

ESAME DI MATEMATICA – FACSIMILE

Tema 4

II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti.

In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni domanda teorica vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 6). Si provi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ 1 + \ln(1-x) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile nel punto $x = 0$ e si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$. Utilizzando le trasformazioni dei grafici elementari si disegni il grafico di f e si determini la sua immagine. Infine si calcoli la controimmagine dell'intervallo $[0, 2]$.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 4). Si calcoli

$$\int_0^2 \sqrt{1 + |x - 1|} dx.$$

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}.$$

QUESITO 1. Si dica se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = 1 - x^2$ è suriettiva.

QUESITO 2. Si dica che cosa significa che il punto x_0 è interno all'insieme A , dove A è un sottoinsieme di \mathbb{R} .

QUESITO 3. Quali proprietà di una funzione f garantiscono l'integrabilità di f in un intervallo $[a, b]$?

QUESITO 4. Si enunci un criterio di confronto per le serie.

QUESITO 5. Che cosa significa che i vettori v^1, v^2, \dots, v^k generano il sottospazio S di \mathbb{R}^n ?