PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA
Vicenza, 07/11/2025
Turni 1 e 2

Esercizio 1. Si dica se $x+1$ è un divisore di x^5+x^3+2

✎

Il modo più semplice di rispondere è con il teorema di Ruffini: $x+1$ è un divisore di x^5+x^3+2 se e solo se quest'ultimo si annulla per $x=-1$. Si ha $(-1)^5+(-1)^3+2=-1-1+2=0$ e quindi la risposta è affermativa.

Alternativamente si può fare la divisione, nella forma generale o (meglio) nella forma di Ruffini.

	1	0	1	0	0	2
-1		-1	1	-2	2	-2
	1	-1	2	-2	2	0

Il resto è zero, quindi $x+1$ divide il polinomio di 5° grado.

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{x}{e^x}$ raccogliendo xe^x e semplificare

✎

$$\frac{e^x}{x}+\frac{x}{e^x}=xe^x\left(\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1}{xe^x}+\frac{x}{e^x}\cdot\frac{1}{xe^x}\right)=xe^x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{e^{2x}}\right).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $\ln(x+1)+2=0$

✎

Con la condizione di esistenza $x>-1$ l'equazione equivale a

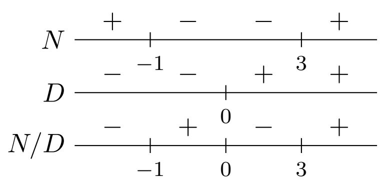
$$\ln(x+1)=-2 \quad ; \quad x+1=e^{-2} \quad ; \quad x=-1+e^{-2} \quad \text{(accettabile)}.$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $x-\dfrac{3}{x}<2$

✎

Con la condizione di esistenza $x\neq 0$ la disequazione equivale a

$$x-\frac{3}{x}-2<0 \quad ; \quad \frac{x^2-2x-3}{x}<0 \quad ; \quad \frac{(x+1)(x-3)}{x}<0$$



Pertanto le soluzioni sono $x<-1$ oppure $0<x<3$, cioè l'insieme $(-\infty,-1)\cup(0,3)$.

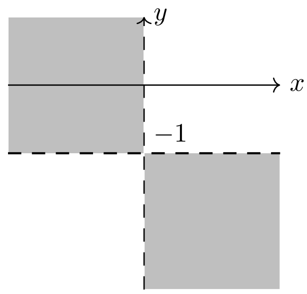
Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x(y+1)<0$

✎

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x>0 \\ y<-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<0 \\ y>-1. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.



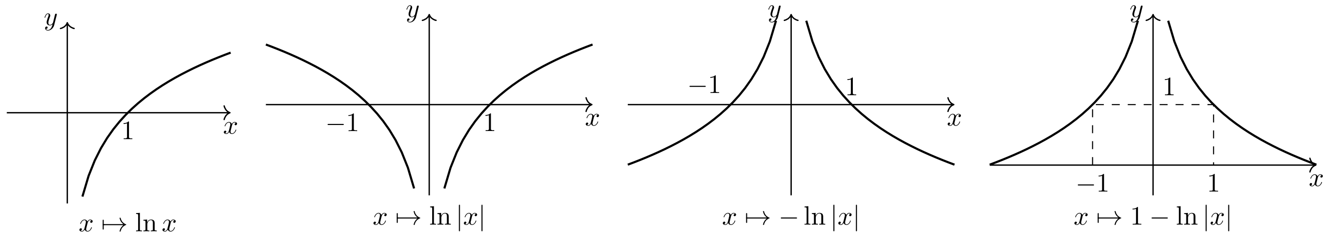
Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x)=1-\ln|x|$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\ln x \quad\to\quad \ln|x| \quad\to\quad -\ln|x| \quad\to\quad 1-\ln|x|.$$

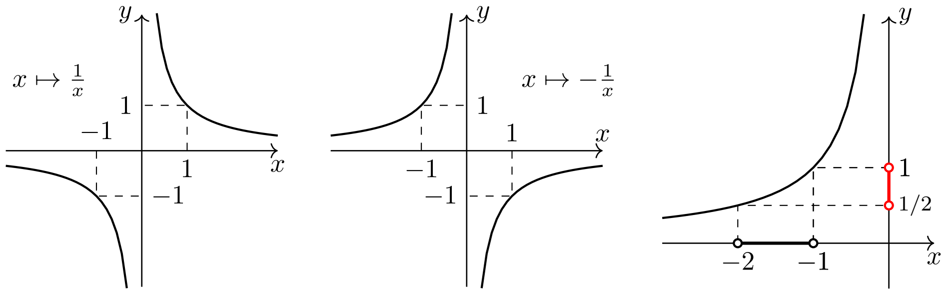
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(-2, -1)$ attraverso la funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

✎

Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\frac{1}{x}$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(1-x)}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(1-x)} = \frac{\ln 0^+}{\ln(1-0^+)} = \frac{-\infty}{\ln(1^-)} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Esercizio 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = x \ln x$

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. La derivata della funzione è $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$\ln x + 1 = 0 \quad ; \quad \ln x = -1 \quad ; \quad x = \frac{1}{e} \quad \text{(accettabile)}.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA
Vicenza, 07/11/2025
Turni 3 e 4

Esercizio 1. Si dica se il polinomio $x^5 - x^4 + 2$ ha tra i suoi divisori il polinomio $x + 1$

✎

Il modo più semplice di rispondere è con il teorema di Ruffini: $x+1$ è un divisore di x^5-x^4+2 se e solo se quest'ultimo si annulla per $x = -1$. Si ha $(-1)^5 - (-1)^4 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ e quindi la risposta è affermativa.

Alternativamente si può fare la divisione, nella forma generale o (meglio) nella forma di Ruffini.

	1	−1	0	0	0	2
−1		−1	2	−2	2	−2
	1	−2	2	−2	2	0

Il resto è zero, quindi $x + 1$ divide il polinomio di 5° grado.

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ raccogliendo $\sqrt{x}$ e semplificare

✎

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\left(x^{1/3-1/2} + x^{1/4-1/2}\right) = \sqrt{x}\left(x^{-1/6} + x^{-1/4}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $\quad 2 - e^{x+1} = 0$

✎

L'equazione equivale a

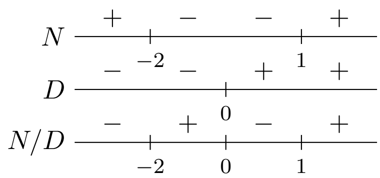
$$e^{x+1} = 2 \quad ; \quad x + 1 = \ln 2 \quad ; \quad x = \ln 2 - 1.$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $\quad x + 1 < \dfrac{2}{x}$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$ la disequazione equivale a

$$x + 1 - \frac{2}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{x^2 + x - 2}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x} < 0$$



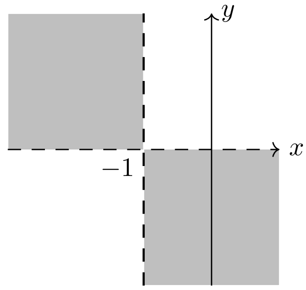
Pertanto le soluzioni sono $x < -2$ oppure $0 < x < 1$, cioè l'insieme $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $(x + 1)y < 0$

✎

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x > -1 \\ y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ y > 0. \end{cases}$$



L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.

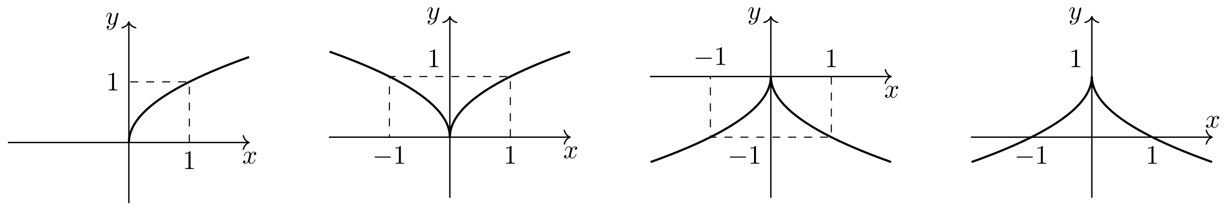
Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$\sqrt{x} \quad \to \quad \sqrt{|x|} \quad \to \quad -\sqrt{|x|} \quad \to \quad 1 - \sqrt{|x|}.$$

Le trasformazioni sono riportate qui sotto.

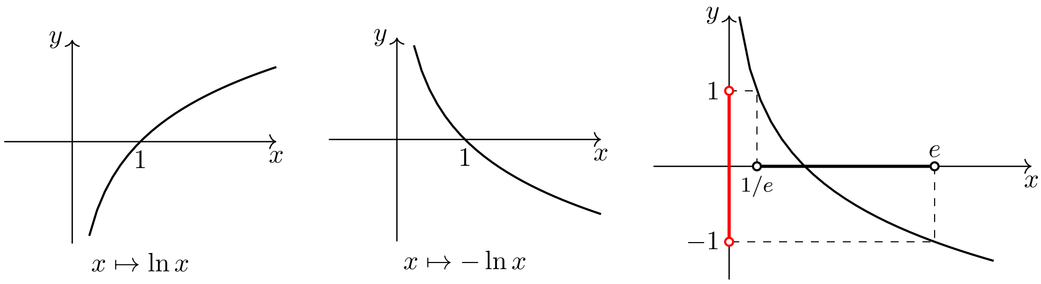


$x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ $\quad$ $x \mapsto 1-\sqrt{|x|}$

Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{e}, e)$ attraverso la funzione $f(x) = -\ln x$

✎

Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\ln x$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(-1, 1)$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{\ln(1^+-1)}{1-1^+} = \frac{\ln(0^+)}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $\displaystyle f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + x\right)$

✎

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + x}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right).$$

Esercizio 10. Si trovino i punti stazionari della funzione $f(x) = xe^x$

✎

La derivata della funzione è $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$e^x(1+x) = 0 \quad ; \quad x = -1.$$

PROVA INTERMEDIA DI MATEMATICA
Vicenza, 07/11/2025
Turno 5

Esercizio 1. Si completi il quadrato nel polinomio $x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

✎

$$x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}.$$

Esercizio 2. Riscrivere l'espressione $xe^x + \sqrt{x}\, e^{2x}$ raccogliendo $\sqrt{x}\, e^x$

✎

$$xe^x + \sqrt{x}\, e^{2x} = \sqrt{x}e^x \left(\frac{xe^x}{\sqrt{x}e^x} + \frac{\sqrt{x}e^{2x}}{\sqrt{x}e^x}\right) = \sqrt{x}e^x \left(\sqrt{x} + e^x\right).$$

Esercizio 3. Risolvere l'equazione $3 - 2\sqrt{x+1} = 0$

✎

Con la condizione di esistenza $x \geq -1$ l'equazione equivale a

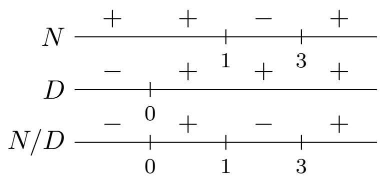
$$2\sqrt{x+1} = 3 \quad ; \quad \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \quad ; \quad x + 1 = \frac{9}{4} \quad ; \quad x = \frac{5}{4} \quad \text{(accettabile)}.$$

Esercizio 4. Risolvere la disequazione $x + \frac{3}{x} < 4$

✎

Con la condizione di esistenza $x \neq 0$ la disequazione equivale a

$$x + \frac{3}{x} - 4 < 0 \quad ; \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x} < 0 \quad ; \quad \frac{(x-1)(x-3)}{x} < 0$$



Pertanto le soluzioni sono $x < 0$ oppure $1 < x < 3$, cioè l'insieme $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$.

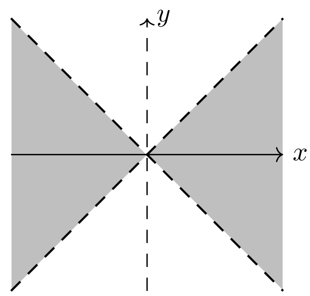
Esercizio 5. Disegnare nel piano l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - y^2 > 0$

✎

La disequazione equivale a $(x - y)(x + y) > 0$, e cioè a

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y < x \\ y > -x \end{cases} \vee \begin{cases} y > x \\ y > -x. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è la regione raffigurata qui a fianco in grigio.



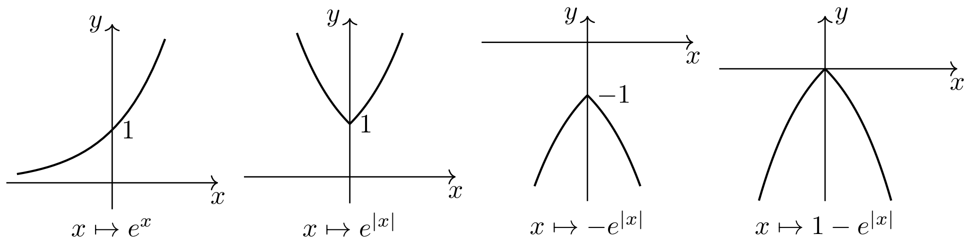
Esercizio 6. Operando con le trasformazioni elementari, si disegni il grafico della funzione $f(x) = 1 - e^{|x|}$

✎

Una sequenza corretta di trasformazioni è la seguente:

$$e^x \quad \to \quad e^{|x|} \quad \to \quad -e^{|x|} \quad \to \quad 1 - e^{|x|}.$$

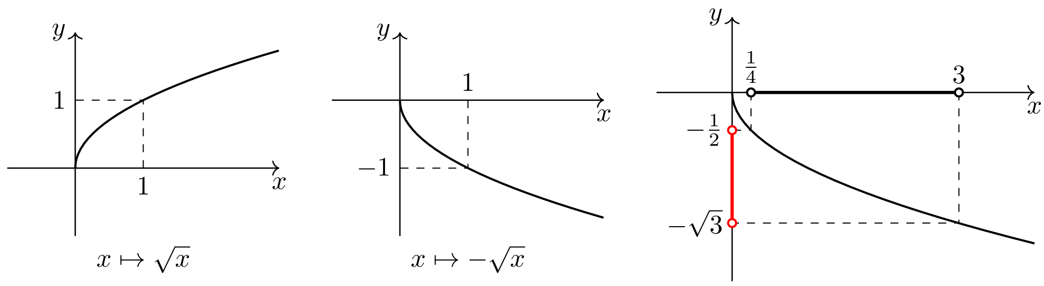
Le trasformazioni sono riportate qui sotto.



Esercizio 7. Si trovi l'immagine dell'intervallo $(\frac{1}{4}, 3)$ attraverso la funzione $f(x) = -\sqrt{x}$

✎

Anche se non esplicitamente richiesto è molto utile un grafico. Il grafico di f si ottiene dal grafico di $\sqrt{x}$ con un rovesciamento rispetto all'asse orizzontale.



Come costruito nella figura qui sopra, l'immagine risulta essere l'intervallo $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 8. Si calcoli il $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln x - 1}$

✎

$$\text{Con l'algebra dei limiti} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln x - 1} = \frac{\ln(1-1^-)}{\ln 1^- - 1} = \frac{\ln 0^+}{0^- - 1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

Esercizio 9. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = xe^{1/x}$

✎

$$f'(x) = e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Esercizio 10. Si dica se la funzione $f(x) = x + \ln x$ ha punti stazionari.

✎

C'è la condizione di esistenza $x > 0$. La derivata della funzione è $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. I punti stazionari si cercano annullando la derivata e quindi risolvendo l'equazione

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{x} = -1 \quad ; \quad x = -1 \quad \text{(che però non è accettabile).}$$

Pertanto non ci sono punti stazionari.