FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 1 – Soluzioni I parte

DOMANDA 1.
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)-x+\frac{4}{3}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}-x+\frac{4}{3}=-\frac{1}{4}x+1$$

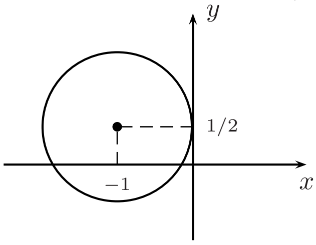
DOMANDA 2.
$$x^4+x^3-2x^2=x^2(x^2+x-2)=x^2(x-1)(x+2)$$

DOMANDA 3.
$$\log_2^2 x=\frac{1}{4}\quad,\quad \log_2 x=\pm\frac{1}{2}\quad,\quad x=\sqrt{2}\text{ oppure }x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

DOMANDA 4.
$$x+\frac{1}{x}-2>0\quad,\quad \frac{x^2+1-2x}{x}>0\quad,\quad \frac{(x-1)^2}{x}>0\quad,\quad \text{quindi}\quad S=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

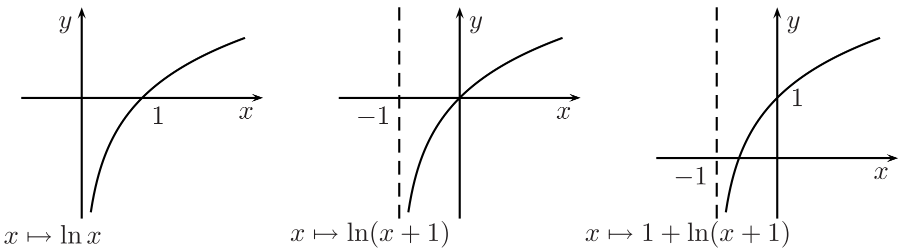
DOMANDA 5. L'equazione si può riscrivere come
$$x^2+2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0\quad\text{e cioè}\quad (x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Si tratta quindi di una circonferenza di centro il punto $(-1,\frac{1}{2})$ e raggio 1.



DOMANDA 6. Da un grafico immediato di $f(x)=2^{-x}$, considerando che $f(0)=1$ e $f(1)=\frac{1}{2}$, si ha che $f(0,1)=(\frac{1}{2},1)$

DOMANDA 7.



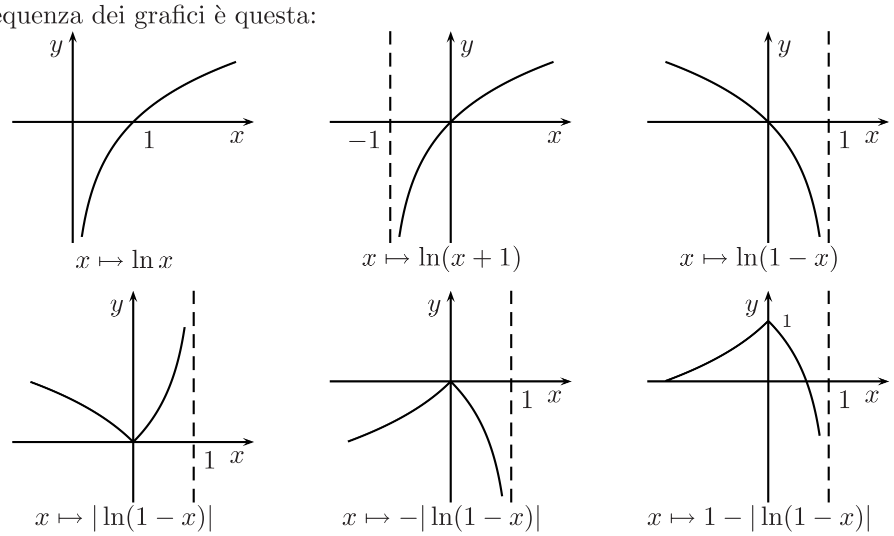
DOMANDA 8.
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}-e^x\right)=\frac{1}{-\infty}-e^0=-1$$

DOMANDA 9. La derivata di $f(x)=x+\sqrt{\ln x}$ è
$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\quad\text{e quindi}\quad f'(e)=1+\frac{1}{2e}$$

DOMANDA 10. L'integrale è del tipo $\int f^{\alpha}(x)Df(x)\,\mathrm{d}x$ con $f(x)=3x+2$ e $\alpha=\frac{1}{3}$. Occorre aggiustare la costante della derivata di f, che è 3. Quindi si ha
$$\int\sqrt[3]{3x+2}\,\mathrm{d}x=\int(3x+2)^{1/3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int 3(3x+2)^{1/3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,\frac{(3x+2)^{4/3}}{\frac{4}{3}}+c=\frac{1}{4}(3x+2)^{4/3}+c.$$

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 1 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. La sequenza dei grafici è questa:



Osservazione importante. Questo esercizio può dare spazio a qualche dubbio e perplessità. Infatti nella sua risoluzione c'è un aspetto "delicato" e per nulla evidente sul quale mi sento di dover fare un commento piuttosto esteso.
Come si vede nella risoluzione proposta la sequenza delle funzioni che considero è:

$$\ln x \quad \to \quad \ln(x+1) \quad \to \quad \ln(1-x) \quad \to \quad |\ln(1-x)| \quad \to \quad -|\ln(1-x)| \quad \to \quad 1-|\ln(1-x)|.$$

La sequenza è praticamente ovvia ad eccezione del passaggio necessario per procurarsi il grafico di $\ln(1-x)$. Si potrebbe infatti pensare di poterlo ottenere (in modo equivalente e forse più naturale) dal grafico di $\ln(x-1)$ cambiando il segno dell'argomento del logaritmo. Attenzione che questo non è vero, almeno se vogliamo muoverci nell'ambito delle trasformazioni che ho considerato nelle dispense e che ho presentato a lezione. Infatti il passaggio

$$\ln(x-1) \quad \to \quad \ln(1-x)$$

non lo possiamo ottenere con le trasformazioni viste, in quanto sappiamo ottenere $f(-x)$ da $f(x)$, cioè sappiamo cambiare il segno di x, non dell'argomento di f. In altre parole non sappiamo ottenere $f(-g(x))$ da $f(g(x))$, che è quello che invece vorremmo fare con il logaritmo. A verifica di questo faccio notare che, se disegniamo il grafico di $\ln(x-1)$ "muovendo a destra" quello di $\ln x$ e poi facciamo il simmetrico rispetto all'asse y otteniamo un grafico che sta nelle $x<-2$. Invece il grafico di $\ln(1-x)$ sta nelle $x<1$. Quella proposta è l'unica strada possibile se vogliamo usare soltanto le trasformazioni studiate.

Esercizio 2. Le condizioni di esistenza della funzione f sono date dal seguente sistema:

$$\begin{cases} x>0 \\ 1+\ln x \ge 0 \\ \ln^2 x \ne 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x>0 \\ \ln x \ge -1 \\ \ln x \ne 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x>0 \\ x \ge \frac{1}{e} \\ x \ne 1. \end{cases}$$

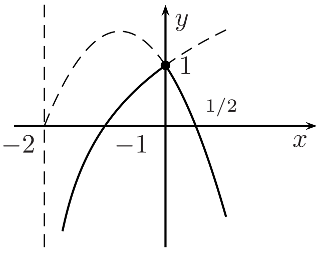
Pertanto l'insieme in cui f è definita è $[\frac{1}{e},1)\cup(1,+\infty)$, ossia l'intervallo $[\frac{1}{e},+\infty)$ ad esclusione del punto 1.
Per il calcolo del limite, con un cambio di variabile, ponendo $\ln x = t$, si ottiene

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\ln^2 x} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t^2} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(1+t)^{1/2}-1}{t} \cdot \frac{1}{t}.$$

Il primo è un limite notevole e tende a $\frac{1}{2}$, il secondo tende a $-\infty$. Quindi il risultato è $-\infty$.

Esercizio 3. Disegniamo intanto un grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) & x \in (-2,0] \\ -(x+2)(x-\frac{1}{2}) & x \in (0,+\infty). \end{cases}$$



Per ottenere il grafico abbiamo considerato che $f(0) = \log_2 2 = 1$ e che la parabola $x \mapsto -(x+2)(x-\frac{1}{2})$ in $x = 0$ vale 1. Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutto il suo dominio. Confermiamo questo analiticamente. Nell'intervallo $(-2, 0)$ f è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \log_2(x + 2)$. Nell'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è continua in quanto coincide con un polinomio. Possiamo anche dire che f è continua in 0 da sinistra in quanto coincide con la funzione logaritmica in $(-2, 0]$. Verifichiamo attraverso la definizione la continuità da destra: si ha

$$f(0) = \log_2 2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(-(x+2)(x-\tfrac{1}{2})\big) = 1.$$

Quindi f è continua anche in 0 e dunque lo è in tutto il suo dominio.
Passiamo alla derivabilità. Il grafico porta a pensare che la funzione non sia derivabile in 0. Vediamolo analiticamente. La funzione è certamente derivabile in $(-2, 0)$ e in $(0, +\infty)$ in quanto coincide con funzioni elementari. Possiamo anche affermare che f è derivabile in 0 da sinistra e derivabile in 0 da destra. Occorre però vedere se le due derivate sono uguali. Essendo la funzione continua in 0 possiamo fare o i limiti dei rapporti incrementali o anche i limiti delle derivate. La derivata di f è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)\ln 2} & x \in (-2, 0) \\ -2x - \dfrac{3}{2} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2\ln 2} \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Quindi questo conferma che f non è derivabile in 0 (c'è un punto angoloso in quanto derivata destra e sinistra sono finite).

Quesito 1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \quad \text{si ha che} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Quesito 2. Se $f : A \to B$, la controimmagine attraverso f dell'insieme $\{b\}$ è

$$\big\{x \in A : f(x) = b\big\}.$$

Quesito 3. Diciamo che $s = \sup A$ se

1. s è un maggiorante di A, cioè $s \geq x$, per ogni $x \in A$
2. se $t < s$, allora t non è un maggiorante di A

Quesito 4. Il teorema fondamentale delle funzioni continue in un intervallo dice che:
se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che la funzione f assume (in corrispondenza dei valori di $[a, b]$) è un intervallo chiuso e limitato.
Il teorema è certamente applicabile alla funzione $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|$ in quanto la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-2, 1]$.
Per verificare la tesi basta osservare che l'immagine di f è l'intervallo $[0, 2]$ (aiutarsi con un grafico) e quindi si tratta di un intervallo chiuso e limitato.

Quesito 5. Se f è una funzione definita in A e t è un punto interno ad A, dire che f è derivabile in t significa che

$$\lim_{x\to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \quad \text{esiste ed è un numero reale finito.}$$