rango è 2.

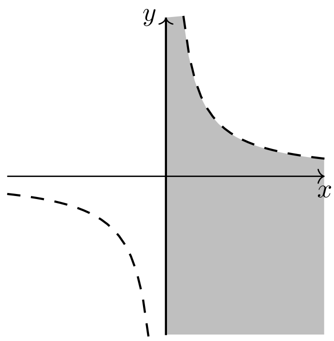
Domanda 6. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{x}\cdot\ln\big(1-xy\big)$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-xy > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ xy < 1. \end{cases}$$

Il dominio è raffigurato qui a fianco in grigio.

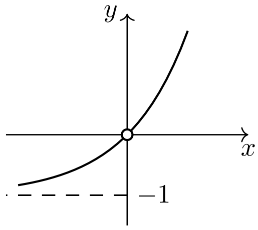


Domanda 7. Disegnare la curva di livello 1 della funzione $f(x,y) = \dfrac{e^x-1}{y}$

✎

La curva è data dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{e^x-1}{y} = 1 \text{ che, con } y \neq 0, \text{ equivale alla } e^x - 1 = y.$$



L'equazione individua la curva grafico della funzione $f(x) = e^x - 1$, che si ottiene facilmente con una trasformazione grafica elementare a partire dalla funzione esponenziale. La rappresentazione è qui sopra. È esclusa l'origine.

Domanda 8. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il minore principale di NO di ordine 1 è -1, negativo, e il minore principale di NO di ordine 2 è $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, positivo. Quindi la forma è definita negativa.

Domanda 9. Calcolare la derivata parziale rispetto ad y della funzione $f(x, y) = e^x \cdot \ln\left(1 + xy^2\right)$

✎

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{1 + xy^2} \cdot 2xy.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = xy - x + y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(-1, 1)$.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 18/01/2019

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = \sqrt{x}\ln x$$
se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $\left[1, \sqrt[3]{e}\right]$.
Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

✎

$$\int \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \ln x\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} - \int \frac{x^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c.$$

L'integrale di f nell'intervallo $[1, \sqrt[3]{e}]$ è dato da
$$\int_1^{\sqrt[3]{e}} \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt[3]{e}} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{e}\cdot\frac{1}{3} - 0\right) - \frac{4}{9}\left(\sqrt{e} - 1\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9}\sqrt{e}.$$

Vediamo ora l'integrale generalizzato.
$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Possiamo affermare che l'integrale diverge, dato che è l'integrale generalizzato a $+\infty$ di una funzione potenza del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ con un $\alpha < 1$.
Si poteva anche calcolare l'integrale in base alla definizione:
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1/2}}{1/2}\Bigg|_2^b = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{2}\right) = +\infty.$$

ESERCIZIO 2. Dati i tre vettori
$$v^1 = (-1, 0, 2) \quad , \quad v^2 = (0, 1, -1) \quad , \quad v^3 = (1, -1, -1)$$
si dica se formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si dica se il vettore $(5, -6, -4)$ appartiene o no al sottospazio generato dai tre vettori. Scelto infine uno dei tre vettori e scritto un vettore non nullo ad esso ortogonale, si provi che i quattro vettori così ottenuti sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

✎

Tre vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti.[2] Per stabilire se sono l.i. il modo più semplice è calcolare il determinante della matrice (quadrata) che si ottiene con i tre vettori (è irrilevante disporre i vettori in riga o in colonna):
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A (rispetto alla prima riga) è $-1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) = 0$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti e non formano una base.

Vediamo ora se il vettore $(5, -6, -4)$ appartiene o no al sottospazio generato da v^1, v^2 e v_3. Il modo più rapido è questo: possiamo affermare che v^3 dipende linearmente dai primi due, dato che la sottomatrice formata con v^1 e v^2 ha rango 2 e quindi v^1 e v^2 sono indipendenti.[3] Possiamo anche dire che quindi il sottospazio generato da v^1, v^2 è lo

[2] Infatti in questo caso sono anche generatori di $\mathbb{R}^3$ in quanto è 3 la dimensione dello spazio da essi generato.
[3] I tre vettori diventano quindi dipendenti aggiungendo v^3, quindi è quest'ultimo il responsabile della dipendenza.

stesso generato da tutti e tre. Il nuovo vettore $(5, -6, -4)$ apparterrà a questo sottospazio se è dipendente da v^1 e v^2 e per stabilirlo basta quindi calcolare il determinante della nuova matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{Risulta} \quad \det A' = -1 \cdot (-10) + 2 \cdot (-5) = 0$$

e quindi il nuovo vettore $(5, -6, -4)$ appartiene al sottospazio.

L'ultima domanda chiede ora di scegliere uno dei tre vettori e scrivere un vettore non nullo ad esso ortogonale. Scegliamo ad esempio il secondo, $(0, 1, -1)$. Un vettore non nullo ad esso ortogonale è (ad esempio) $(0, 1, 1)$. È chiesto ora di provare che i quattro vettori così ottenuti sono generatori di $\mathbb{R}^3$. Anche per quanto detto in precedenza, basta provare che v^1, v^2 e $(0, 1, 1)$ sono linearmente indipendenti.[4] Ancora una volta basta fare il

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1^{\text{a}} \text{ colonna}) - 1 \cdot 2 = -2.$$

Questa volta i tre vettori sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2) - \ln(1 + xy)$$

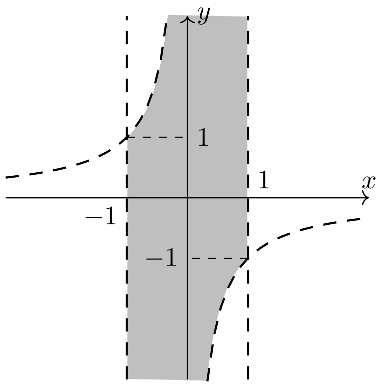
si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si provi che c'è un solo punto stazionario di f e lo si determini. Attraverso lo studio del segno di f si stabilisca la natura del punto stazionario, cioè se è di massimo, di minimo o né di massimo né di minimo.

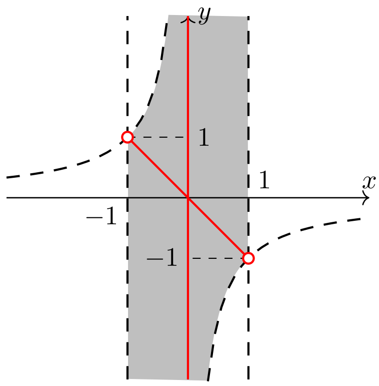
✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ 1 + xy > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ xy > -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ xy > -1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Un punto interno al dominio è ad esempio l'origine, mentre un punto di frontiera è ad esempio il punto $(1, 0)$.

La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione $\ln(1 - x^2) - \ln(1 + xy) = 0$, che equivale a

$$\ln(1 - x^2) = \ln(1 + xy) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = 1 + xy \quad \Leftrightarrow \quad xy + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x + y) = 0.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti del dominio che stanno sull'asse y oppure sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante, indicati in rosso nella figura qui sopra a destra. Attenzione che i punti $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ vanno esclusi.

La domanda successiva riguarda i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1 - x^2} - \frac{y}{1 + xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{1 + xy}.$$

[4]Se questi tre sono l.i. la dimensione dello spazio da essi generato è 3 e quindi è tutto $\mathbb{R}^3$.

Dobbiamo annullare entrambe le derivate parziali. Conviene osservare che la seconda si può annullare solo se $x = 0$. Sostituendo $x = 0$ nell'altra derivata si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -y.$$

Questa si annulla se e solo se anche $y = 0$. Pertanto l'unico punto stazionario è l'origine.

Ora dobbiamo stabilire la natura del punto stazionario attraverso lo studio del segno di f.

Osserviamo intanto che il valore della funzione nell'origine è $f(0,0) = \ln 1 - \ln 1 = 0$. Pertanto basterà studiare il segno della funzione per capire se l'origine è di massimo, di minimo o né di massimo né di minimo.[5]

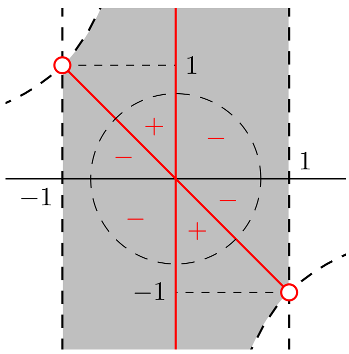
La funzione è positiva nelle soluzioni della disequazione $\ln(1-x^2) - \ln(1+xy) > 0$, che equivale a

$$\ln(1-x^2) > \ln(1+xy) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-x^2 > 1+xy \qquad \Leftrightarrow \qquad xy + x^2 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(x+y) < 0.$$

Quest'ultima disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < -x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y > -x. \end{cases}$$

Pertanto, nelle vicinanze dell'origine, il segno della funzione è quello raffigurato qui sotto, dove è stata ingrandita una parte del dominio.



Evidentemente, dato che la funzione in un intorno dell'origine in alcune regioni è positiva e in altre è negativa, l'origine (in cui ricordo la funzione vale zero) non può essere né di massimo né di minimo.

[5] Faccio notare che lo studio della natura di un punto stazionario (x_0, y_0) attraverso il segno della funzione risulta spesso "fattibile" se la funzione vale zero nel punto, ma può diventare molto più complicato se il valore di f è diverso da zero. Ovviamente in questo caso la disequazione da studiare non sarebbe più $f(x,y) > 0$, ma $f(x,y) > f(x_0,y_0)$. Dipende comunque tutto dall'espressione di f.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 14/01/2019

Domanda 1. Nell'espressione $xe^y + ye^x$ raccogliere xye^{x+y} e se possibile semplificare

✎

$$xe^y + ye^x = xye^{x+y}\left(\frac{xe^y}{xye^{x+y}} + \frac{ye^x}{xye^{x+y}}\right) = xye^{x+y}\left(\frac{1}{ye^x} + \frac{1}{xe^y}\right).$$

Domanda 2. Semplificare l'espressione $2\log_2\left(4\sqrt{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

✎

$$2\log_2\left(4\sqrt{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\log_2\left(2^2 \cdot 2^{1/2}\right) - \ln\left(e^{-1}\right) = 2\log_2\left(2^{5/2}\right) - (-1) = 2\cdot\frac{5}{2} + 1 = 6.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$\ln\left(1-x\right) + 2 = 0$$

✎

L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 1-x>0 \text{ (C.E.)} \\ \ln\left(1-x\right) = -2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x<1 \\ 1-x = e^{-2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x<1 \\ x = 1-e^{-2}. \end{cases}$$

La soluzione è quindi $1 - e^{-2}$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{x}{1-e^x} < 0$$

✎

La disequazione equivale ai sistemi

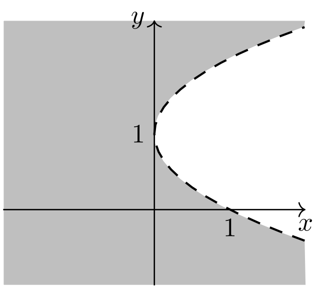
$$\begin{cases} x>0 \\ 1-e^x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ 1-e^x>0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ e^x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ e^x<1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $x < 0$ oppure $x > 0$, cioè $x \neq 0$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x - (y-1)^2 < 0$

✎

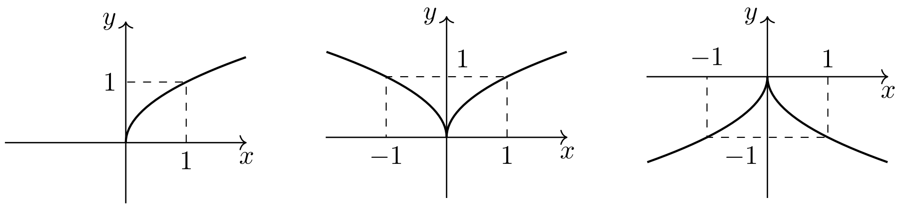
La disequazione equivale a $x < (y-1)^2$. L'equazione associata definisce una parabola con asse orizzontale, vertice nel punto $(0,1)$ e concavità rivolta verso destra. La disequazione è verificata nella regione a sinistra della parabola, rappresentata in grigio qui sotto.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = -\sqrt{|x|}$

✎

Le trasformazioni sono queste:



$x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ $\qquad$ $x \mapsto -\sqrt{|x|}$

Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{e^{-1/x}}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{e^{-1/x}} = \frac{\ln(1-1^-)}{e^{-1/1}} = \frac{\ln(0^+)}{e^{-1}} = \frac{-\infty}{1/e} = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(1+e^{-x}\big)^2$

✎

$$f'(x) = 1 \cdot \big(1+e^{-x}\big)^2 + x \cdot 2\big(1+e^{-x}\big)(-e^{-x}).$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x$

✎

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^{-x}\right) \mathrm{d}x = \ln|x| - \int (-e^{-x})\, \mathrm{d}x = \ln|x| - e^{-x} + c.$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x + 2y - xy$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1-y=0 \\ 2-x=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=1 \\ x=2. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è quindi $(2,1)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 18/01/2019

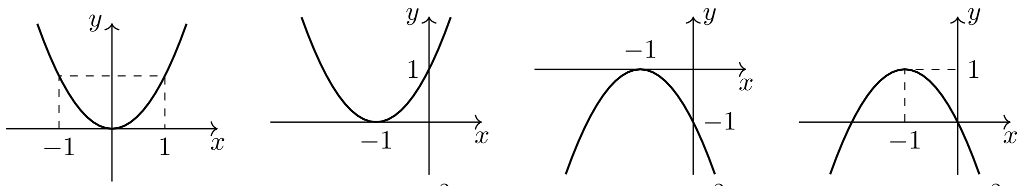
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x+1)^2 & -2 \le x \le 0 \\ e^x - 1 & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile nell'intervallo $(-2,1)$. Si dica se è applicabile il teorema di Weierstrass alla funzione f nell'intervallo $[-2,1]$ e si dica comunque, sulla base del grafico, se la tesi è vera.

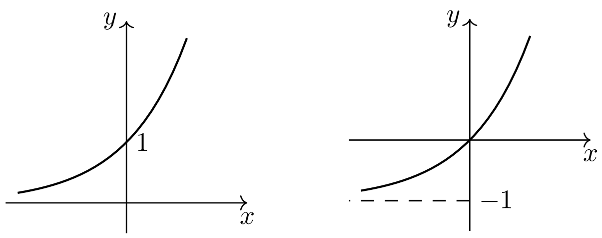
✎

Le trasformazioni della funzione polinomiale sono riportate qui sotto.



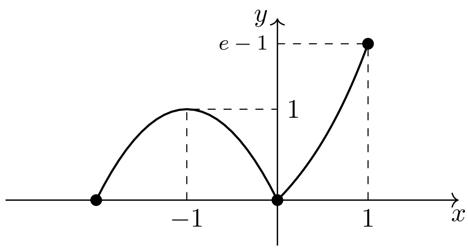
$x \mapsto x^2$ $x \mapsto (x+1)^2$ $x \mapsto -(x+1)^2$ $x \mapsto 1-(x+1)^2$

Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono riportate qui sotto.



$x \mapsto e^x$ $x \mapsto e^x - 1$

Il grafico della funzione f, definita nell'intervallo $[-2,1]$, è pertanto quello qui sotto. Si faccia attenzione ad indicare correttamente nel grafico i valori della funzione in $x=-1$ e in $x=1$. Questi valori sono importanti nelle domande che seguono.



Studiamo la continuità della funzione. Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua anche in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione.

Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x=0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione polinomiale. Quindi è sufficiente verificare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x=0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione polinomiale, mentre a destra essa è una funzione esponenziale.

La continuità anche da destra deriva dall'uguaglianza tra

$$f(0) = 1-(0+1)^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(e^x - 1\big) = e^0 - 1 = 0.$$

La funzione è dunque continua in tutto l'intervallo in cui è definita.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & -2 < x < 0 \\ e^x & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2(x+1) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1.$$

La continuità e il fatto che i limiti della derivata sono diversi permettono di concludere che f non è derivabile in $x = 0$.

Passiamo alle domande sul teorema di Weierstrass. Il teorema è applicabile alla funzione f nell'intervallo $[-2, 1]$ dato che si tratta di un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua in questo intervallo, come trovato sopra.

La tesi del teorema è quindi certamente vera: esistono almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Sulla base del grafico possiamo dire che il punto di massimo è in $x_{\max} = 1$, con valore massimo $f(1) = e - 1$ e ci sono due punti di minimo in $x^{(1)}_{\min} = -2$ e $x^{(2)}_{\min} = 0$, con valore minimo 0.

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2z \\ y - z \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

si provi che essa non è invertibile. Si determini la dimensione e una possibile base della sua immagine. Si dica se esistono vettori v tali che $T(v) = u^3 - u^2$, dove questi ultimi sono il secondo e il terzo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$. Si scriva infine l'espressione della trasformazione composta di T con se stessa, cioè della trasformazione $T(T(v))$.

✎

La matrice di rappresentazione della trasformazione T è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A (rispetto alla prima riga) è $-1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 0$ e quindi T non è invertibile.

La dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A, che non è 3 in quanto il determinante si annulla. Dato che, ad esempio, il minore principale di Nord-Ovest di ordine 2 vale -1, il rango è 2. Una possibile base dell'immagine è ad esempio data dalle prime due colonne della matrice A, che sono linearmente indipendenti.

Per rispondere alla domanda successiva, se esistono vettori v tali che $T(v) = u^3 - u^2$, ci sono molti modi. Il più diretto è anzitutto osservare che $u^3 - u^2 = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$ e quindi tradurre la ricerca dei possibili vettori v nella soluzione dell'equazione

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè del sistema lineare} \quad \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ x - y - z = 1. \end{cases}$$

Si trova facilmente che il sistema ha soluzioni[6] e quindi la risposta è sì.

Un altro modo, più raffinato, per rispondere alla domanda è osservare che $u^3 - u^2$ è combinazione lineare delle colonne di A e precisamente è dato dal doppio della prima più la terza. Ricordando che le colonne di A sono i trasformati dei vettori fondamentali, abbiamo quindi

$$u^3 - u^2 = 2T(u^1) + T(u^3) = T(2u^1 + u^3).$$

Quindi un vettore v che soddisfa la richiesta è il vettore $2u^1 + u^3 = (2, 0, 1)$, e ritroviamo la soluzione già indicata in precedenza.

[6] Per arrivare a dire che ci sono soluzioni si può banalmente risolvere il sistema per sostituzione: si trova che il sistema equivale a

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = z - 1 \end{cases} \qquad \text{e quindi una soluzione è ad esempio} \quad (2, 0, 1).$$

Ma, dato che dobbiamo solo dire se ci sono soluzioni, possiamo anche limitarci a vedere se è applicabile il teorema di Rouché–Capelli. Si trova che la matrice completa ha anch'essa rango 2 e quindi il teorema garantisce l'esistenza di soluzioni.

Passiamo all'ultima domanda: scrivere l'espressione della trasformazione composta di T con se stessa, cioè della trasformazione $T(T(v))$. Qui, anziché utilizzare l'espressione di T, conviene servirsi della matrice di rappresentazione, ricordando che la matrice di rappresentazione della trasformazione composta è il prodotto delle matrici di rappresentazione. Pertanto la matrice di rappresentazione di $T \circ T$ (ricordo che "$\circ$" è il simbolo di composizione) è

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'espressione della trasformazione composta è

$$T\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x-2y-4z \\ -x+2y \\ -2x+4z \end{pmatrix}.$$

In alternativa, procedendo sulla base dell'espressione di T, si sarebbe fatto così:

$$T\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} -x+2z \\ y-z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-x+2z)+2(x-y-z) \\ (y-z)-(x-y-z) \\ (-x+2z)-(y-z)-(x-y-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y-4z \\ -x+2y \\ -2x+4z \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{1+xy}{1-y^2}\right)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si provi che c'è un solo punto stazionario di f e lo si determini. Attraverso lo studio del segno di f si stabilisca la natura del punto stazionario, cioè se è di massimo, di minimo o né di massimo né di minimo.

✎

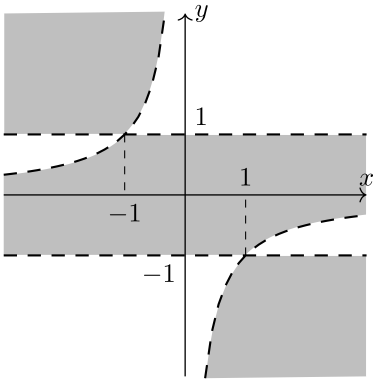
Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

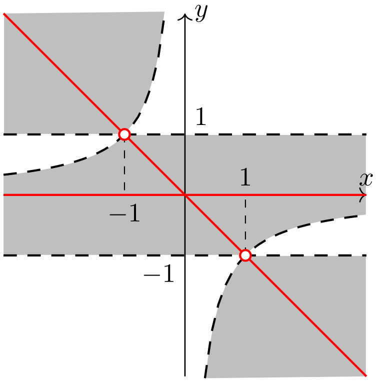
$$\begin{cases} 1-y^2 \neq 0 \\ \dfrac{1+xy}{1-y^2} > 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 1+xy > 0 \\ 1-y^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1+xy < 0 \\ 1-y^2 < 0 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} xy > -1 \\ y^2 < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} xy < -1 \\ y^2 > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xy > -1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} xy < -1 \\ y < -1 \vee y > 1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato qui sotto a sinistra, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.





Un punto interno al dominio è ad esempio l'origine, mentre un punto di frontiera è ad esempio il punto $(0, 1)$.

La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione (nel dominio $1-y^2$ è diverso da zero)

$$\ln\left(\frac{1+xy}{1-y^2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+xy}{1-y^2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+xy=1-y^2 \quad\Leftrightarrow\quad xy+y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad y(x+y)=0.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti del dominio che stanno sull'asse x oppure sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante, indicati in rosso nella figura qui sopra a destra. Attenzione che i punti $(-1,1)$ e $(1,-1)$ vanno esclusi.

La domanda successiva riguarda i punti stazionari. Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\frac{1+xy}{1-y^2}}\cdot\frac{y}{1-y^2} \qquad\text{e}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\frac{1+xy}{1-y^2}}\cdot\frac{x(1-y^2)-(1+xy)(-2y)}{(1-y^2)^2}.$$

Dobbiamo annullare entrambe le derivate parziali. Conviene osservare che la prima si può annullare solo se $y=0$. Sostituendo $y=0$ nell'altra derivata si ottiene

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0}=1\cdot\frac{x}{1}=x.$$

Questa si annulla se e solo se anche $x=0$. Pertanto l'unico punto stazionario è l'origine.

Ora dobbiamo stabilire la natura del punto stazionario attraverso lo studio del segno di f.

Osserviamo intanto che il valore della funzione nell'origine è $f(0,0)=\ln 1=0$. Pertanto basterà studiare il segno della funzione per capire se l'origine è di massimo, di minimo o né di massimo né di minimo.[7]

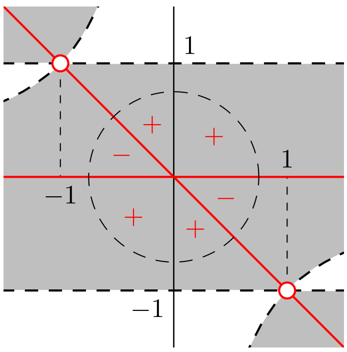
La funzione è positiva nelle soluzioni della disequazione

$$\ln\left(\frac{1+xy}{1-y^2}\right)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+xy}{1-y^2}>1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+xy-1+y^2}{1-y^2}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y(x+y)}{1-y^2}>0.$$

Lo studio può essere semplificato osservando che siamo interessati a quello che succede in prossimità dell'origine (in un intorno dell'origine) e quindi che possiamo ritenere il denominatore positivo. Questo permette di porre semplicemente

$$y(x+y)>0 \qquad\text{che equivale a}\qquad \begin{cases} y>0\\ y>-x\end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases} y>0\\ y<-x.\end{cases}$$

Pertanto, nelle vicinanze dell'origine, il segno della funzione è quello raffigurato qui sotto, dove è stata ingrandita una parte del dominio.



Evidentemente, dato che la funzione in un intorno dell'origine in alcune regioni è positiva e in altre è negativa, l'origine (in cui ricordo la funzione vale zero) non può essere né di massimo né di minimo.

[7]Faccio notare che lo studio della natura di un punto stazionario (x_0,y_0) attraverso il segno della funzione risulta spesso "fattibile" se la funzione vale zero nel punto, ma può diventare molto più complicato se il valore di f è diverso da zero. Ovviamente in questo caso la disequazione da studiare non sarebbe più $f(x,y)>0$, ma $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. Dipende comunque tutto dall'espressione di f.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 28/01/2019

Domanda 1. Calcolare l'integrale $\int \left(e^{-x} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$

✎

$$\int \left(e^{-x} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x - \ln|x| = -e^{-x} - \ln|x| + c.$$

Domanda 2. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} e^{x/2}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int_{-1}^{1} e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2e^{x/2}\Big|_{-1}^{1} = 2e^{1/2} - 2e^{-1/2} = 2\sqrt{e} - \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Domanda 3. Stabilire se i vettori $\left(-1, \frac{1}{2}, 5\right)$ e $\left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$ sono ortogonali

✎

Calcolando il prodotto interno dei due vettori si ha

$$\left\langle \left(-1, \frac{1}{2}, 5\right), \left(2, -1, \frac{1}{2}\right) \right\rangle = -2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 0$$

e quindi i due vettori sono ortogonali.

Domanda 4. Calcolare il prodotto vettore-matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Domanda 5. Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✎

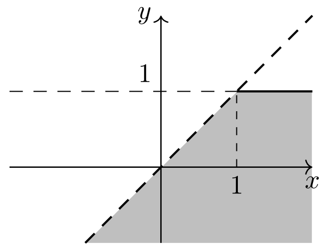
Il determinante (rispetto alla prima riga) è $-1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -1$ e quindi il rango è 3.

Domanda 6. Disegnare nel piano il dominio della funzione $f(x, y) = \sqrt{1-y} \cdot \ln(x-y)$

✎

Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} 1 - y \geq 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \leq 1 \\ y < x. \end{cases}$$



Il dominio è raffigurato qui a fianco in grigio.

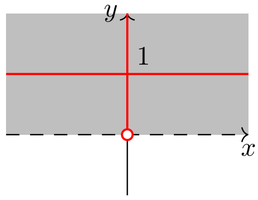
Domanda 7. Disegnare la curva di livello 0 della funzione $f(x, y) = x \ln y$

✎

Si tenga conto che la funzione è definita nel semipiano in cui $y > 0$. La curva è data dalle soluzioni dell'equazione

$$x \ln y = 0, \text{ che equivale a } \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 1.$$

Si tratta della parte di asse y contenuta nel dominio e della retta orizzontale di ordinata 1. L'insieme dei punti di livello zero è rappresentato in rosso qui sotto. Il dominio della funzione è indicato in grigio.



Domanda 8. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = -x^2 + xy - \frac{1}{4}y^2$

✎

La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Il determinante, è $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, e i minori principali di ordine 1 sono -1 e $-\frac{1}{4}$, entrambi negativi. Quindi la forma è semidefinita negativa.

Domanda 9. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = x^2y - y^2 - y$

✎

Le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y - 1. \quad \text{Quindi il gradiente è } \nabla f = \Big(2xy, x^2 - 2y - 1\Big).$$

Domanda 10. Calcolare il gradiente secondo (matrice Hessiana) della funzione del punto precedente

✎

Il gradiente secondo di f risulta

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 01/02/2019

ESERCIZIO 1. Data la funzione
$$f(x) = x\,e^{-x}$$
se ne calcoli l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $\big[-\ln 2, 0\big]$.
Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

✎

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x\big(-e^{-x}\big) - \int \big(-e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

L'integrale di f nell'intervallo $\big[-\ln 2, 0\big]$ è dato da

$$\int_{-\ln 2}^{0} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_{-\ln 2}^{0} = -1 - \Big(\ln 2e^{\ln 2} - e^{\ln 2}\Big) = 1 - 2\ln 2.$$

Vediamo ora l'integrale generalizzato.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} \cdot xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Possiamo affermare che l'integrale diverge, dato che è l'integrale generalizzato a $+\infty$ di una funzione potenza del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ con un $\alpha < 1$.
Si poteva anche calcolare l'integrale in base alla definizione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{1/2}\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} 2\left(\sqrt{b} - 1\right) = +\infty.$$

ESERCIZIO 2. Data la trasformazione lineare
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$
si stabilisca se essa è invertibile. Si dica poi se T è suriettiva. Si determini la dimensione e una possibile base della sua immagine. Si dica se il vettore $(-1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T e infine si trovino tutti i vettori in cui la trasformazione T si annulla.

✎

La matrice di rappresentazione della trasformazione T è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A (rispetto alla prima riga) è $2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 0$ e quindi T non è invertibile.

Il fatto che T non sia invertibile non implica in generale che non sia suriettiva (anche se per le trasformazioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, cioè con matrice di rappresentazione quadrata questo si può provare).

Nel nostro caso però possiamo affermare che T non è suriettiva in quanto la sua immagine non è certamente tutto $\mathbb{R}^3$, dato che il determinante di A è nullo, e quindi il rango non è 3.

La dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A, che appunto non è 3. Dato che, ad esempio, il minore principale di Nord-Ovest di ordine 2 vale -1, il rango è 2. Quindi $\dim \mathrm{Im}T = 2$.

Una possibile base dell'immagine è ad esempio data dalle prime due colonne della matrice A, che sono linearmente indipendenti.

Domanda successiva: il vettore $(-1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T? Si può rispondere in molti modi, ad esempio cercando di scrivere il nuovo vettore come combinazione lineare dei tre vettori dati o, ancora meglio, come combinazione lineare dei due vettori che formano una base. Il problema si traduce nel risolvere un sistema lineare.

Il modo più veloce è però quello di capire se il nuovo vettore dipende linearmente dai due vettori della base: basta calcolare il determinante della matrice che si ottiene con i due vettori della base e il nuovo vettore:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\text{terza colonna}) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Quindi la risposta è sì, il nuovo vettore appartiene all'immagine di T.

Infine troviamo tutti i vettori in cui la trasformazione T si annulla. Basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + y - z = 0. \end{cases}$$

Coerentemente con la scelta fatta prima, per il calcolo del rango, del minore principale di Nord-Ovest di ordine 2, possiamo eliminare la terza equazione e far diventare parametro la variabile z. Il sistema diventa in due variabili con parametro z:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x = -z. \end{cases}$$

Potremmo usare la regola di Cramer per risolverlo, ma è più veloce sostituire $x = z$ (che si ricava dalla seconda equazione) nella prima. Si ottiene

$$\begin{cases} x = z \\ y = 2z. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono quindi scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big(z, 2z, z\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ z\big(1, 2, 1\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Pertanto i vettori in cui la trasformazione T si annulla sono i multipli del vettore $(1, 2, 1)$. Si tratta della retta in $\mathbb{R}^3$ generata da questo vettore.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(x - y^2) - \ln(1 - xy)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si calcoli il gradiente di f e si dica se in qualche punto dell'asse x nel dominio ci possono essere punti stazionari. Si scriva infine la restrizione di f sui punti della retta $x = 1$.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

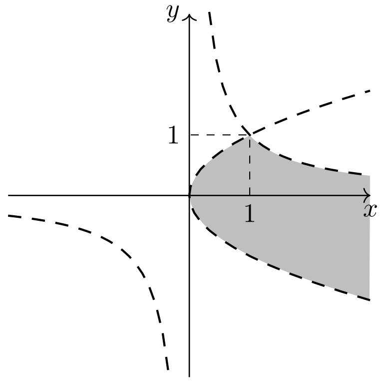
$$\begin{cases} x - y^2 > 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > y^2 \\ xy < 1. \end{cases}$$

La prima disequazione individua i punti a destra della parabola di vertice l'origine, asse coincidente con l'asse x e concavità verso destra; la seconda individua la regione che, rispetto all'iperbole con centro l'origine e rami nel primo e terzo quadrante, sta dalla stessa parte del centro. Il dominio di f è rappresentato in grigio nella pagina seguente, con la precisazione che nessun punto di frontiera appartiene al dominio. Quindi l'insieme è aperto.

Un punto interno al dominio è ad esempio il punto $(1, 0)$, mentre un punto di frontiera è ad esempio l'origine.

Le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - y^2} - \frac{-y}{1 - xy} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x - y^2} - \frac{-x}{1 - xy}.$$ Il gradiente è il vettore $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$



Ora non è richiesto di trovare i punti stazionari in tutto il dominio, ma se ce ne sono sull'asse x. Questo semplifica le cose, dato che nelle derivate possiamo porre $y = 0$. Dato che

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=0} = \frac{1}{x} \quad \text{e questa non si annulla, la risposta è negativa.}$$

Infine la restrizione di f sui punti della retta $x = 1$ è

$$f(x, y)\Big|_{x=1} = f(1, y) = \ln(1 - y^2) - \ln(1 - y) = \ln\left(\frac{1 - y^2}{1 - y}\right) = \ln(1 + y).$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 28/01/2019

Domanda 1. Semplificare il quoziente $\dfrac{x^3 - x}{x^3 - x^2}$

✎

$$\frac{x^3 - x}{x^3 - x^2} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2(x-1)} = \frac{x^2 - 1}{x(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Domanda 2. Semplificare l'espressione $\log_2 \sqrt{8} - \dfrac{1}{\log_3 \sqrt[3]{9}}$

✎

$$\log_2 \sqrt{8} - \frac{1}{\log_3 \sqrt[3]{9}} = \log_2 2^{3/2} - \frac{1}{\log_3 3^{2/3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$xe^{2x} - 3x = 0$$

✎

L'equazione equivale a

$$x\big(e^{2x} - 3\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad e^{2x} - 3 = 0.$$

Per quanto riguarda la seconda abbiamo le equazioni equivalenti

$$e^{2x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Le soluzioni sono quindi $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{2}\ln 3$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{1 + \ln x}{x - 1} > 0$$

✎

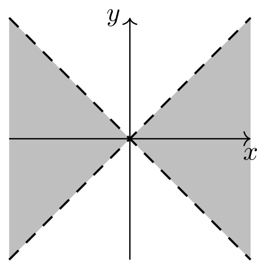
Si tenga conto che le condizioni di esistenza sono $x > 0$ e $x \neq 1$. La disequazione equivale ai sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < -1 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{e} \\ x < 1. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono $0 < x < \frac{1}{e}$ oppure $x > 1$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 > y^2$

✎



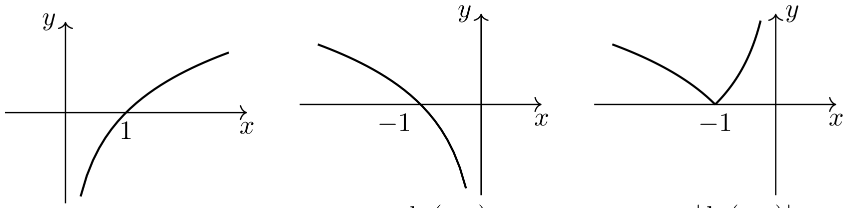
La disequazione equivale a

$$x^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases} \vee \begin{cases} y > x \\ y < -x. \end{cases}$$

La disequazione è verificata nella regione rappresentata in grigio qui a fianco.



$x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $x \mapsto \ln(-x)$ $\qquad$ $x \mapsto |\ln(-x)|$

Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = |\ln(-x)|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sopra.

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+x)}{x^2-x-1}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+x)}{x^2-x-1} = \frac{\ln(0^+ + 0^+)}{0-0-1} = \frac{\ln(0^+)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x\big(1-\ln^2 x\big)$

✎

$$f'(x) = 1\cdot\big(1-\ln^2 x\big) + x\left(-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right) = 1-\ln^2 x - 2\ln x.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + c. \qquad \left(\text{L'integrale è del tipo } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.\right)$$

Domanda 10. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y - y^2 - y$

✎

I punti stazionari si trovano annullando le derivate parziali della funzione. Quindi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

I punti stazionari sono quindi $(0, -\frac{1}{2})$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 01/02/2019

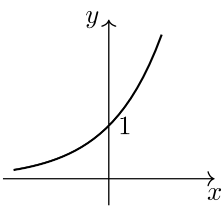
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x} & x \leq 0 \\ \ln(x+1) & x > 0, \end{cases}$$

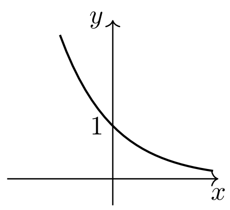
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica se alla funzione f è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo $[-1, 1]$ e si dica comunque se la tesi è vera.

✎

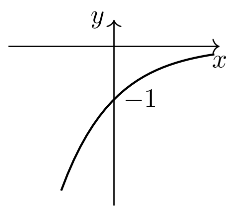
Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono le seguenti.



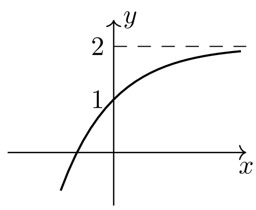
$x \mapsto e^x$



$x \mapsto e^{-x}$

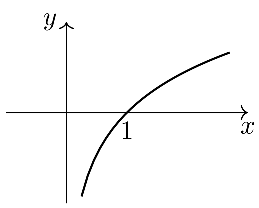


$x \mapsto -e^{-x}$

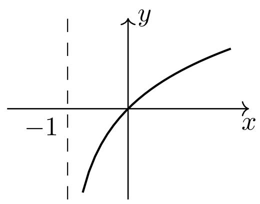


$x \mapsto 2 - e^{-x}$

La trasformazione grafica elementare della funzione logaritmica è la seguente.

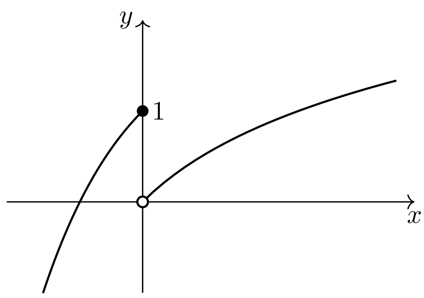


$x \mapsto \ln x$



$x \mapsto \ln(x+1)$

Il grafico della funzione f, che è definita in tutto $\mathbb{R}$, è pertanto quello qui sotto.



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione non è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra essa è una funzione logaritmica.

Si ha

$$f(0) = 2 - e^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0.$$

La funzione dunque non è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Possiamo affermare che la funzione non è derivabile in 0 dato che non è continua. Questo è sufficiente per rispondere alla domanda.

Metto però in guardia da un possibile errore (che molti hanno commesso in questa prova). Se scriviamo la derivata di f, nei punti in cui è derivabile (cioè per $x \neq 0$), abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & x > 0. \end{cases}$$

Se ora calcoliamo i limiti sinistro e destro della derivata otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Saremmo portati a dire che la funzione è quindi derivabile. L'errore sta nel fatto che i limiti delle derivate sono significativi solo se la funzione è continua. Si ricordi che in generale il limite della derivata non coincide concettualmente con la derivata, che viene definita dal limite del rapporto incrementale. Quindi in generale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} f'(x) \qquad \text{non sono la stessa cosa.}$$

A verifica di questo, nel nostro caso, possiamo vedere che il limite del rapporto incrementale fornisce la soluzione corretta. Infatti, se lo calcoliamo da sinistra ($f(0) = 1$),

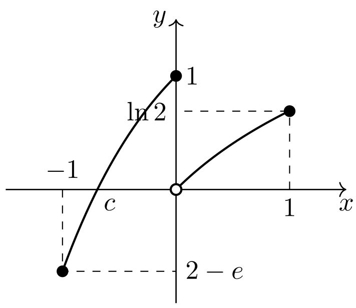
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2 - e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - e^{t}}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t} - 1}{t} \text{ (limite notevole) } = 1$$

e qui non c'è contraddizione con il limite della derivata in quanto la funzione è continua da sinistra, ma da destra

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1) - 1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

e ci si accorge quindi che f non è derivabile.

Passiamo alle domande sul teorema degli zeri. Il teorema non è applicabile alla funzione f nell'intervallo $[-1, 1]$,[8] dato che la funzione non è continua in questo intervallo, come trovato sopra.



Se le ipotesi non sono verificate la tesi del teorema può essere comunque verificata e l'ultima domanda chiede appunto di dire se la tesi è vera. La tesi del teorema degli zeri è che esiste un punto nell'intervallo $[-1, 1]$ in cui la funzione si annulla, cioè un punto c in cui $f(c) = 0$.

Qui serve un grafico accurato della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$. In particolare è importante trovare dove la funzione esponenziale si annulla.[9] Basta risolvere l'equazione

$$2 - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln 2 \simeq -0.7 > -1.$$

Quindi la tesi è vera e risulta $c = -\ln 2$.

ESERCIZIO 2. Dato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

si provi che $(-2, -1, -1)$ è una sua soluzione. Si determini la dimensione del sottospazio delle soluzioni del sistema. Si trovino tutte le soluzioni e si indichi una base di queste. Si dica infine se aggiungendo al sistema la quarta equazione $-2x + 3y + z = 0$ le soluzioni restano le stesse oppure si modificano.

✎

Per provare che $(-2, -1, -1)$ è una soluzione del sistema basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} -(-2) + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0 \\ -1 - (-1) = -1 + 1 = 0 \\ -2 - (-1) - (-1) = -2 + 1 + 1 = 0. \end{cases}$$

[8] Ricordo che un teorema è applicabile se sono verificate le sue ipotesi, che in questo caso sono: funzione f continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo, proprietà che può essere sinteticamente espressa con $f(a) \cdot f(b) < 0$.

[9] È evidente dal grafico che, se esiste, il punto c non può stare a destra dell'origine.

La dimensione del sottospazio delle soluzioni del sistema è uguale al numero di variabili meno il rango della matrice del sistema, che è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A (rispetto alla prima riga) è $-1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 0$ e quindi il rango non è 3. Dato che, ad esempio, il minore principale di Nord-Ovest di ordine 2 vale -1, il rango è 2. Quindi la dimensione del sottospazio delle soluzioni è 1.

Risolviamo ora il sistema. Dato che siamo sicuri che la terza equazione è dipendente dalle altre due (si ricordi come siamo arrivati al rango di A), il sistema si può ridurre a

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = z. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono quindi scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big(2z, z, z\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni basta riscrivere queste come

$$\mathcal{S} = \Big\{ z\big(2, 1, 1\big) \ : \ z \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che il vettore $\big(2, 1, 1\big)$ forma una base di $\mathcal{S}$.

Ultima domanda: aggiungendo al sistema la quarta equazione $-2x + 3y + z = 0$ le soluzioni restano le stesse oppure si modificano? Vi sono molti modi per rispondere. Il più laborioso è forse risolvere il nuovo sistema di 4 equazioni in 3 incognite e vedere se le soluzioni sono le stesse oppure no. Il modo più rapido è vedere se l'aggiunta di una quarta riga alla matrice A fa aumentare il rango oppure no.[10] Non occorre nemmeno riscrivere la matrice 4×3, basta considerare la 3×3 data dalle due righe indipendenti e la nuova riga:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A' (rispetto alla prima riga) è $-1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0$ e quindi il rango rimane inalterato e così le soluzioni.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x + y}{1 - x^2}}$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se esistono punti stazionari. Si determini e si disegni nel dominio la curva lungo la quale la funzione assume il valore 1.

✎

Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

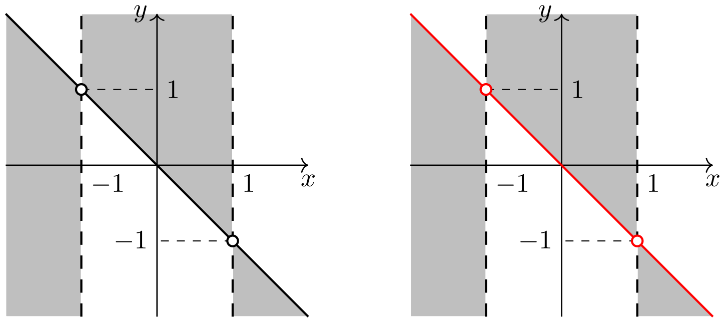
$$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \\ \dfrac{x + y}{1 - x^2} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{che equivale a} \qquad \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x + y \leq 0 \\ 1 - x^2 < 0 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} y \geq -x \\ x^2 < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y \leq -x \\ x^2 > 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y \geq -x \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y \leq -x \\ x < -1 \ \vee \ x > 1. \end{cases}$$

Il dominio di f è rappresentato qui sotto a sinistra, con la precisazione che per quanto riguarda i punti di frontiera quelli sulla retta $y = -x$ appartengono al dominio, gli altri no.

[10] Se il rango diventa 3 il nuovo sistema ha una sola soluzione e quindi le soluzioni cambiano. Se il rango rimane 2 vuol dire che la nuova riga aggiunta è anch'essa dipendente dalle prime due e quindi il sistema resta sostanzialmente lo stesso.



La funzione si annulla nelle soluzioni dell'equazione (nel dominio $1-x^2$ è diverso da zero)

$$\sqrt{\frac{x+y}{1-x^2}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+y}{1-x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=-x.$$

Pertanto la funzione si annulla nei punti di frontiera che stanno sulla retta bisettrice del secondo e quarto quadrante, indicati in rosso nella figura qui sopra a destra. Attenzione che i punti $(-1,1)$ e $(1,-1)$ vanno esclusi.

Ora calcoliamo il gradiente di f.

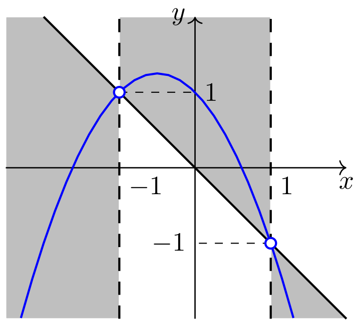
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{1-x^2}}}\cdot\frac{1-x^2-(x+y)(-2x)}{(1-x^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{1-x^2}}}\cdot\frac{1}{1-x^2}.$$

Per trovare gli eventuali punti stazionari dobbiamo annullare entrambe le derivate parziali. Si vede subito che la seconda non può annullarsi. Quindi non ci sono punti stazionari.

La curva lungo la quale la funzione assume il valore 1 è data dalle soluzioni dell'equazione $f(x,y)=1$, e cioè

$$\sqrt{\frac{x+y}{1-x^2}}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+y}{1-x^2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x+y=1-x^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=1-x-x^2.$$

Si tratta di una parabola con asse verticale e concavità rivolta verso il basso. Per un grafico preciso si può osservare che per $x=1$ si ha $y=-1$ e per $x=-1$ si ha $y=1$, quindi la parabola passa per i due punti "particolari" $(-1,1)$ e $(1,-1)$. Ecco di nuovo il dominio completo, con l'aggiunta in blu della curva di livello 1.



ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 21/06/2019

Domanda 1. Semplificare l'espressione $\dfrac{x-1}{x-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x}$

✎

Propongo due modi equivalenti. Si ricordi che $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

$$\frac{x-1}{x-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \frac{x-1}{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \frac{\frac{x+1}{x}}{x} = (x-1) \cdot \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Oppure, svolgendo i prodotti a numeratore e denominatore,

$$\frac{x-1}{x-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \frac{x+1-1-\frac{1}{x}}{x^2-1} = \frac{x-\frac{1}{x}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x^2-1} = \frac{1}{x}.$$

Domanda 2. Usando le proprietà di potenze e logaritmi calcolare $\quad 2\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{2}$

✎

$$2\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x - x\sqrt{x} = 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x \geq 0$. Raccogliamo x:

$$x(1-\sqrt{x}) = 0 \quad \text{, che equivale a} \quad x = 0 \quad \text{oppure} \quad \sqrt{x} = 1.$$

La seconda fornisce $x = 1$. Pertanto (sono entrambe accettabili per le condizioni di esistenza), le soluzioni sono $x = 0$ oppure $x = 1$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} - \log_2(-x) < 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $-x > 0$, che significa $x < 0$, la disequazione equivale a

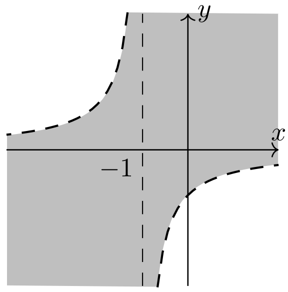
$$\log_2(-x) > \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad -x > 2^{1/2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\sqrt{2}.$$

Per le condizioni di esistenza le soluzioni accettabili sono $-\sqrt{2} < x < 0$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $xy + y + 1 > 0$

✎

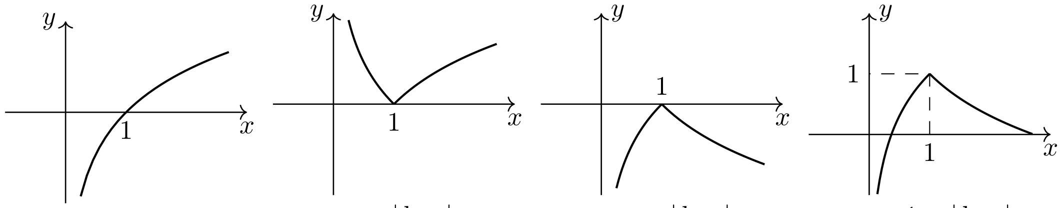
La disequazione si può riscrivere nella forma $(x+1)y > -1$. L'equazione associata individua l'iperbole di centro $(-1,0)$, con rami nei corrispondenti del secondo e quarto quadrante. Per determinare la regione che soddisfa la disequazione si può calcolare il primo membro nel centro dell'iperbole. Si ottiene la disuguaglianza $0 > -1$, che è vera. Quindi la regione è quella che contiene il centro. L'insieme è rappresentato in grigio nella figura che segue.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = 1 - \left|\ln x\right|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



$x \mapsto \ln x$ $\quad x \mapsto |\ln x|$ $\quad x \mapsto -|\ln x|$ $\quad x \mapsto 1 - |\ln x|$

Domanda 7. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{-x} \ln\left(1 - x^2\right)$

✎

Con l'algebra dei limiti

$$\lim_{x\to 1^-} e^{-x} \ln\left(1 - x^2\right) = e^{-1} \ln\left(1 - 1^-\right) = \frac{1}{e} \ln(0^+) = \frac{1}{e} \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{1/x}\,(1 - e^x)$

✎

$$f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)(1 - e^x) + e^{1/x}\,(-e^x)\,.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$

✎

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x = \int (1+\ln x)^{-1/2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(1+\ln x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+\ln x} + c. \qquad \left(\int f^\alpha \cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right).$$

Domanda 10. Stabilire se la funzione $f(x, y) = y\ln(xy)$ ha punti stazionari

✎

Le derivate parziali prime sono

$$f'_x = y \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad f'_y = 1 \cdot \ln(xy) + y \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \ln(xy) + 1.$$

Queste si annullano solo se $y = 0$ (derivata rispetto ad x), peraltro già non accettabile nelle condizioni di esistenza della funzione. Con $y = 0$ la seconda derivata vale comunque 1. Quindi non ci sono punti stazionari.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 26/06/2019

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln(2-x) + 2x,$$

se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si trovino i punti stazionari. Si studi poi l'andamento della funzione e si trovino gli eventuali punti di massimo o minimo locali e globali, disegnando un possibile grafico di f. Si determini infine l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

✎

La condizione di esistenza per la funzione è

$$2 - x > 0 \qquad \text{cioè} \qquad x < 2.$$

I limiti significativi sono per $x \to 2^-$ e per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 2^-} \big(\ln(2-x) + 2x\big) = \ln(2-2^-) + 4 = \ln 0^+ + 4 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} \big(\ln(2-x) + 2x\big) = \ln(2+\infty) - \infty = +\infty - \infty \quad \text{(forma indeterminata)}.$$

La forma si può risolvere in vari modi: ne propongo due.
Raccogliendo x si ha

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\ln(2-x)}{x} + 2\right).$$

Il limite del quoziente (forma ∞/∞) si può calcolare con il teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(2-x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{2-x}}{1} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-x} = 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\ln(2-x)}{x} + 2\right) = -\infty \cdot (0+2) = -\infty.$$

Oppure, considerando che in $\ln(2-x) + 2x$, per $x \to -\infty$, il primo termine è un infinito logaritmico e il secondo è una potenza, sappiamo che la potenza è un infinito più veloce e quindi il limite è dato dalla potenza.
Pertanto il limite è $-\infty$.
Possiamo anche osservare che nell'origine la funzione assume il valore $f(0) = \ln 2$. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + 2 = \frac{1}{x-2} + 2.$$

I punti stazionari si trovano annullando la derivata.

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x-2} + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x-2} = -2 \quad\Leftrightarrow\quad x - 2 = -\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3}{2}.$$

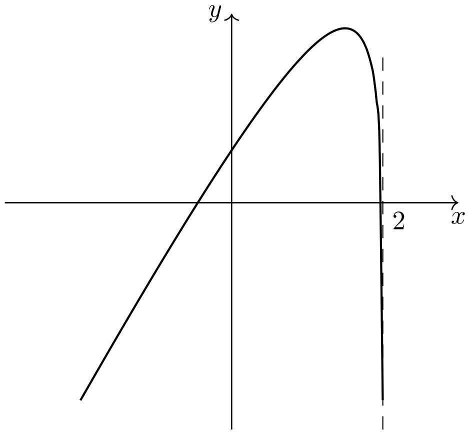
L'unico punto stazionario è $x = \frac{3}{2}$.
Per studiare l'andamento della funzione e trovare eventuali punti di massimo o minimo locali e globali dobbiamo studiare il segno della derivata. Si ha

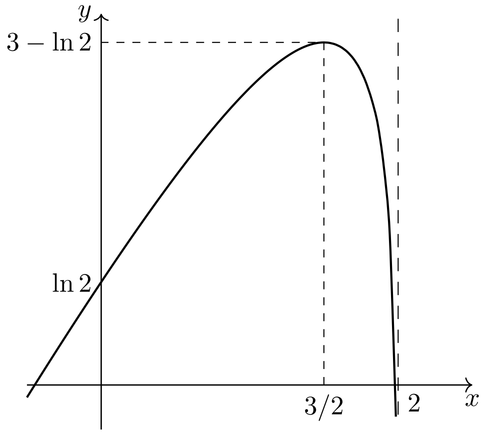
$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x-2} + 2 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+2x-4}{x-2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x-3}{x-2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x - 3 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad x < \frac{3}{2}.$$ [11]

[11] Qui alcuni commenti sono opportuni. Anzitutto, nella risoluzione della disequazione, il passaggio dalla quarta alla quinta disequazione è avvenuto considerando che nel dominio il denominatore $x-2$ è negativo. Inoltre, confrontando i passaggi usati per risolvere l'equazione e quelli per la disequazione, è naturale chiedersi perché non si sia fatto in entrambi quello fatto per l'equazione. La spiegazione è che nella risoluzione dell'equazione il segno dei termini non è importante, in quella della disequazione sì. Quindi, arrivati a $\frac{1}{x-2} = -2$, si può semplicemente passare ai reciproci con $x-2 = -\frac{1}{2}$. Invece, con la disequazione $\frac{1}{x-2} > -2$ il passaggio $x - 2 < -\frac{1}{2}$ è "pericoloso". Si pensi ad esempio alla disuguaglianza $\frac{1}{2} > -1$ (vera), che passando ai reciproci dà $2 < -1$ (falsa). Quindi con le disequazioni è più sicuro ridurre allo stesso denominatore dopo aver ottenuto zero a destra.

In base al segno della derivata possiamo pertanto affermare che la funzione f è crescente nell'intervallo $(-\infty, \frac{3}{2}]$ e quindi decrescete nell'intervallo $[\frac{3}{2}, 2)$. In $x = \frac{3}{2}$ c'è dunque un punto di massimo, che sarà certamente globale, visto l'andamento della funzione. Il valore della funzione nel punto di massimo (cioè il massimo della funzione) è $f(\frac{3}{2}) = 3 - \ln 2$.

Siamo ora in grado di disegnare un possibile grafico di f, nella figura qui sotto a sinistra. Nella figura a destra è ingrandito il dettaglio del punto di massimo.





Veniamo all'ultima domanda: determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$. L'equazione della retta tangente è

$$y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0). \quad \text{Abbiamo } f(0) = \ln 2 \text{ e } f'(0) = \frac{3}{2}.$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$y = \ln 2 + \frac{3}{2}x.$$

ESERCIZIO 2. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = (1, 1, 0, 0) \quad , \quad v^2 = (0, -1, -1, 0) \quad , \quad v^3 = (0, 1, 1, -1).$$

Si stabilisca se i tre vettori sono linearmente indipendenti oppure no. Indicata poi con A la matrice formata con i tre vettori disposti in riga, si risolva il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, indicando anche la dimensione e una base delle sue soluzioni. Se invece indichiamo con B la matrice in cui i tre vettori sono le colonne, quante e quali sono le soluzioni del sistema $Bx = 0$?

✎

Per stabilire se i tre vettori sono linearmente indipendenti si potrebbe usare la definizione, ma come sempre conviene utilizzare il concetto di rango. Con i tre vettori (in riga) formiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo affermare che v^1, v^2, v^3 sono linearmente indipendenti se e solo se il rango di A è 3, cioè è uguale al numero dei vettori. Si vede facilmente che il determinante della sottomatrice formata con le prime 3 colonne si annulla, ma quello della sottomatrice evidenziata in grigio è diverso da zero. Quindi il rango di A è 3 e i vettori sono linearmente indipendenti.

Abbiamo già indicato con A la matrice formata con i tre vettori disposti in riga. Ora è richiesta la soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. Il sistema è

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z - t = 0. \end{cases}$$

Attenzione a non fare confusione con le notazioni. Quando scriviamo il sistema nella forma matriciale $Ax = 0$ la x è un vettore, cioè il vettore delle variabili (incognite); quando scriviamo il sistema "per esteso" la x è la prima variabile. Per questo motivo sarebbe in effetti preferibile, anche se un po' più pesante in termini di notazioni, continuare a scrivere $Ax = 0$ come forma matriciale, ma scrivere per esteso le variabili come x_1, x_2, ... A volte si usa invece una notazione tipografica diversa per indicare il vettore x (ad esempio una x in grassetto o una x con una freccina sopra.)

Indicando con S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni del sistema, possiamo subito dire che $\dim S = 4 - rA = 1$ e che quindi S è generato da un unico vettore non nullo.

Per risolvere il sistema, coerentemente con il fatto che il rango è stato calcolato mediante il minore che esclude la prima colonna, possiamo utilizzare come parametro la variabile x. Il sistema, dopo aver portato x con i termini noti, diventa

$$\begin{cases} y = -x \\ -y - z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = 0. \end{cases}$$

Pertanto possiamo scrivere direttamente le soluzioni:

$$S = \big\{(x, -x, x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x(1, -1, 1, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'ultima scrittura trovata dice che le soluzioni sono tutti i vettori multipli del vettore $(1, -1, 1, 0)$. Questo vettore è quindi una base di S. Si noti che il numero dei vettori che formano una base (cioè 1) coincide con la dimensione del sottospazio, trovata prima.

Passiamo all'ultima domanda e indichiamo con B la matrice in cui i tre vettori sono le colonne, cioè poniamo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per dire quante e quali sono le soluzioni del sistema $Bx = 0$ ci sono due modi: o trovarle, come fatto prima con l'altro sistema, oppure servirsi dei risultati generali per rispondere senza fare i calcoli. Vediamo entrambe le strade.

Il calcolo diretto porta al sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -z = 0. \end{cases}$$

Dalla prima e quarta equazione si ha che x e z devono essere zero. A questo punto anche y è zero, per la terza equazione. L'unica soluzione è dunque quella banale, cioè la soluzione $(0, 0, 0)$.

Per rispondere subito si poteva osservare che il rango della matrice $B = A^T$ è lo stesso di A, e quindi 3. La dimensione dello spazio delle soluzioni S_B del sistema $Bx = 0$ è quindi $\dim S_B = 3 - rB = 0$, il che significa (attenzione!) non che S_B è vuoto, ma che contiene un solo elemento. Tale elemento è necessariamente il vettore nullo, dato che il sistema è omogeneo.[12]

ESERCIZIO 3. Data la funzione

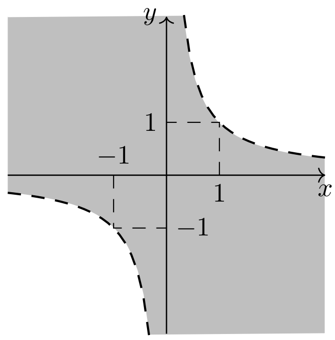
$$f(x, y) = x + \ln\big(1 - xy\big),$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si determini l'unico punto stazionario della funzione. Si scrivano le restrizioni di f agli assi cartesiani. Si stabilisca infine la natura del punto stazionario trovato.

✎

La condizione per l'esistenza della funzione f è espressa dalla disequazione

$$1 - xy > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad xy < 1.$$



Questa individua la parte di piano tra i due rami dell'iperbole $xy = 1$. L'insieme è raffigurato in grigio qui a fianco.

Calcoliamo il gradiente di f. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{-y}{1 - xy} = 1 + \frac{y}{xy - 1}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{1 - xy} = \frac{x}{xy - 1}.$$

[12]Si ricordi che un sistema omogeneo ha sempre soluzioni, dato che quella banale, cioè il vettore nullo, è certamente soluzione del sistema.

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(1 + \frac{y}{xy-1}\ ,\ \frac{x}{xy-1}\right).$$

Cerchiamo l'unico punto stazionario annullando le due derivate parziali. Osservando che la $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annulla solo per $x = 0$, con tale valore la $\frac{\partial f}{\partial x}$ vale $1 - y$, e quindi dovrà essere $y = 1$. Il punto stazionario è quindi $(0,1)$.
Le restrizioni di f agli assi cartesiani sono:

$$f\Big|_{x=0} = 0 + \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad f\Big|_{y=0} = x + \ln 1 = x.$$

Stabiliamo infine la natura del punto stazionario trovato. Occorre calcolare intanto le derivate seconde della funzione f. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{(1-xy)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1\cdot(xy-1) - y\cdot x}{(1-xy)^2} = -\frac{1}{(1-xy)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{(1-xy)^2}.$$

La matrice Hessiana di f è quindi

$$\nabla^2 f(x,y) = -\frac{1}{(1-xy)^2}\begin{pmatrix} y^2 & 1 \\ 1 & x^2. \end{pmatrix}$$

Calcolando tale matrice nel punto stazionario si ha

$$\nabla^2 f(0,1) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di una matrice indefinita, dato che il determinante è negativo. Quindi il punto stazionario è un punto di sella, cioè né di massimo né di minimo.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 26/08/2019

Domanda 1. Scomporre in fattori non ulteriormente scomponibili il polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$

✎

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Domanda 2. Per quali valori di x è definita l'espressione $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(2-x)}$?

✎

L'espressione è definita per

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x > 0 \\ \ln(2-x) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \\ 2 - x \neq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \\ x \neq 1. \end{cases} \quad \text{Quindi per } x \in [0,1) \cup (1,2).$$

Domanda 3. Risolvere l'equazione

$$x - x\sqrt{x-1} = 0$$

✎

La condizione di esistenza è $x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq 1$. Raccogliamo x:

$$x(1 - \sqrt{x-1}) = 0, \text{ che equivale a } \quad x = 0 \quad \text{oppure} \quad \sqrt{x-1} = 1.$$

La prima non è accettabile. La seconda equivale a $x - 1 = 1$, cioè $x = 2$. Pertanto l'unica soluzione è $x = 2$.

Domanda 4. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} - \log_3(-x) > 0$$

✎

Con la condizione di esistenza $-x > 0$, che significa $x < 0$, la disequazione equivale a

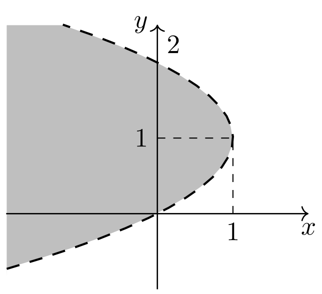
$$\log_3(-x) < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -x > 3^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad x > -\sqrt[3]{3}.$$

Per la condizione di esistenza le soluzioni accettabili sono $-\sqrt[3]{3} < x < 0$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $1 - x - (y-1)^2 > 0$

✎

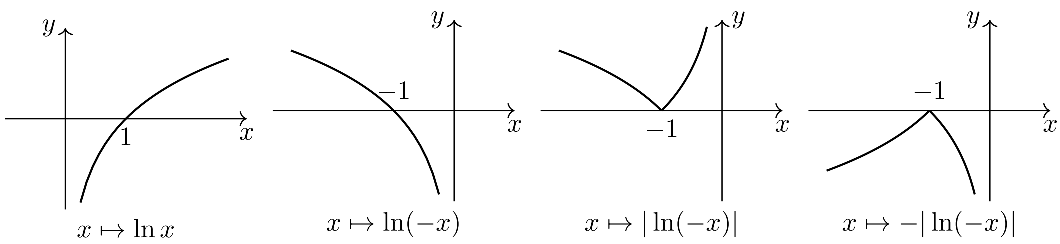
La disequazione si può riscrivere nella forma $x < -(y-1)^2 + 1$. L'equazione associata individua una parabola con asse orizzontale e concavità rivolta verso sinistra. Il vertice è in $(1,1)$. La regione che soddisfa la disequazione è quella che sta a sinistra della parabola, punti sulla parabola esclusi. L'insieme è rappresentato in grigio nella figura che segue.



Domanda 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico della funzione $f(x) = -\big|\ln(-x)\big|$

✎

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Domanda 7. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{1-e^x}$

✎

Con l'algebra dei limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{1-e^x} = \frac{1-\ln(0^+)}{1-e^{0^+}} = \frac{1-(-\infty)}{1-1^+} = \frac{1+\infty}{0^-} = -\infty.$$

Domanda 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

✎

Derivando come composta si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+e^{1/x})^2} \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2}.$$

Oppure, derivando come quoziente,

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1+e^{1/x}) - 1 \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2}.$$

Domanda 9. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int e^x(1+e^x)^4 \,\mathrm{d}x$

✎

Osservando che l'integrale è del tipo $\int f^\alpha \cdot f'$, con $f(x) = 1 + e^x$ e $\alpha = 4$, si ha

$$\int e^x(1+e^x)^4 \,\mathrm{d}x = \frac{(1+e^x)^5}{5} + c.$$

Domanda 10. Determinare il punto stazionario della funzione $f(x,y) = y + x\ln y$

✎

Le derivate parziali prime sono

$$f'_x = \ln y \qquad \text{e} \qquad f'_y = 1 + \frac{x}{y}.$$

Quindi i punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \ln y = 0 \\ 1 + \frac{x}{y} = 0. \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per $y = 1$ che, sostituito nella seconda, porta a $1 + x = 0$, cioè $x = 1$. Quindi l'unico punto stazionario è $(1,1)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 30/08/2019

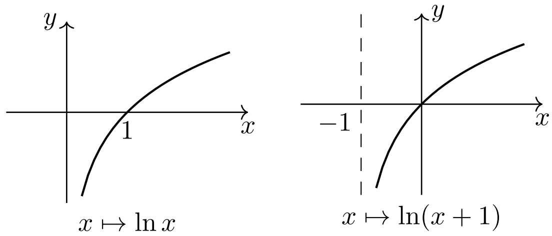
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ 2 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

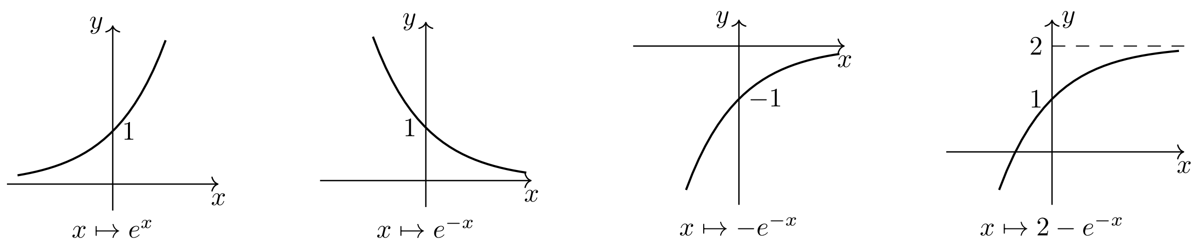
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si considerino tutte le ipotesi del teorema degli zeri e si dica se la funzione f le soddisfa nell'intervallo $\left[\frac{1}{e} - 1, 1\right]$. Si dica infine comunque se la tesi è vera.

✎

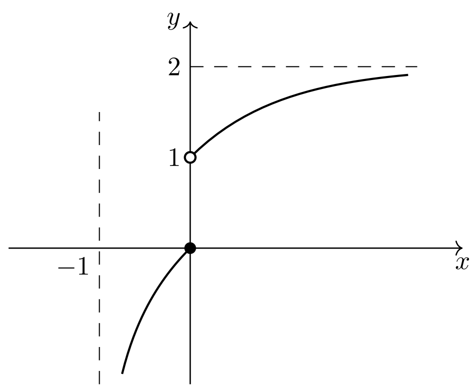
La trasformazione grafica elementare della funzione logaritmica è la seguente.



Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono le seguenti.



Il grafico della funzione f, che è definita in tutto $\mathbb{R}$, è pertanto quello qui sotto.



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione non è continua in 0. Verifichiamolo comunque anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione logaritmica. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che nel punto $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione logaritmica, mentre a destra essa è una funzione esponenziale.

Si ha

$$f(0) = \ln(1+0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 - e^{-x} = 2 - e^0 = 1.$$

La funzione dunque non è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Possiamo affermare che la funzione non è derivabile in 0 dato che non è continua. Questo è sufficiente per rispondere alla domanda.

Metto però in guardia da un possibile errore (che alcuni hanno commesso in questa prova). Se scriviamo la derivata di f, nei punti in cui è derivabile (cioè per $x \neq 0$), abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Se ora calcoliamo i limiti sinistro e destro della derivata otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1.$$

Saremmo portati a dire che la funzione è quindi derivabile. L'errore sta nel fatto che i limiti delle derivate sono significativi solo se la funzione è continua. Si ricordi che in generale il limite della derivata non coincide concettualmente con la derivata, che viene definita dal limite del rapporto incrementale. Quindi in generale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} f'(x) \qquad \text{non sono la stessa cosa.}$$

A verifica di questo, nel nostro caso, possiamo vedere che il limite del rapporto incrementale fornisce la soluzione corretta. Infatti, se lo calcoliamo da sinistra ($f(0) = 0$),

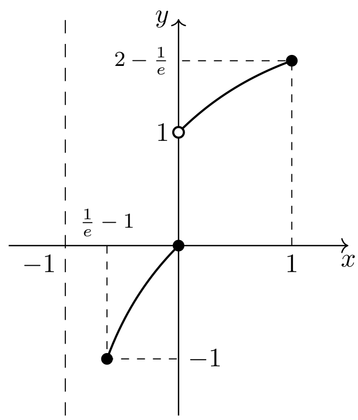
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x+1) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = \text{(limite notevole)} = 1,$$

e qui non c'è contraddizione con il limite della derivata in quanto la funzione è continua da sinistra, ma da destra

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - e^{-x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 - e^{-x}}{x} = \frac{2 - e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

e ci si accorge quindi che f non è derivabile.

Passiamo alle domande sul teorema degli zeri. Le ipotesi del teorema sono che la funzione sia definita in un intervallo chiuso e limitato, sia continua in tale intervallo e infine che assuma valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo stesso.



La prima ipotesi è verificata: la domanda si riferisce all'intervallo $\left[\frac{1}{e} - 1, 1\right]$. La seconda ipotesi non è verificata, dato che la funzione non è continua in 0, che è interno all'intervallo considerato. Vediamo la terza ipotesi: calcoliamo i valori di f agli estremi.

$$f\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{e} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

e

$$f(1) = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e}.$$

Nel primo estremo la funzione è negativa, nel secondo è positiva. L'ipotesi è quindi verificata.[13]

La tesi del teorema degli zeri è che esiste un punto interno all'intervallo in cui la funzione ha valore zero. Banalmente, conosciamo già questo punto, dato che $f(0) = 0$. Il grafico ci consente anche di dire che è l'unico.

ESERCIZIO 2. Dato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -x + 2z + t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

si provi che $(1, -1, 1, -1)$ è una soluzione. Scritta la matrice A del sistema, si determini la dimensione del sottospazio delle soluzioni. Si trovino tutte le soluzioni e si indichi una base di queste.

[13](Se fosse stato richiesto) Possiamo dire che il teorema non è applicabile, dato che non tutte le ipotesi sono verificate. La tesi comunque può essere vera lo stesso. L'ultima domanda chiede appunto questo.

✎

Per provare che $(1, -1, 1, -1)$ è una soluzione del sistema basta sostituire le sue componenti al posto delle variabili e verificare che le tre equazioni sono soddisfatte. Si trova facilmente

$$\begin{cases} -1 + 2 - 1 = 0 \\ -1 - 1 + 2 = 0 \\ 1 + 1 - 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

La matrice A del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dimensione del sottospazio delle soluzioni del sistema è uguale al numero di variabili meno il rango della matrice del sistema. Occorre trovare il rango di A.

Qui come sempre possiamo fare in due modi. Il primo consiste nel calcolare alcuni determinanti di sottomatrici di A. Seguiamo questa strada. Vediamo se il rango è 3, considerando sottomatrici del 3° ordine. Prendiamo la "prima", quella formata dalle prime 3 colonne. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Attenzione. Non possiamo dire ancora nulla, dato che ci sono altre sottomatrici di ordine 3. Quella formata escludendo la 3° colonna:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dobbiamo continuare. Quella formata escludendo la 2° colonna:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'ultima, quella formata escludendo la 1° colonna:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Solo ora possiamo dire che il rango non è 3. È certamente 2, dato che ad esempio il minore formato con le prime due righe e le prime due colonne è diverso da zero.

Si poteva anche seguire un'altra strada, che però non è sempre così semplice: scoprire se c'è una dipendenza tra le righe o le colonne.[14] Nel nostro caso si trova che la 3^{a} riga si ottiene sommando gli opposti delle altre due. Questo porta a dire che il rango non è 3 e la conclusione che è 2 può avvenire come sopra.

Faccio anche notare che scoprire una dipendenza tra le colonne (ad esempio nel nostro caso che la 4^{a} si ottiene facendo "$-1^{\mathrm{a}} - 2 \cdot 2^{\mathrm{a}}$") non permette di dire che il rango non è massimo, dato che le colonne sono certamente dipendenti in una matrice 3×4. Questo però consente comunque di risparmiare il calcolo di tutti i determinanti tranne quello della "sottomatrice che resta", cioè in questo caso quella fatta dalle prime 3 colonne.

Possiamo allora concludere che la dimensione del sottospazio delle soluzioni del sistema è $4 - 2 = 2$.

Troviamo ora le soluzioni del sistema. Dato che siamo sicuri che la terza equazione è dipendente dalle altre due (si ricordi come siamo arrivati al rango di A), possiamo eliminare la terza equazione e ridurre il sistema a

$$\begin{cases} -x + 2z + t = 0 \\ y - z - 2t = 0. \end{cases}$$

[14] Il problema è che si potrebbe perdere molto tempo cercando una dipendenza che non c'è.

Dato che la dimensione delle soluzioni è 2, vuol dire che le soluzioni si possono esprimere in funzione di 2 parametri. Pertanto possiamo ricavare x e y in funzione di z e t.

$$\begin{cases} x = 2z + t \\ y = z + 2t. \end{cases}$$

Le soluzioni si possono quindi scrivere come l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big\{ \big(2z + t, z + 2t, z, t\big) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Per trovare una base delle soluzioni basta riscrivere queste come

$$\mathcal{S} = \Big\{ z\big(2, 1, 1, 0\big) + t(1, 2, 0, 1) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \Big\},$$

da cui si ricava che i vettori $\big(2, 1, 1, 0\big)$ e $\big(1, 2, 0, 1\big)$ formano una base di $\mathcal{S}$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x + y}{1 - y^2}}$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si determini in quali punti del dominio la funzione si annulla. Si calcoli il gradiente di f e si dica se esistono punti stazionari. Si determini e si disegni nel dominio la curva lungo la quale la funzione assume il valore 1.

✎

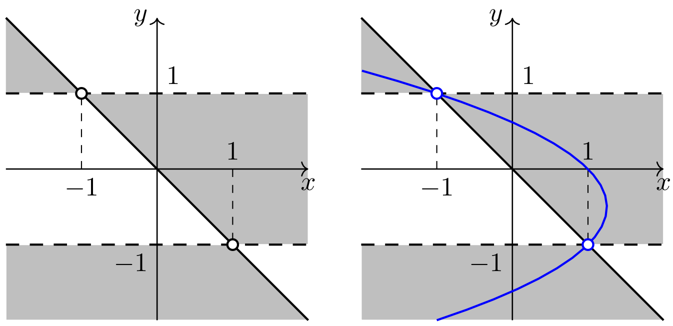
Le condizioni per l'esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x + y}{1 - y^2} \geq 0 \\ 1 - y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Queste equivalgono ai due sistemi

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 1 - y^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y \leq 0 \\ 1 - y^2 < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y \geq -x \\ -1 < y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq -x \\ y < -1 \ \vee \ y > 1. \end{cases}$$

Si tratta della regione raffigurata in grigio qui a fianco a sinistra.



Calcoliamo il gradiente di f. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{1-y^2}}} \cdot \frac{1}{1 - y^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+y}{1-y^2}}} \cdot \frac{1 - y^2 - (x + y)(-2y)}{(1 - y^2)^2}.$$

Il gradiente si può scrivere quindi come

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{2(1 - y^2)^2\sqrt{\frac{x+y}{1-y^2}}} \big(1 - y^2 \ , \ 1 + 2xy + y^2\big).$$

Possiamo dire facilmente che non ci sono punti stazionari, dato che la derivata parziale rispetto ad x non può annullarsi.

La curva lungo la quale la funzione assume il valore 1: si tratta delle soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 1$, cioè

$$\sqrt{\frac{x + y}{1 - y^2}} = 1, \text{ che equivale a } \frac{x + y}{1 - y^2} = 1, \text{ cioè } x + y = 1 - y^2, \text{ e quindi } x = 1 - y - y^2.$$

Si tratta di una parabola con asse orizzontale e concavità verso sinistra. Si verifica facilmente che essa passa per i punti $(-1, 1)$ e $(1, -1)$. La parabola quindi, ad eccezione di questi due punti, è interamente contenuta nel dominio di f. È rappresentata in blu nella figura sopra a destra.