

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA

Vicenza, 07/11/2025

Turni 1 e 2

Esercizio 1. Si dica se $x + 1$ è un divisore di $x^5 + x^3 + 2$ 

Il modo più semplice di rispondere è con il teorema di Ruffini: $x + 1$ è un divisore di $x^5 + x^3 + 2$ se e solo se quest'ultimo si annulla per $x = -1$. Si ha $(-1)^5 + (-1)^3 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ e quindi la risposta è affermativa.

Alternativamente si può fare la divisione, nella forma generale o (meglio) nella forma di Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Il resto è zero, quindi $x + 1$ divide il polinomio di 5° grado.

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $\frac{e^x}{x} + \frac{x}{e^x}$ raccogliendo xe^x e semplificare

$$\frac{e^x}{x} + \frac{x}{e^x} = xe^x \left(\frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{xe^x} + \frac{x}{e^x} \cdot \frac{1}{xe^x} \right) = xe^x \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{e^{2x}} \right).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $\ln(x + 1) + 2 = 0$ 

Con la condizione di esistenza $x > -1$ l'equazione equivale a

$$\ln(x + 1) = -2 \quad ; \quad x + 1 = e^{-2} \quad ; \quad x = -1 + e^{-2} \quad (\text{accettabile}).$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $x - \frac{3}{x} < 2$ 

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$ la disequazione equivale a

$$x - \frac{3}{x} - 2 < 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - 2x - 3}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{(x + 1)(x - 3)}{x} < 0$$

$$\begin{array}{c} N \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} + & - & - & + & \\ \hline - & -1 & - & + & 3 & + \end{array} \\ D \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline - & + & 0 & - & + \end{array} \\ N/D \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline - & -1 & 0 & 3 & \end{array} \end{array}$$

Pertanto le soluzioni sono $x < -1$ oppure $0 < x < 3$, cioè l'insieme $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x(y + 1) < 0$ 

La disequazione equivale a

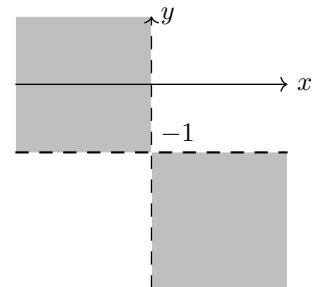
$$\begin{cases} x > 0 \\ y < -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > -1 \end{cases}.$$

L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.

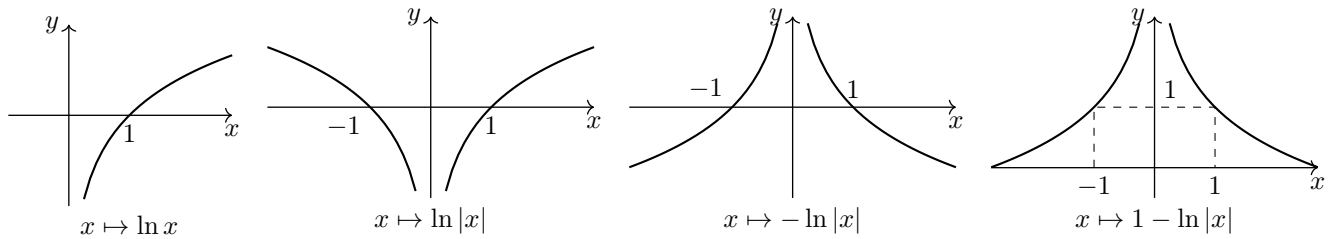
Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \ln|x|$ 

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\ln x \rightarrow \ln|x| \rightarrow -\ln|x| \rightarrow 1 - \ln|x|.$$



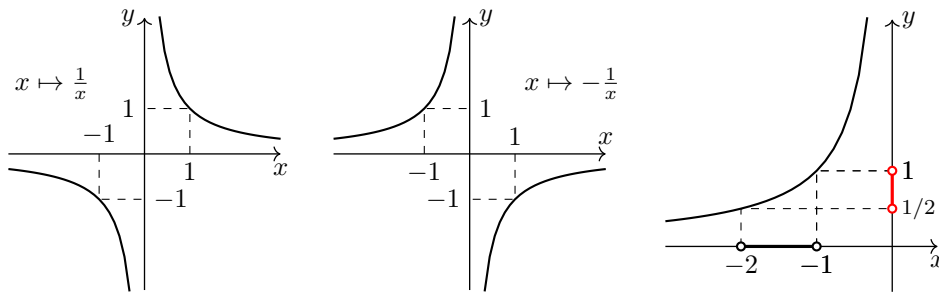
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(-2, -1)$ attraverso la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$



Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\frac{1}{x}$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(1-x)}$



$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(1-x)} = \frac{\ln 0^+}{\ln(1-0^+)} = \frac{-\infty}{\ln(1^-)} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Esercizio 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = x \ln x$



C'è la condizione di esistenza $x > 0$. La derivata della funzione è $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\ln x + 1 = 0 \quad ; \quad \ln x = -1 \quad ; \quad x = \frac{1}{e} \quad (\text{accettabile}).$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA
Vicenza, 07/11/2025
Turni 3 e 4

Esercizio 1. Si dica se il polinomio $x^5 - x^4 + 2$ ha tra i suoi divisori il polinomio $x + 1$



Il modo più semplice di rispondere è con il teorema di Ruffini: $x + 1$ è un divisore di $x^5 - x^4 + 2$ se e solo se quest'ultimo si annulla per $x = -1$. Si ha $(-1)^5 - (-1)^4 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ e quindi la risposta è affermativa.

Alternativamente si può fare la divisione, nella forma generale o (meglio) nella forma di Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Il resto è zero, quindi $x + 1$ divide il polinomio di 5° grado.

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ raccogliendo $\sqrt{x}$ e semplificare



$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(x^{1/3-1/2} + x^{1/4-1/2} \right) = \sqrt{x} \left(x^{-1/6} + x^{-1/4} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $2 - e^{x+1} = 0$



L'equazione equivale a

$$e^{x+1} = 2 \quad ; \quad x + 1 = \ln 2 \quad ; \quad x = \ln 2 - 1.$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $x + 1 < \frac{2}{x}$



Con la condizione di esistenza $x \neq 0$ la disequazione equivale a

$$x + 1 - \frac{2}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{x^2 + x - 2}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x} < 0$$

N	+	-	-	+
D	-	-2	-	+
			0	
N/D	-	+	-	+
	-2	0	1	

Pertanto le soluzioni sono $x < -2$ oppure $0 < x < 1$, cioè l'insieme $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $(x + 1)y < 0$



La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x > -1 \\ y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ y > 0. \end{cases}$$

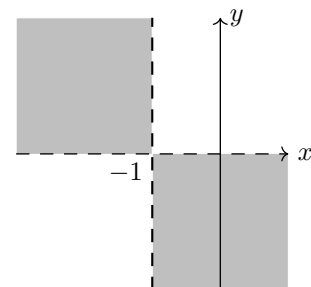
L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.

Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$

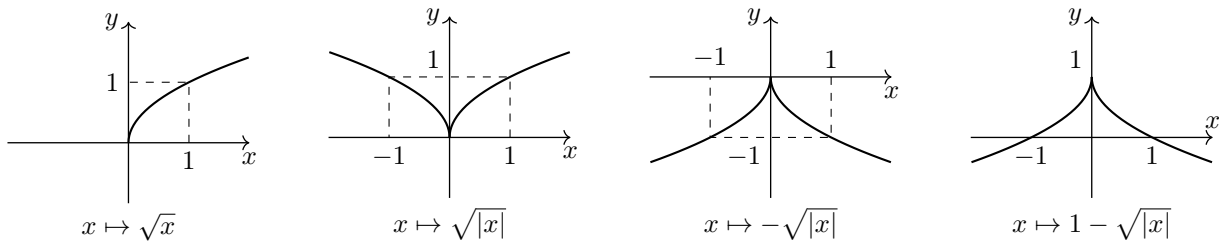


Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{|x|} \rightarrow -\sqrt{|x|} \rightarrow 1 - \sqrt{|x|}.$$



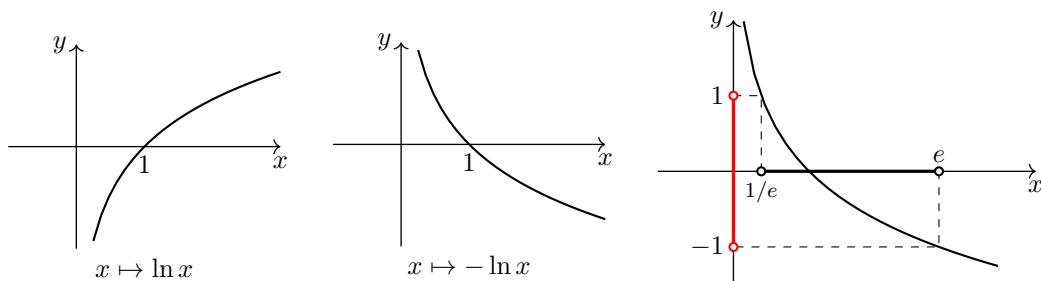
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{e}, e)$ attraverso la funzione $f(x) = -\ln x$



Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\ln x$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(-1, 1)$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x}$



$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{\ln(1^+ - 1)}{1 - 1^+} = \frac{\ln(0^+)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + x\right)$



$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right).$$

Esercizio 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = xe^x$



La derivata della funzione è $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$e^x(1+x) = 0 \quad ; \quad x = -1.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA
Vicenza, 07/11/2025
Turno 5

Esercizio 1. Si completi il quadrato nel polinomio $x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}.$$

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $xe^x + \sqrt{x} e^{2x}$ raccogliendo $\sqrt{x} e^x$

$$xe^x + \sqrt{x} e^{2x} = \sqrt{x} e^x \left(\frac{xe^x}{\sqrt{x}e^x} + \frac{\sqrt{x}e^{2x}}{\sqrt{x}e^x} \right) = \sqrt{x} e^x (\sqrt{x} + e^x).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $3 - 2\sqrt{x+1} = 0$

Con la condizione di esistenza $x \geq -1$ l'equazione equivale a

$$2\sqrt{x+1} = 3 \quad ; \quad \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \quad ; \quad x+1 = \frac{9}{4} \quad ; \quad x = \frac{5}{4} \quad (\text{accettabile}).$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $x + \frac{3}{x} < 4$

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$ la disequazione equivale a

$$x + \frac{3}{x} - 4 < 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{(x-1)(x-3)}{x} < 0$$

N	+	+	-	+
D	-	+	1	3
N/D	-	0	+	-
	0	1	3	

Pertanto le soluzioni sono $x < 0$ oppure $1 < x < 3$, cioè l'insieme $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 > 0$

La disequazione equivale a $(x-y)(x+y) > 0$, e cioè a

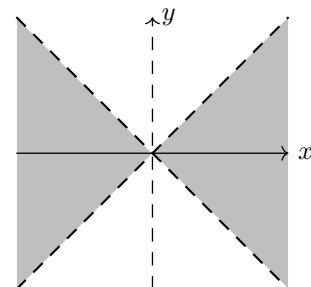
$$\begin{cases} x-y > 0 \\ x+y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y < 0 \\ x+y < 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases} \vee \begin{cases} y > x \\ y < -x \end{cases}.$$

L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.

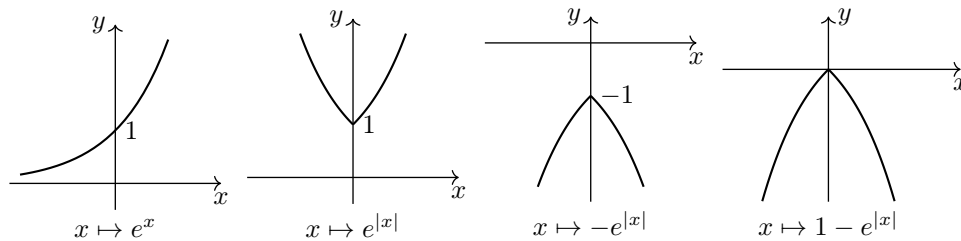
Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{|x|}$

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$e^x \rightarrow e^{|x|} \rightarrow -e^{|x|} \rightarrow 1 - e^{|x|}.$$



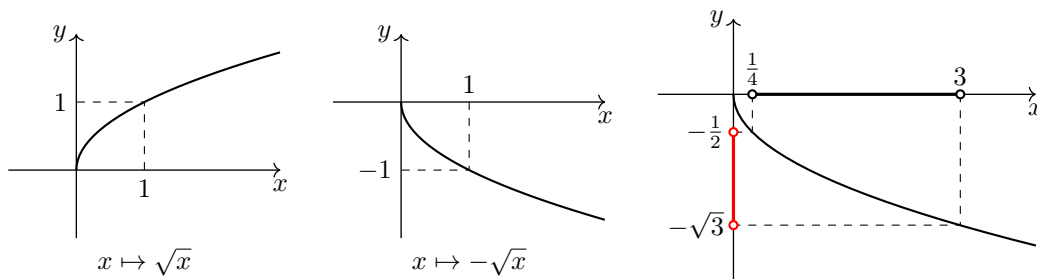
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{4}, 3)$ attraverso la funzione $f(x) = -\sqrt{x}$



Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\sqrt{x}$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln x - 1}$



$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln x - 1} = \frac{\ln(1-1^-)}{\ln 1^- - 1} = \frac{\ln 0^+}{0^- - 1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = xe^{1/x}$



$$f'(x) = e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Esercizio 10. Si dica se la funzione $f(x) = x + \ln x$ ha punti stazionari.



C'è la condizione di esistenza $x > 0$. La derivata della funzione è $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{x} = -1 \quad ; \quad x = -1 \quad (\text{che però non è accettabile}).$$

Pertanto non ci sono punti stazionari.

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA
Vicenza, 12/01/2026

Esercizio 1. Calcolare l'integrale $\int \frac{\ln x}{x} dx$



(integrale quasi immediato) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$

Esercizio 2. Calcolare l'integrale $\int_1^e x \ln x dx$



L'integrale indefinito si può calcolare per parti.

$$\int x \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Quindi

$$\int_1^e x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Esercizio 3. Dati $v^1 = (1, -1, -1)$ e $v^2 = (-1, 2, 1)$, calcolare il vettore $2v^1 - 3v^2$



$$2(1, -1, -1) - 3(-1, 2, 1) = (2, -2, -2) - (-3, 6, 3) = (5, -8, -5).$$

Esercizio 4. Calcolare il prodotto tra matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



(righe $\times$ colonne) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Esercizio 5. Calcolare il complemento algebrico di posto $(2, 1)$ nella matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$



$$CA_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -(1 - 2) = 1.$$

Esercizio 6. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

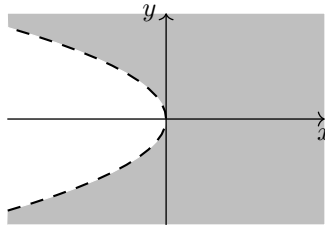


(rispetto alla 2^a riga) $\det = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(-1) + 1 \cdot 0 = 1.$

Esercizio 7. Disegnare il dominio della funzione $f(x, y) = \ln(x + y^2)$



La condizione di esistenza è $x + y^2 > 0$, cioè $x > -y^2$. Il dominio è in grigio qui sotto.



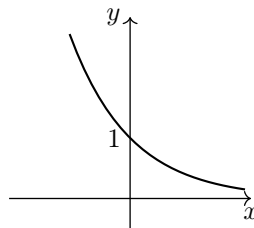
Esercizio 8. Disegnare la curva di livello 0 della funzione $f(x, y) = \ln(y e^x)$



Si tratta della curva del piano definita dall'equazione

$$f(x, y) = 0, \text{ cioè } \ln(y e^x) = 0, \text{ cioè } y e^x = 1, \text{ cioè } y = e^{-x}.$$

La curva, che si ottiene con un'immediata trasformazione grafica elementare, è rappresentata qui sotto.



Esercizio 9. Classificare in base al segno la forma quadratica $Q(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - xy + y^2$



La matrice simmetrica che rappresenta la forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è zero. I minori principali di ordine 1 ($a_{11} = 1/4$ e $a_{22} = 1$) sono entrambi positivi e quindi la forma è semidefinita positiva.

Esercizio 10. Calcolare la derivata parziale seconda f''_{xx} della funzione $f(x, y) = (y + \ln x)^2$



La derivata parziale prima rispetto ad x è

$$f'_x = 2(y + \ln x) \cdot \left(0 + \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}(y + \ln x).$$

La derivata parziale seconda rispetto ad x due volte è quindi

$$f''_{xx} = -\frac{2}{x^2}(y + \ln x) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}(y + \ln x) + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1 - y - \ln x).$$

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/01/2026
Variante 1

Esercizio 1. Si verifichi che $x^2 + 1$ è un divisore di $x^4 - 4x^2 - 5$ e si trovi il quoziente



Non si può usare il teorema di Ruffini data la forma del polinomio divisore. Si può procedere con la divisione ordinaria di polinomi oppure cercare di scomporre in fattori il polinomio di 4° grado, sperando di trovare tra i fattori il polinomio di 2° grado. Seguo quest'ultima strada, dato che la scomposizione non è complicata.

Con il cambio di variabile $x^2 = t$ si ha

$$x^4 - 4x^2 - 5 = t^2 - 4t - 5 = (t + 1)(t - 5) = (x^2 + 1)(x^2 - 5).$$

Come si vede tra i fattori c'è anche quello voluto.

Esercizio 2. Semplificare l'espressione $\frac{\ln(e^3)}{\ln(\sqrt[3]{e})}$



Basta ricordare che $\ln(e^x) = x$, qualunque sia x :

$$\frac{\ln(e^3)}{\ln(\sqrt[3]{e})} = \frac{3}{\ln(e^{1/3})} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9.$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $\frac{x}{e} + \frac{e}{x} = 2$



Con la condizione $x \neq 0$, l'equazione si può scrivere

$$\frac{x}{e} + \frac{e}{x} - 2 = 0 \quad ; \quad \frac{x^2 + e^2 - 2ex}{ex} = 0 \quad ; \quad \frac{(x - e)^2}{ex} = 0 \quad ; \quad x = e \text{ (unica soluzione).}$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $6x < 5 - \frac{1}{x}$



Con la condizione $x \neq 0$, la disequazione si può scrivere

$$6x - 5 + \frac{1}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{6x^2 - 5x + 1}{x} < 0.$$

La disequazione è verificata quindi nelle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 < 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

Dato che il polinomio a numeratore si annulla in $2/3$ e in 1 , i due sistemi diventano

$$\begin{cases} x < 2/3 \vee x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2/3 < x < 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

Con l'aiuto di uno schema grafico (ogni riga riporta le soluzioni della corrispondente disequazione) si ottiene



e quindi le soluzioni sono $S = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, 1)$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $\frac{x^2}{2} - y^2 + 1 < 0$

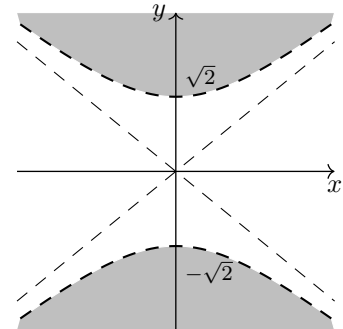


Un'equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

definisce un'iperbole con asintoti obliqui, centro in $(0, 0)$, con rami al di sopra e al di sotto del centro. Ricordo anche che le pendenze degli asintoti sono date dalla formula $m = \pm \frac{b}{a}$.

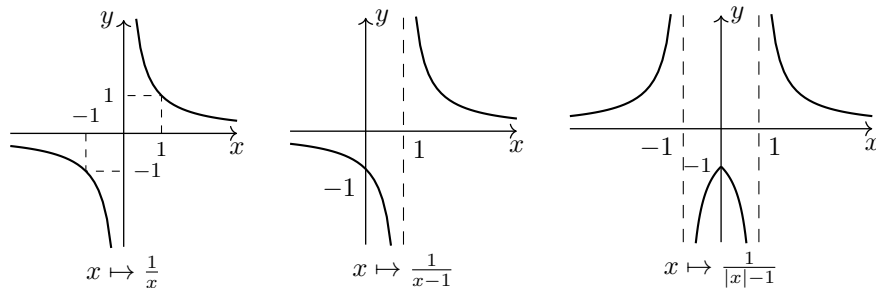
La nostra disequazione può essere riscritta come $\frac{x^2}{2} - y^2 < -1$ e pertanto la frontiera della regione è l'iperbole descritta in precedenza, con pendenze degli asintoti $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pendenze leggermente minori di quelle delle bisettrici). Dato che $0 < -1$ è falsa, la disequazione è verificata al di sopra e al di sotto dei rami dell'iperbole. La frontiera è esclusa.



Esercizio 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = \frac{1}{|x| - 1}$



Attenzione a individuare correttamente la sequenza delle trasformazioni.¹



Esercizio 7. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{e^x}{x^2 - 1}$



Un punto cruciale per non sbagliare è capire che $(-1)^+$ elevato al quadrato è un 1^- . Segnalo che questo esercizio è uno di quelli presenti nelle esercitazioni svolte a lezione. Si tratta precisamente dell'esercizio n. 21 dell'esercitazione sui limiti. Nello svolgimento dell'esercizio si trova la spiegazione.

Con l'algebra dei limiti
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{e^x}{x^2 - 1} = \frac{e^{-1}}{1^- - 1} = \frac{1/e}{0^-} = -\infty.$$

Attenzione anche a non cadere nel banale errore di pensare che e^{-1} sia negativo!

Esercizio 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \frac{x^2}{1 - e^x}$



$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1 - e^x) - x^2 \cdot (-e^x)}{(1 - e^x)^2}.$$

¹Faccio notare che la sequenza che può sembrare naturale, cioè

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{|x|} \rightarrow \frac{1}{|x| - 1}$$

porta a sbagliare, in quanto la seconda trasformazione non la sappiamo fare. Spiego il motivo: la seconda trasformazione consiste nel togliere 1, ma noi, data una $f(x)$, sappiamo ottenere $f(x) - 1$ oppure $f(x - 1)$, e nessuna di queste porta alla funzione voluta. Nel nostro caso $f(x) = \frac{1}{|x|}$ e si ha

$$f(x) - 1 = \frac{1}{|x|} - 1 \quad \text{e} \quad f(x - 1) = \frac{1}{|x - 1|}.$$

Esercizio 9. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 x e^x dx$



Risolviamo intanto l'integrale indefinito (l'insieme delle primitive di $x e^x$). Per parti.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = (x e^x - e^x)|_{-1}^1 = (e - e) - (-e^{-1} - e^{-1}) = \frac{2}{e}.$$

Esercizio 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = (x + \ln(xy))^2$



Le derivate parziali sono

$$f'_x = 2(x + \ln(xy)) \cdot \left(1 + \frac{1}{xy} \cdot y\right) = 2(x + \ln(xy)) \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e

$$f'_y = 2(x + \ln(xy)) \cdot \left(0 + \frac{1}{xy} \cdot x\right) = 2(x + \ln(xy)) \cdot \frac{1}{y}.$$

Quindi il gradiente è $\nabla(x, y) = (f'_x, f'_y)$.

ESAME DI MATEMATICA – I parte
Vicenza, 12/01/2026
Variante 2

Esercizio 1. Si verifichi che $x^2 - 1$ è un divisore di $x^4 + 3x^2 - 4$ e si trovi il quoziente



Non si può usare il teorema di Ruffini data la forma del polinomio divisore. Si può procedere con la divisione ordinaria di polinomi oppure cercare di scomporre in fattori il polinomio di 4° grado, sperando di trovare tra i fattori il polinomio di 2° grado. Seguo quest'ultima strada, dato che la scomposizione non è complicata.

Con il cambio di variabile $x^2 = t$ si ha

$$x^4 + 3x^2 - 4 = t^2 + 3t - 4 = (t - 1)(t + 4) = (x^2 - 1)(x^2 + 4).$$

Come si vede tra i fattori c'è anche quello voluto. Il quoziente è quindi $x^2 + 4$.

Esercizio 2. Semplificare l'espressione $\frac{\ln(\sqrt[4]{e})}{\ln(e^4)}$



Basta ricordare che $\ln(e^x) = x$, qualunque si a x :

$$\frac{\ln(\sqrt[4]{e})}{\ln(e^4)} = \frac{\ln(e^{1/4})}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}.$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $e^{2x} + e^x = 2$



Con il cambio di variabile $e^x = t$ l'equazione si può scrivere

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad ; \quad (t + 2)(t - 1) = 0 \quad ; \quad t = -2 \text{ oppure } t = 1$$

Pertanto, tornando alla variabile x , come possibili soluzioni abbiamo $e^x = -2$ oppure $e^x = 1$. La prima non ha soluzioni, dalla seconda si trova $x = 0$.

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $6x + 1 < \frac{1}{x}$



Con la condizione $x \neq 0$, la disequazione si può scrivere

$$6x + 1 - \frac{1}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{6x^2 + x - 1}{x} < 0.$$

La disequazione è verificata quindi nelle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} 6x^2 + x - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 6x^2 + x - 1 < 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

Dato che il polinomio a numeratore si annulla in $-1/2$ e in $1/3$, i due sistemi diventano

$$\begin{cases} x < -1/2 \vee x > 1/3 \\ x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1/2 < x < 1/3 \\ x < 0. \end{cases}$$

Con l'aiuto di uno schema grafico (ogni riga riporta le soluzioni della corrispondente disequazione) si ottiene



e quindi le soluzioni sono $S = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{3})$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 < 0$

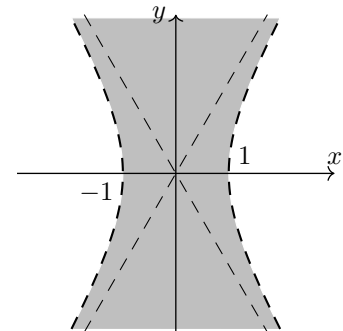


Un'equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

definisce un'iperbole con asintoti obliqui, centro in $(0, 0)$, con rami a sinistra e a destra del centro. Ricordo anche che le pendenze degli asintoti sono date dalla formula $m = \pm \frac{b}{a}$.

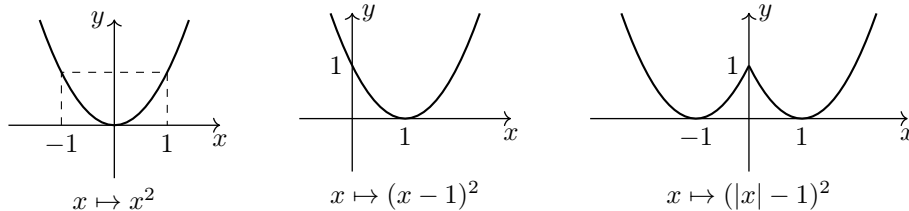
La nostra disequazione può essere riscritta come $x^2 - \frac{y^2}{3} < 1$ e pertanto la frontiera della regione è l'iperbole descritta in precedenza, con pendenze degli asintoti $m = \pm\sqrt{3}$ (pendenze leggermente maggiori di quelle delle bisettrici). Dato che $0 < 1$ è vera, la disequazione è verificata all'interno dei rami dell'iperbole, quella cioè che contiene il centro. La frontiera è esclusa.



Esercizio 6. Con le trasformazioni grafiche elementari disegnare il grafico di $f(x) = (|x| - 1)^2$



Attenzione a individuare correttamente la sequenza delle trasformazioni.²



Esercizio 7. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x^2}$



Un punto cruciale per non sbagliare è capire che $(-1)^-$ elevato al quadrato è un 1^+ .

Segnalo che in uno degli esercizi delle esercitazioni svolte a lezione è presentato proprio questo aspetto. Si tratta precisamente dell'esercizio n. 21 dell'esercitazione sui limiti. Nello svolgimento dell'esercizio si trova la spiegazione.

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x^2} = \frac{\ln(1-(-1))}{1-1^+} = \frac{\ln 2}{0^-} = -\infty.$$

Per arrivare al risultato è importante considerare che $\ln 2$ è una quantità positiva.

Esercizio 8. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$



$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - \ln x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

²Faccio notare che la sequenza

$$x^2 \rightarrow |x|^2 \rightarrow (|x| - 1)^2$$

porta a sbagliare, in quanto la seconda trasformazione non la sappiamo fare. Spiego il motivo: la seconda trasformazione consiste nel togliere 1, ma noi, data una $f(x)$, sappiamo ottenere $f(x) - 1$ oppure $f(x - 1)$, e nessuna di queste porta alla funzione voluta. Nel nostro caso $f(x) = |x|^2$ e si ha

$$f(x) - 1 = |x|^2 - 1 \quad \text{e} \quad f(x - 1) = |x - 1|^2.$$

Esercizio 9. Calcolare l'integrale $\int_{-1}^1 x e^x dx$



Risolviamo intanto l'integrale indefinito (l'insieme delle primitive di $x e^x$). Per parti.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = (x e^x - e^x) \Big|_{-1}^1 = (e - e) - (-e^{-1} - e^{-1}) = \frac{2}{e}.$$

Esercizio 10. Calcolare il gradiente della funzione $f(x, y) = (y + e^{xy})^2$



Le derivate parziali sono

$$f'_x = 2(y + e^{xy}) \cdot (0 + e^{xy} \cdot y) = 2y e^{xy} (y + e^{xy})$$

e

$$f'_y = 2(y + e^{xy}) \cdot (1 + e^{xy} \cdot x) = 2(y + e^{xy}) (1 + x e^{xy}).$$

Quindi il gradiente è $\nabla(x, y) = (f'_x, f'_y)$.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 12/01/2026
Variante 1

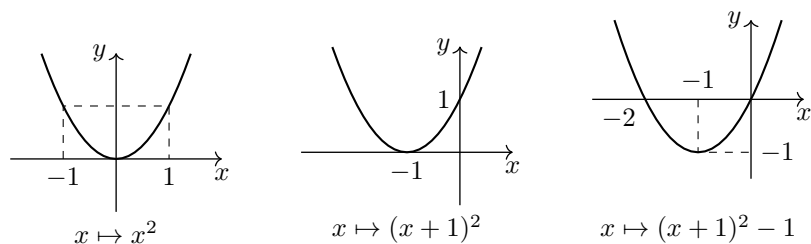
ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

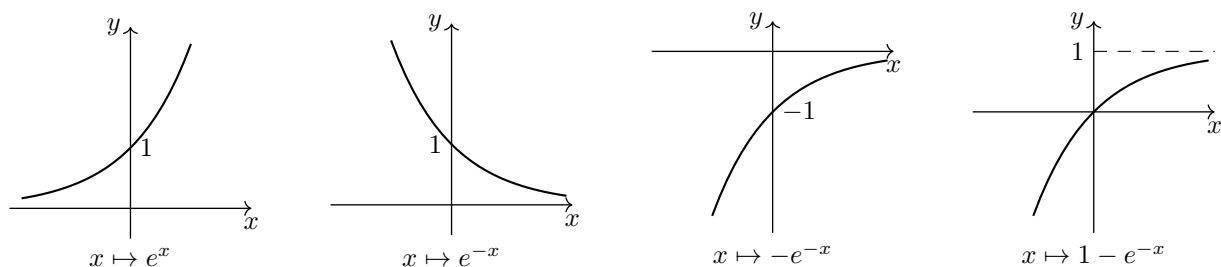
se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.



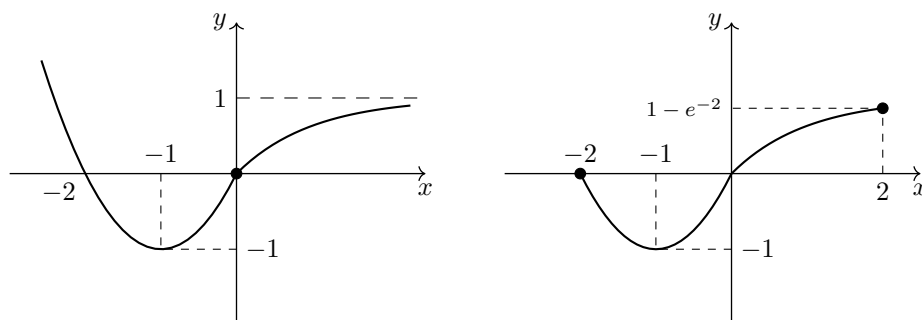
La trasformazione grafica elementare della funzione potenza è questa.



Le trasformazioni per la funzione esponenziale sono queste:



Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per il significato di quello a destra si aspetti più avanti).



Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0, e quindi in tutto $\mathbb{R}$. Verifichiamolo comunque, in $x = 0$, anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con il polinomio. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che in $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione potenza, mentre a destra essa è una funzione esponenziale.

Si ha

$$f(0) = (0+1)^2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-x}) = 1 - e^0 = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2(x+1)) = 2 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

Per rispondere alla domanda sugli estremi della funzione basta considerare il grafico. Per l'estremo inferiore si ha $\inf f = -1$, che è anche un valore minimo (assunto in $x = -1$); per l'estremo superiore si ha $\sup f = +\infty$ (o non esiste).

Il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-2, 2]$ in quanto tale intervallo è chiuso e limitato e la funzione è continua in esso.

Quindi la tesi è certamente vera. Essa dice che esistono in $[-2, 2]$ almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Dal grafico (vedi figura sopra a destra) si vede che c'è un punto massimo $x_{\max} = 2$ (con valore massimo $1 - e^{-2}$) e un punto di minimo $x_{\min} = -1$ (con valore minimo -1).

ESERCIZIO 2. Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 0, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0, -1) \quad , \quad v^3 = (1, 2, 1, -1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^4$) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$? Si consideri il terzo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$ e si dica se esso appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$.



Alla prima domanda si può rispondere in più modi diversi. Si può procedere usando la definizione: ricordo che in questo caso si deve scrivere una combinazione lineare dei vettori dati, porla uguale al vettore nullo e trovare se l'unico modo in cui questo avviene è ponendo uguali a zero tutti i coefficienti della combinazione oppure no. Volendo seguire questa strada il primo passo è quindi scrivere

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = 0 \quad \text{cioè} \quad \alpha_1(-1, 0, 1, 1) + \alpha_2(1, 1, 0, -1) + \alpha_3(1, 2, 1, -1) = (0, 0, 0, 0).$$

A questo punto si deve scrivere l'equazione qui sopra in forma di sistema di equazioni lineari e trovare la soluzione del sistema. Non fornisco ulteriori dettagli.

Procedo invece usando le proprietà che legano la dipendenza/indipendenza lineare dei vettori alla matrice da essi formata. La matrice (vettori in riga) è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ricordo che non possiamo parlare di determinante di A , cioè di tutta la matrice (possiamo solo parlare, come faremo tra poco, di determinanti di sottomatrici di A). Il risultato generale che ci serve è questo: i vettori sono l.i. se e solo se il rango di A è uguale al numero dei vettori, cioè 3 in questo caso.

Le colonne sono (certamente) dipendenti e questo non ci permette di concludere subito nulla. Osservando che la 4^a colonna è l'opposto della 1^a, il determinante della sottomatrice formata con le prime 3 colonne ci dà la risposta. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1^{\text{a}} \text{ riga}) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Quindi il rango non è 3 e i vettori sono linearmente dipendenti.

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^4$) generato dai 3 vettori è uguale al rango di A . Al momento sappiamo che non è 3. Per dire che è 2 dobbiamo indicare un minore del secondo ordine che sia diverso da zero: ad esempio quello in alto a sinistra (formato con 1^a e 2^a riga e 1^a e 2^a colonna). Quindi $\dim \mathcal{S} = 2$.

La domanda successiva: scegliendo in qualunque modo 2 dei 3 vettori si ottiene sempre una base di $\mathcal{S}$? Questo equivale a dire che scegliendo in tutti i modi 2 delle 3 righe di A queste 2 hanno sempre rango 2. È vero.

Basta osservare che tutti e tre i minori del secondo ordine che si ottengono con le prime due colonne sono tutti diversi da zero.

L'ultima domanda: dire se il terzo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$. Due modi per procedere. Cercare di scrivere $(0, 0, 1, 0)$ (il terzo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$) come c.l. di una possibile base di $\mathcal{S}$ (ne abbiamo trovate 3 poco fa). Significa scrivere, usando v^1 e v^2 ,

$$(0, 0, 1, 0) = \alpha_1(-1, 0, 1, 1) + \alpha_2(1, 1, 0, -1),$$

che equivale a

$$(0, 0, 1, 0) = (-\alpha_1, 0, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2, 0, -\alpha_2) \quad \text{cioè} \quad (0, 0, 1, 0) = (-\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e si vede subito che questo è impossibile.}$$

Un'altra strada è quella di servirsi delle matrici, affiancando a due vettori di una base di $\mathcal{S}$ il nuovo vettore $(0, 0, 1, 0)$. Con le prime due righe di A si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che la sottomatrice formata con le prime 3 colonne ha determinante diverso da zero e quindi il rango di A' è 3 e cioè le 3 righe sono indipendenti. Pertanto il nuovo vettore non appartiene al sottospazio generato dagli altri due.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + 2y^2,$$

si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$ e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.



Le derivate parziali sono

$$f'_x = 3x^2 - 2y \quad \text{e} \quad f'_y = -2x + 4y.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2y, -2x + 4y).$$

Annuliamo il gradiente per trovare i punti stazionari.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ 3x^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ 3x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x/2 \\ x(3x - 1) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi i due punti stazionari $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

Stabiliamo ora la natura dei punti stazionari con le condizioni del secondo ordine. Ci servono le derivate parziali seconde e la matrice Hessiana. Si ha

$$f''_{xx} = 6x \quad ; \quad f''_{xy} = -2 \quad ; \quad f''_{yx} = -2 \quad ; \quad f''_{yy} = 4.$$

La matrice Hessiana è quindi

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare la matrice Hessiana nei punti stazionari e studiare il segno della matrice (il segno della forma quadratica associata alla matrice). Nel punto $(0, 0)$ abbiamo

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Questa è indefinita (determinante negativo) e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella, cioè né di massimo né di minimo.

Nel punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ abbiamo

$$\nabla^2 f(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Questa è definita positiva, dato che i minori principali di Nord-Ovest sono entrambi positivi. Pertanto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ è un punto di minimo locale.

Passiamo all'ultima parte: la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$:

$$f\Big|_{y=x} = x^3 - 2x^2 + 2x^2 = x^3.$$

Il commento di questo risultato alla luce di quanto trovato in precedenza può essere questo: prima abbiamo trovato che l'origine è un punto di sella. L'origine sta sulla retta di equazione $y = x$. Lungo questa retta la funzione si comporta come x^3 e sappiamo che in $x = 0$ questo polinomio ha un punto stazionario che non è né di massimo né di minimo. Quindi tutto torna.

ESAME DI MATEMATICA – II parte
Vicenza, 12/01/2026
Variante 2

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \leq 0 \\ -\ln x & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica poi se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$. Infine si verifichi comunque se la tesi del teorema è vera.



ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica se le sue righe sono linearmente dipendenti o indipendenti. E le colonne? Considerando poi la trasformazione lineare $T(x) = Ax$, si scriva l'espressione di T e si determini la dimensione dell'immagine di T . Si consideri infine il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ e si trovino le sue soluzioni.



ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + x - y,$$

si calcoli il gradiente di f e si trovi il punto stazionario. Con le condizioni del secondo ordine si studi la natura del punto stazionario.



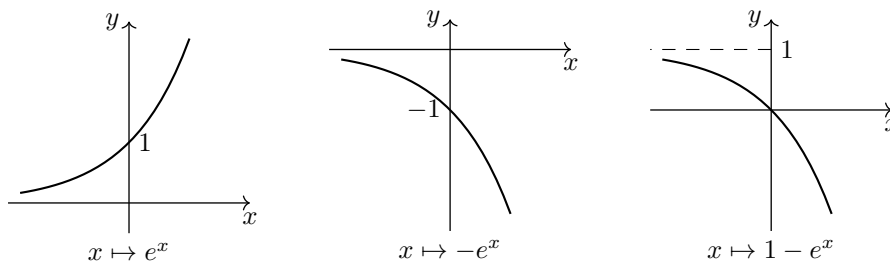
ESERCIZIO 4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x \leq 0 \\ (x-1)^2 - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f . Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.



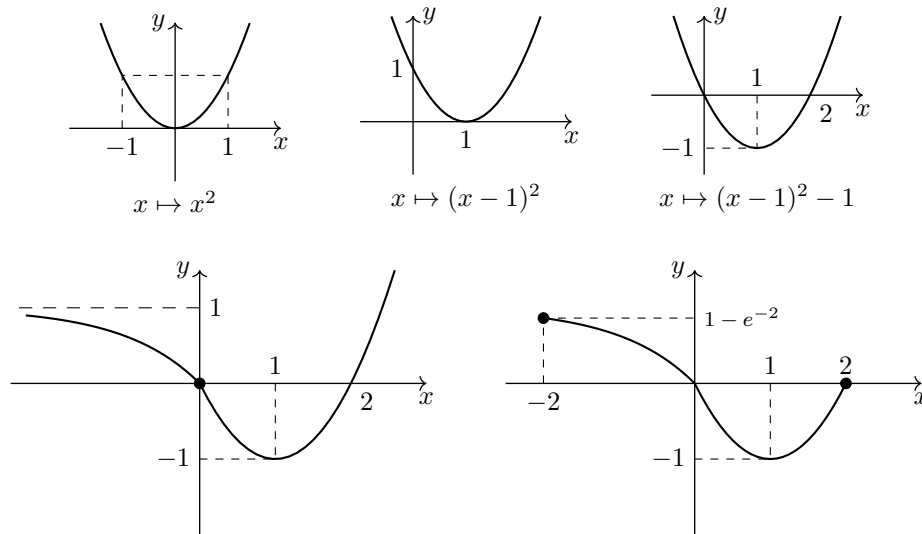
Le trasformazioni grafiche elementari della funzione esponenziale sono queste.



Le trasformazioni per la funzione potenza sono queste:

Il grafico della funzione f è qui sotto a sinistra (per il significato di quello a destra si aspetti più avanti).

Dalla costruzione grafica è evidente che la funzione è continua in 0, e quindi in tutto $\mathbb{R}$. Verifichiamolo comunque, in $x = 0$, anche in base alla definizione. Possiamo affermare che f è certamente continua in 0 da sinistra, dato che in $x = 0$ e in un intorno sinistro di 0 coincide con la funzione esponenziale. Quindi è sufficiente studiare la continuità da destra. Faccio notare che da destra non possiamo utilizzare lo stesso argomento di prima, dato che in $x = 0$ la funzione assume il suo valore attraverso la funzione esponenziale, mentre a destra essa è un polinomio.



Si ha

$$f(0) = 1 - e^0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)^2 - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Questo conferma che la funzione è continua in 0.

Passiamo alla derivabilità. Dato che la funzione è derivabile per $x \neq 0$, possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x & x < 0 \\ 2(x-1) & x > 0. \end{cases}$$

Pertanto avremo

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^x) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(x-1) = -2.$$

Quindi la funzione non è derivabile in 0.

Per rispondere alla domanda sugli estremi della funzione basta considerare il grafico. Per l'estremo inferiore si ha $\inf f = -1$, che è anche un valore minimo (assunto in $x = 1$); per l'estremo superiore si ha $\sup f = +\infty$ (o non esiste).

Il teorema di Weierstrass è applicabile nell'intervallo $[-2, 2]$ in quanto tale intervallo è chiuso e limitato e la funzione è continua in esso.

Quindi la tesi è certamente vera. Essa dice che esistono in $[-2, 2]$ almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo. Dal grafico (vedi figura sopra a destra) si vede che c'è un punto massimo $x_{\max} = -2$ (con valore massimo $1 - e^{-2}$) e un punto di minimo $x_{\min} = 1$ (con valore minimo 1).

ESERCIZIO 5. Dati i vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (0, 1, 2) \quad , \quad v^3 = (1, 0, 1) \quad , \quad v^4 = (1, -1, 1)$$

si determini se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^3$) da essi generato? È vero che scegliendo in qualunque modo 2 dei 4 vettori si ottiene una base di $\mathcal{S}$? Si consideri il secondo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ e si dica se esso appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$.



Alla prima domanda si può rispondere in più modi diversi. Si può procedere usando la definizione: ricordo che in questo caso si deve scrivere una combinazione lineare dei vettori dati, porla uguale al vettore nullo e trovare se l'unico modo in cui questo avviene è ponendo uguali a zero tutti i coefficienti della combinazione oppure no. Volendo seguire questa strada il primo passo è quindi scrivere

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 + \alpha_4 v^4 = 0 \quad \text{cioè} \quad \alpha_1(-1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 2) + \alpha_3(1, 0, 1) + \alpha_4(1, -1, 1) = (0, 0, 0).$$

A questo punto si deve scrivere l'equazione qui sopra in forma di sistema di equazioni lineari e trovare la soluzione del sistema. Non fornisco ulteriori dettagli.

Procedo invece usando le proprietà che legano la dipendenza/indipendenza lineare dei vettori alla matrice da essi formata. La matrice (vettori in colonna) è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ricordo che non possiamo parlare di determinante di A , cioè di tutta la matrice (possiamo solo parlare, come faremo tra poco, di determinanti di sottomatrici di A). Il risultato generale che ci serve è questo: i vettori sono l.i. se e solo se il rango di A è uguale al numero dei vettori, cioè 4 in questo caso.

La matrice A ha al più rango 3, e quindi possiamo dire subito che i 4 vettori sono linearmente dipendenti.³

La dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ (di $\mathbb{R}^3$) generato dai 3 vettori è uguale al rango di A . Al momento possiamo dire non abbiamo ancora alcuna indicazione (il rango potrebbe essere 3). Osservando che la 4^a colonna è l'opposto della 1^a, il determinante della sottomatrice formata con le prime 3 colonne ci dà la risposta. Si ha

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1^{\text{a}} \text{ riga}) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Il rango quindi non è 3. Per dire che è 2 dobbiamo indicare un minore del secondo ordine che sia diverso da zero: ad esempio quello in alto a sinistra (formato con 1^a e 2^a riga e 1^a e 2^a colonna). Quindi $\dim \mathcal{S} = 2$.

La domanda successiva: scegliendo in qualunque modo 2 dei 4 vettori si ottiene sempre una base di $\mathcal{S}$? Questo equivale a dire che scegliendo in tutti i modi 2 delle 4 colonne di A queste 2 hanno sempre rango 2. È vero. Basta osservare che tutti e sei i minori del secondo ordine che si ottengono con le prime due righe sono tutti diversi da zero.

L'ultima domanda: dire se il secondo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio $\mathcal{S}$. Due modi per procedere. Cercare di scrivere $(0, 1, 0)$ (il secondo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^3$) come c.l. di una possibile base di $\mathcal{S}$ (ne abbiamo trovate 6 poco fa). Significa scrivere, usando v^1 e v^2 ,

$$(0, 1, 0) = \alpha_1(-1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 2),$$

che equivale a

$$(0, 1, 0) = (-\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (0, \alpha_2, 2\alpha_2) \quad \text{cioè} \quad (0, 1, 0) = (-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} -\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e si vede subito che questo è impossibile.}$$

Un'altra strada è quella di servirsi delle matrici, affiancando a due vettori di una base di $\mathcal{S}$ il nuovo vettore $(0, 1, 0)$. Con le prime due colonne di A si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che la matrice A' ha determinante diverso da zero e quindi le 3 colonne sono indipendenti. Pertanto il nuovo vettore non appartiene al sottospazio generato dagli altri due.

ESERCIZIO 6. Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^3,$$

si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si scriva la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$ e si commenti il risultato alla luce di quanto trovato in precedenza.



³Qui ho fornito una spiegazione articolata del motivo della dipendenza: ricordo che si sarebbe potuto anche semplicemente dire che 4 vettori in $\mathbb{R}^3$, cioè in uno spazio di dimensione 3, sono certamente l.d. in quanto in $\mathbb{R}^3$ non possono esserci più di 3 vettori l.i.

Le derivate parziali sono

$$f'_x = 4x - 2y \quad \text{e} \quad f'_y = -2x + 3y^2.$$

Il gradiente è quindi il vettore

$$\nabla f(x, y) = (4x - 2y, -2x + 3y^2).$$

Annuliamo il gradiente per trovare i punti stazionari.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -2x + 12x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x - 6x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(1 - 6x) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi i due punti stazionari $(0, 0)$ e $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$.

Stabiliamo ora la natura dei punti stazionari con le condizioni del secondo ordine. Ci servono le derivate parziali seconde e la matrice Hessiana. Si ha

$$f''_{xx} = 4 \quad ; \quad f''_{xy} = -2 \quad ; \quad f''_{yx} = -2 \quad ; \quad f''_{yy} = 6y.$$

La matrice Hessiana è quindi

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare la matrice Hessiana nei punti stazionari e studiare il segno della matrice (il segno della forma quadratica associata alla matrice). Nel punto $(0, 0)$ abbiamo

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa è indefinita (determinante negativo) e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella, cioè né di massimo né di minimo.

Nel punto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ abbiamo

$$\nabla^2 f(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questa è definita positiva, dato che i minori principali di Nord-Ovest sono entrambi positivi. Pertanto $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ è un punto di minimo locale.

Passiamo all'ultima parte: la restrizione di f alla retta di equazione $y = x$:

$$f|_{y=x} = 2x^2 - 2x^2 + x^3 = x^3.$$

Il commento di questo risultato alla luce di quanto trovato in precedenza può essere questo: prima abbiamo trovato che l'origine è un punto di sella. L'origine sta sulla retta di equazione $y = x$. Lungo questa retta la funzione si comporta come x^3 e sappiamo che in $x = 0$ questo polinomio ha un punto stazionario che non è né di massimo né di minimo. Quindi tutto torna.