

ESAME DI MATEMATICA – FACSIMILE

Tema 8

II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti.

In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico.

Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni domanda teorica vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$, si dica in quale insieme essa è definita e se si tratta di un insieme aperto o chiuso. Successivamente si determini una primitiva di f e, utilizzando questa, si dica se l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad \text{converge o diverge.}$$

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Sono dati

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se le colonne di A sono linearmente dipendenti o indipendenti, indicando la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^3 da esse generato. Si risolva poi, se possibile, il sistema $Ax = b$, indicando la dimensione dello spazio delle sue soluzioni.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{1 - x^2}{1 - xy} \right),$$

si disegni nel piano cartesiano l'insieme in cui f è definita, precisando se è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso. Si dica se la funzione f presenta qualche tipo di simmetria. Si costruisca poi la restrizione di f all'asse y e si determini la curva di livello 0. Infine si calcolino le derivate parziali di f .

QUESITO 1. Si enunci il teorema di Lagrange e si indichi un esempio di funzione al quale il teorema non è applicabile.

QUESITO 2. Si dica che cosa significa che un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n è un sottospazio di \mathbb{R}^n e si fornisca un esempio di sottospazio di \mathbb{R}^2 .

QUESITO 3. Si dica che cosa è il nucleo di una trasformazione lineare f e si dica se esso può essere l'insieme vuoto.

QUESITO 4. Si dia la definizione di derivata parziale rispetto ad x , nel punto (x_0, y_0) , di una funzione $f(x, y)$.

QUESITO 5. Si dica quando una forma quadratica $q(x, y)$ si dice semidefinita positiva e se ne fornisca un esempio.