

# ESAME DI MATEMATICA – FACSIMILE

## Tema 6

### II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti.

In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni domanda teorica vale 1 punto.

---

ESERCIZIO 1 (PUNTI 4). Si provi che la funzione  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  è monotona e che non ha né punti stazionari, né massimo, né minimo.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 7). Si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{dove} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{e^{-1/x}}{x^2} & x > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3 (PUNTI 4). Data la trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

si trovino il rango di  $T$ , la nullità di  $T$  e infine una base dell'immagine di  $T$ .

---

QUESITO 1. Che cosa possiamo dire del termine generale  $a_n$  di una serie  $\sum a_n$ , se sappiamo che la serie converge?

QUESITO 2. Che cosa possiamo dire di una combinazione lineare di tre vettori linearmente indipendenti, se la combinazione risulta uguale al vettore nullo?

QUESITO 3. Si commentino le seguenti due affermazioni:

- Tre vettori di  $\mathbb{R}^2$  possono generare  $\mathbb{R}^2$ , anche se sono linearmente dipendenti.
- Due vettori di  $\mathbb{R}^3$  possono generare  $\mathbb{R}^3$ , ma solo se sono linearmente indipendenti.

QUESITO 4. Si definisca che cosa si intende con minore di una matrice  $A$  di  $m$  righe ed  $n$  colonne.

QUESITO 5. Che cosa si intende con rango di una trasformazione lineare  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ?