

ESAME DI MATEMATICA – FACSIMILE

Tema 7

II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti.

In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni domanda teorica vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = (x^2 - x)e^{-x},$$

si calcolino i limiti significativi e si determinino i punti di massimo e di minimo, precisando se si tratta di punti di massimo e minimo globale. Si determini infine l'immagine della funzione f .

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si calcoli, con la definizione, l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

Si dica poi, senza calcolarlo, se l'integrale $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x} dx$ converge o diverge.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Si consideri la trasformazione lineare

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{definita da} \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice di rappresentazione di T e si dica se le sue colonne sono una base dell'immagine di T . In caso contrario si indichi una base di $\text{Im}T$. Si determini poi una base del nucleo di T e si dica se il vettore $(-2, 2, 0)$ appartiene al nucleo.

QUESITO 1. Si fornisca la definizione di derivata di una funzione f nel punto x_0 .

QUESITO 2. Si dia la definizione di funzione integrale di una funzione f definita nell'intervallo $[0, 1]$, specificando in quali ipotesi tale funzione integrale esiste.

QUESITO 3. Si dica in quali casi una serie geometrica di ragione r converge e si indichi in tali casi la somma della serie.

QUESITO 4. Che cosa si intende con rango di una trasformazione lineare T ?

QUESITO 5. Si enunci il teorema di Cramer sui sistemi di equazioni lineari.