PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2024

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 + x - \frac{1}{2}$

✎

$$x^2 + x - \frac{1}{2} = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}.$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{\ln(-x)}{\frac{1}{3} - e^x}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} -x > 0 \\ \frac{1}{3} - e^x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x < 0 \\ e^x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \neq \ln\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Attenzione che $\ln\frac{1}{3}$ è negativo. L'insieme è quindi $(-\infty, \ln\frac{1}{3}) \cup (\ln\frac{1}{3}, 0)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $x - \dfrac{3}{x} = 2$

✎

Con la condizione $x \neq 0$ l'equazione equivale a

$$x - \frac{3}{x} - 2 = 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - 2x - 3}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad ; \quad (x+1)(x-3) = 0 \quad ; \quad x = -1 \ \vee \ x = 3.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $\ln(x+2) + 3 < 0$

✎

C'è la condizione di esistenza $x + 2 > 0$, cioè $x > -2$. La disequazione equivale a

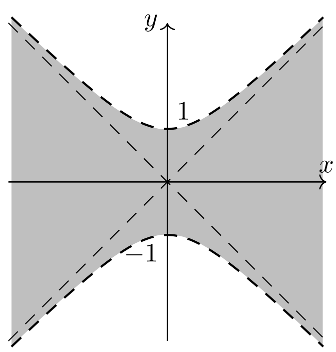
$$\ln(x+2) < -3 \quad ; \quad x + 2 < e^{-3} \quad ; \quad x < -2 + e^{-3}.$$

Pertanto le soluzioni sono $-2 < x < -2 + e^{-3}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 + 1 > 0$

✎

La disequazione equivale a $x^2 - y^2 > -1$. L'equazione corrispondente definisce un'iperbole di centro l'origine, con asintoti obliqui e rami che stanno al di sopra e al di sotto del centro. Possiamo trovare le pendenze degli asintoti con la formula $m = \pm\frac{b}{a}$ (nel nostro caso $a = b = 1$). Quindi $m = \pm 1$, cioè gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti. Per trovare la regione individuata dalla disuguaglianza possiamo verificare l'appartenenza dell'origine: si ottiene $0 > -1$, che è vera. Pertanto l'insieme delle soluzioni è la regione che contiene il centro, raffigurata qui a fianco in grigio.



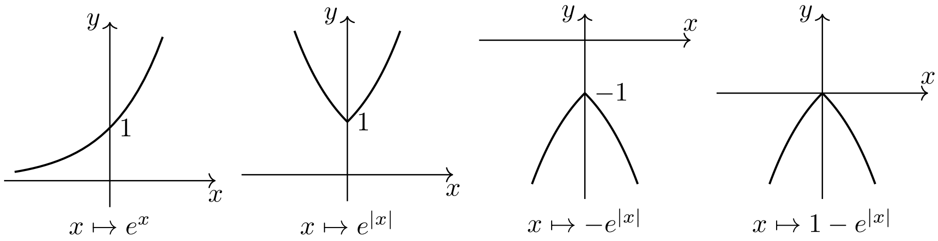
Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{|x|}$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$e^x \quad \to \quad e^{|x|} \quad \to \quad -e^{|x|} \quad \to \quad 1 - e^{|x|}.$$

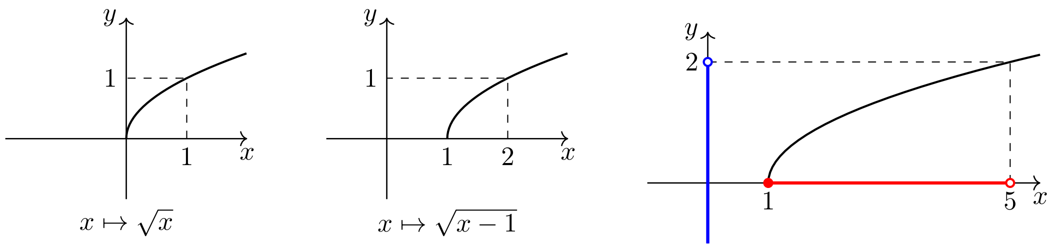
I grafici sono nella pagina seguente.



Domanda 7. Si trovi la controimmagine dell'intervallo $(-\infty, 2)$ attraverso la funzione $f(x) = \sqrt{x-1}$

✎

È molto utile un grafico, che si ottiene dal grafico di $\sqrt{x}$, con una traslazione a destra di 1.



Nella figura a destra è marcato in blu l'intervallo $(-\infty, 2)$, di cui si deve trovare la controimmagine. Dato che la controimmagine di 2 è 5 ($f(5) = 2$) si ha quindi $f^{-1}(-\infty, 2) = [1, 5)$.

Domanda 8. Si calcoli il $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln 0^+}{0^+} = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = \frac{1+\infty}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = x - \dfrac{1}{\ln x}$

✎

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-x}$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\frac{1}{2} - e^{-x} = 0 \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{2} \quad ; \quad -x = \ln\frac{1}{2} \quad ; \quad x = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/11/2024

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

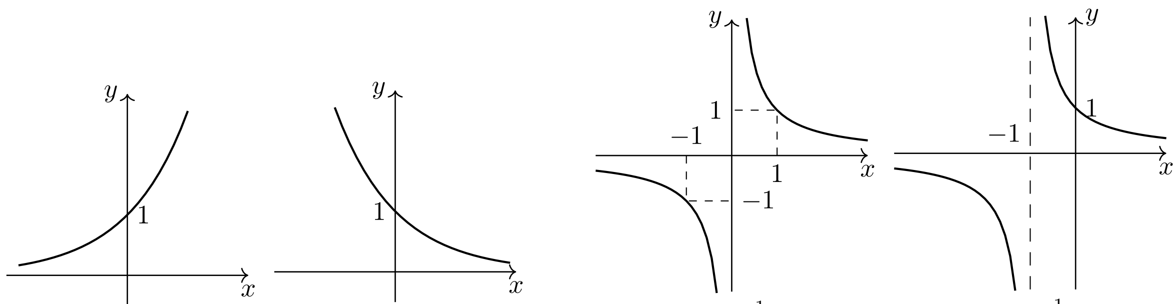
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, si dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

Si dica se la funzione è continua in tutto l'insieme di definizione. Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$ e se comunque è verificata la tesi.

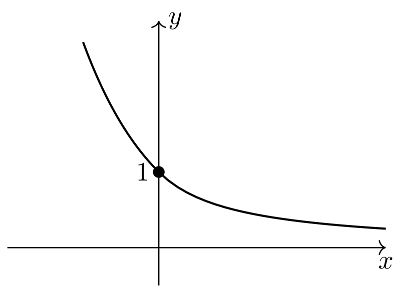
✎

Le trasformazioni grafiche delle funzioni e^{-x} e $\frac{1}{x+1}$ sono:



$x \mapsto e^{x}$ $x \mapsto e^{-x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x+1}$

Il grafico della funzione f è questo.



Dal grafico possiamo dire che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $(0, +\infty)$, dato che si ha

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Sempre dal grafico possiamo ricavare che la funzione è continua anche in $x = 0$. Verifichiamolo con la definizione.

$$f(0) = \frac{1}{0+1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{-x} = 1.$$

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x = 0$, dove la funzione, essendo continua, potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

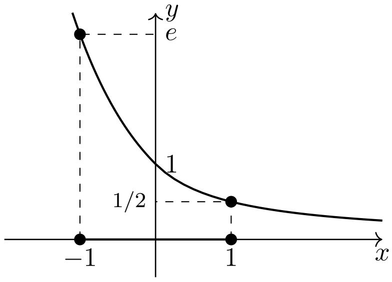
$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x < 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} (-e^{-x}) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -1.$$

Quindi la funzione è derivabile in 0.

Passiamo ora all'ultima domanda.



Nell'intervallo $[-1, 1]$, che è chiuso e limitato, la funzione è continua: quindi è applicabile il teorema di Weierstrass. Pertanto la tesi è vera, cioè esistono un punto di massimo e un punto di minimo nell'intervallo considerato. Dal grafico possiamo certamente affermare che il punto di massimo è $x_M = -1$ (con valore massimo $f(-1) = e$) e il punto di minimo è $x_m = 1$ (con valore minimo $f(1) = \frac{1}{2}$).

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 04/11/2024

Domanda 1. Completare il quadrato nel polinomio $x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

✎

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$

Domanda 2. Determinare in quale insieme è definita l'espressione $\dfrac{\ln(-x)}{e^x - \frac{1}{2}}$

✎

Le condizioni per cui è definita l'espressione sono

$$\begin{cases} -x > 0 \\ e^x - \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x < 0 \\ e^x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \neq \ln \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Attenzione che $\ln \frac{1}{2}$ è negativo. L'insieme è quindi $(-\infty, \ln \frac{1}{2}) \cup (\ln \frac{1}{2}, 0)$.

Domanda 3. Risolvere l'equazione $x - \dfrac{2}{x} = 1$

✎

Con la condizione $x \neq 0$ l'equazione equivale a

$$x - \frac{2}{x} - 1 = 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - x - 2}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad ; \quad x = -1 \ \vee \ x = 2.$$

Domanda 4. Risolvere la disequazione $\ln(x+3) + 2 < 0$

✎

C'è la condizione di esistenza $x + 3 > 0$, cioè $x > -3$. La disequazione equivale a

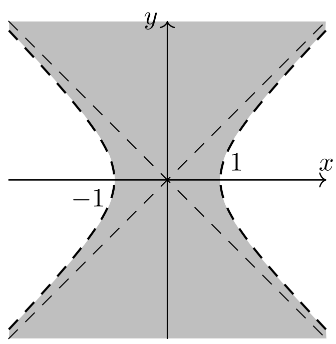
$$\ln(x+3) < -2 \quad ; \quad x + 3 < e^{-2} \quad ; \quad x < -3 + e^{-2}.$$

Pertanto le soluzioni sono $-3 < x < -3 + e^{-2}$.

Domanda 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 - 1 < 0$

✎

La disequazione equivale a $x^2 - y^2 < 1$. L'equazione corrispondente definisce un'iperbole di centro l'origine, con asintoti obliqui e rami che stanno a destra e a sinistra del centro. Possiamo trovare le pendenze degli asintoti con la formula $m = \pm\frac{b}{a}$ (nel nostro caso $a = b = 1$). Quindi $m = \pm 1$, cioè gli asintoti sono le bisettrici dei quadranti. Per trovare la regione individuata dalla disuguaglianza possiamo verificare l'appartenenza dell'origine: si ottiene $0 < 1$, che è vera. Pertanto l'insieme delle soluzioni è la regione che contiene il centro, raffigurata qui a fianco in grigio.



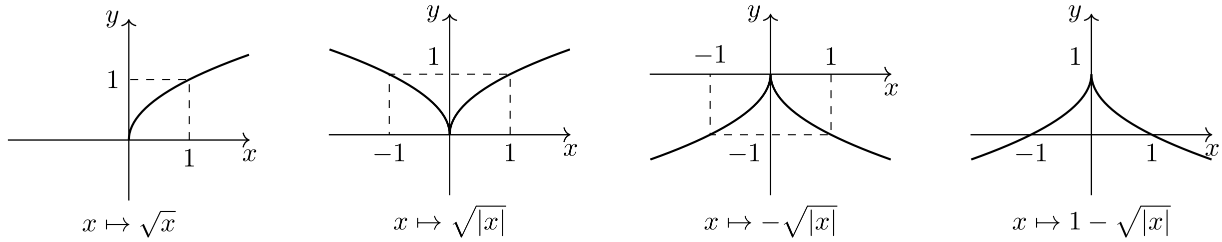
Domanda 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\sqrt{x} \quad \to \quad \sqrt{|x|} \quad \to \quad -\sqrt{|x|} \quad \to \quad 1 - \sqrt{|x|}.$$

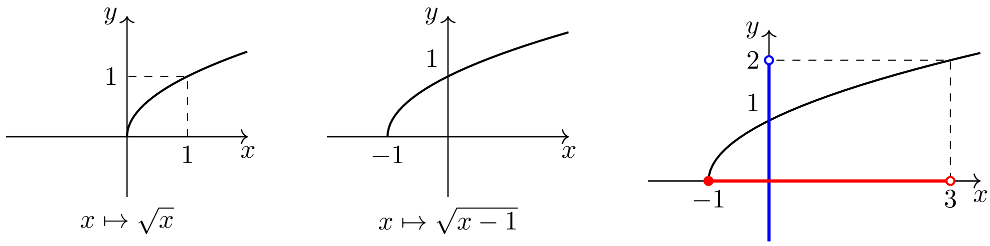
I grafici sono nella pagina seguente.



Domanda 7. Si trovi la controimmagine dell'intervallo $(-\infty, 2)$ attraverso la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$

✎

È molto utile un grafico, che si ottiene dal grafico di $\sqrt{x}$, con una traslazione a sinistra di 1.



Nella figura a destra è marcato in blu l'intervallo $(-\infty, 2)$, di cui si deve trovare la controimmagine. Dato che la controimmagine di 2 è 3 ($f(3) = 2$) si ha quindi $f^{-1}(-\infty, 2) = [-1, 3)$.

Domanda 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{x^2}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln 0^+ - 1}{0^+} = \frac{-\infty - 1}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Domanda 9. Si calcoli la derivata della funzione $\displaystyle f(x) = \frac{1}{\ln x} + x$

✎

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x \ln^2 x}.$$

Domanda 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = \frac{1}{3}x + e^{-x}$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = \frac{1}{3} - e^{-x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\frac{1}{3} - e^{-x} = 0 \quad ; \quad e^{-x} = \frac{1}{3} \quad ; \quad -x = \ln\frac{1}{3} \quad ; \quad x = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 04/11/2024

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x < 0 \\ -e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

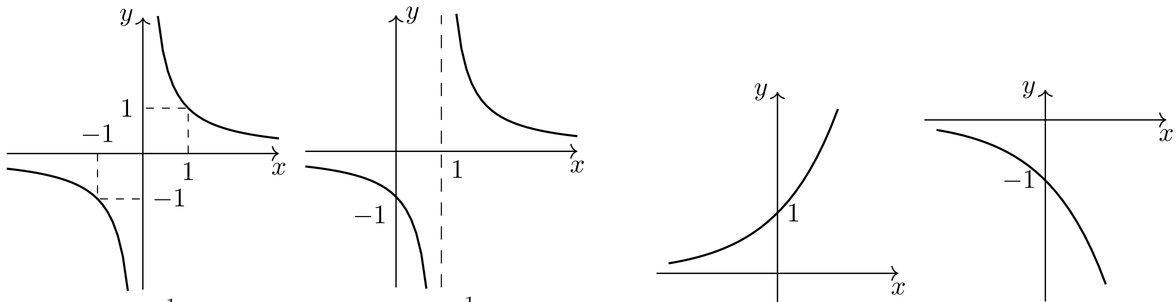
se ne disegni un grafico, usando le trasformazioni grafiche elementari. Sulla base del grafico, si dica qual è l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume.

Si dica se la funzione è continua in tutto l'insieme di definizione. Si dica poi se la funzione f è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

Si dica infine se alla funzione f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$ e se comunque è verificata la tesi.

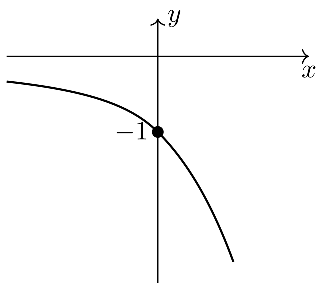
✎

Le trasformazioni grafiche delle funzioni $\frac{1}{x-1}$ e $-e^x$ sono:



$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ $\quad$ $x \mapsto e^x$ $\quad$ $x \mapsto -e^x$

Il grafico della funzione f è questo.



Dal grafico possiamo dire che l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, è l'intervallo $(-\infty, 0)$, dato che si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}(-e^x) = -\infty.$$

Sempre dal grafico possiamo ricavare che la funzione è continua anche in $x = 0$. Verifichiamolo con la definizione.

$$f(0) = -e^0 = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

Vediamo la derivabilità: il punto da studiare è $x = 0$, dove la funzione, essendo continua, potrebbe essere anche derivabile. Possiamo scrivere

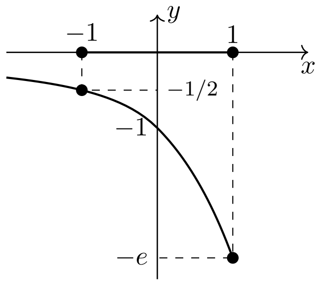
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \\ -e^x & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}(-e^x) = -1.$$

Quindi la funzione è derivabile in 0.

Passiamo ora all'ultima domanda.



Nell'intervallo $[-1, 1]$, che è chiuso e limitato, la funzione è continua: quindi è applicabile il teorema di Weierstrass. Pertanto la tesi è vera, cioè esistono un punto di massimo e un punto di minimo nell'intervallo considerato. Dal grafico possiamo certamente affermare che il punto di massimo è $x_M = -1$ (con valore massimo $f(-1) = -\frac{1}{2}$) e il punto di minimo è $x_m = 1$ (con valore minimo $f(1) = -e$).