

DOMANDA 1. Si ha

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

DOMANDA 2. Basta usare il teorema di Ruffini: il polinomio $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ è divisibile per $D(x) = x + 1$ se e solo se $P(-1) = 0$. Si ha

$$P(-1) = 3 - 5 + 3 - 2 + 1 = 0,$$

quindi la risposta è affermativa.

DOMANDA 3. Si tratta di un'equazione logaritmica riconducibile ad una equazione di secondo grado. Ponendo $\log_2 x = t$ l'equazione diventa

$$2t^2 - 3t + 1 = 0. \quad \text{Le soluzioni sono } t = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \text{e cioè } t = 1 \text{ oppure } t = \frac{1}{2}.$$

Tornando alla variabile x si ha

$$\log_2 x = 1 \quad \text{oppure} \quad \log_2 x = \frac{1}{2} \quad \text{e quindi} \quad x = 2 \quad \text{oppure} \quad x = \sqrt{2}$$

(la condizione di esistenza $x > 0$ è verificata).

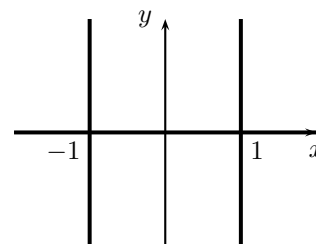
DOMANDA 4. La disequazione equivale al doppio sistema

$$\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 + x < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono l'intervallo $(-2, 1]$; il secondo sistema non ha soluzioni. Pertanto le soluzioni della disequazione sono date dall'intervallo $(-2, 1]$.

DOMANDA 5.

L'equazione equivale alla $y(x^2 - 1) = 0$, cioè $y(x - 1)(x + 1) = 0$. L'insieme delle soluzioni è dato dai punti che stanno su una delle rette di equazione $y = 0$, oppure $x = 1$, oppure $x = -1$. L'insieme è raffigurato a fianco.



DOMANDA 6. La derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$ nel punto $x_0 = 2$ è il

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

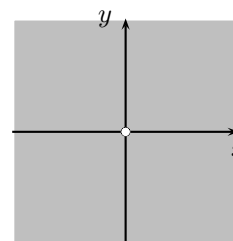
DOMANDA 7. Sviluppando il calcolo rispetto alla seconda colonna, il determinante risulta uguale a $2 \cdot 2 = 4$.

DOMANDA 8.

Le condizioni di esistenza della funzione $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sono date dal sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad x^2 + y^2 > 0.$$

La disequazione è verificata da tutti i punti del piano diversi dall'origine.



DOMANDA 9. La derivata parziale rispetto ad y della funzione è

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

DOMANDA 10. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 2y + 1)$. Ponendo il gradiente uguale al vettore nullo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema porta alla soluzione $(0, -\frac{1}{2})$ e il secondo è impossibile. L'unico punto stazionario è quindi $(0, -\frac{1}{2})$.

ESERCIZIO 1. Se ci si accorge che v^3 è la somma di v^1 e v^2 , possiamo concludere che almeno uno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due e quindi i tre vettori per definizione sono linearmente dipendenti.

Altrimenti si può cercare di scoprire se esiste una combinazione lineare dei tre che sia uguale al vettore nullo e che abbia coefficienti non tutti nulli. Poniamo quindi $av^1 + bv^2 + cv^3 = 0$, cioè

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} b+c \\ a-b \\ b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che la terza componente è uguale alla prima, l'uguaglianza si traduce nel sistema

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-b=0. \end{cases}$$

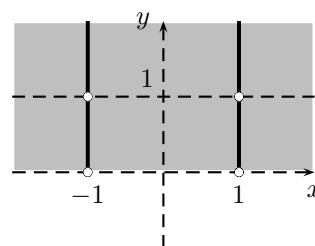
Il sistema ha certamente soluzioni non banali, ad esempio $a=1$, $b=1$, $c=-1$. Quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. Si poteva arrivare alla stessa conclusione osservando che la matrice 3×3 che si ottiene con i tre vettori ha determinante uguale a 0.

La dimensione dello spazio generato dai tre vettori è uguale al rango di questa matrice, che risulta essere 2.

ESERCIZIO 2.

Le condizioni di esistenza della funzione $f(x, y) = \frac{y \ln(x^2)}{x^2 \ln y}$ sono date dal sistema

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ y > 0 \\ \ln y \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \\ y \neq 1. \end{cases}$$



Si tratta quindi del primo e secondo quadrante (senza il bordo inferiore, senza i punti che stanno sull'asse y e senza i punti che stanno sulla retta di equazione $y=1$).

L'insieme è raffigurato a fianco.

Il dominio di f è simmetrico rispetto alle x e la funzione f è pari rispetto alle x , dato che

$$f(-x, y) = \frac{y \ln((-x)^2)}{(-x)^2 \ln y} = \frac{y \ln(x^2)}{x^2 \ln y} = f(x, y).$$

La curva di livello 0 si trova ponendo $f(x, y) = 0$, che equivale a $y \ln(x^2) = 0$. La soluzione $y=0$ non è accettabile, mentre invece possiamo avere $\ln(x^2) = 0$, che significa $x^2 = 1$, da cui $x = \pm 1$. Si tratta di due rette verticali di equazione $x=1$ oppure $x=-1$: meglio, della parte di tali rette contenuta nel dominio della funzione.¹ La curva di livello 0 è tracciata in modo marcato nella figura sopra.

ESERCIZIO 3. La derivata parziale rispetto ad x (si tenga conto che tutto ciò che dipende da y è costante) è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{\ln y} \cdot \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 - \ln(x^2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{y}{\ln y} \cdot \frac{2x(1 - \ln(x^2))}{x^4} = \frac{y}{\ln y} \cdot \frac{2(1 - \ln(x^2))}{x^3}$$

e la derivata parziale rispetto ad y (si tenga conto che tutto ciò che dipende da x è costante) è

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln(x^2)}{x^2} \cdot \frac{\ln y - 1}{\ln^2 y}.$$

I punti stazionari di f si trovano allora ponendo uguali a zero entrambe le derivate parziali. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{y}{\ln y} \cdot \frac{2(1 - \ln(x^2))}{x^3} = 0 \\ \frac{\ln(x^2)}{x^2} \cdot \frac{\ln y - 1}{\ln^2 y} = 0. \end{cases}$$

Nella prima equazione la soluzione $y=0$ non è accettabile. Invece possiamo avere $\ln(x^2) = 1$, da cui $x^2 = e$, e cioè $x = \pm\sqrt{e}$.

Nella seconda equazione possiamo avere soltanto $\ln y = 1$, da cui $y = e$. Allora abbiamo due punti stazionari: $(-\sqrt{e}, e)$ e $(\sqrt{e}, e)$.

¹Precisamente dei punti con ascissa $x=1$ oppure $x=-1$ e ordinata positiva e diversa da 1.

Il punto stazionario che sta nel primo quadrante è $(\sqrt{e}, e)$. Dobbiamo quindi scrivere le espressioni delle restrizioni di f alle rette di equazione $x = \sqrt{e}$ e $y = e$. Si ha

$$f(x, y) \Big|_{x=\sqrt{e}} = \frac{y}{e \ln y} \quad \text{e} \quad f(x, y) \Big|_{y=e} = \frac{e \ln(x^2)}{x^2}.$$

Si tratta ora di vedere se lungo queste restrizioni la funzione ha in $(\sqrt{e}, e)$ un punto di massimo o di minimo locale. La derivata lungo la prima restrizione è

$$\frac{\ln y - 1}{e \ln^2 y}$$

e studiando il segno di questa derivata si trova che in $y = e$ c'è un punto di minimo. La derivata lungo la seconda restrizione è

$$\frac{2e(1 - \ln(x^2))}{x^3}$$

e qui, sempre dal segno della derivata, si trova invece che in $x = \sqrt{e}$ c'è un punto di massimo. Quindi possiamo concludere che il punto stazionario $(\sqrt{e}, e)$ non è né di massimo né di minimo.

QUESITO 1. Dire che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge significa che converge la successione delle sue somme parziali, cioè la successione s_n , definita da

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \text{ per ogni } n \geq 0.$$

QUESITO 2. Si può dire che il rango di una matrice è il rango della trasformazione lineare T rappresentata da A , cioè la dimensione dell'immagine di T .

Si può anche dire che il rango della matrice è il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti, o anche il massimo ordine dei minori non nulli della matrice stessa.

Una condizione sufficiente affinché il rango di una matrice 3×4 sia 3 è che il determinante di una sua sottomatrice 3×3 sia diverso da zero.

QUESITO 3. Con curva di livello k di una funzione $f(x, y)$ si intende l'insieme dei punti del dominio di f in cui f assume il valore k .

No, una curva di livello non è sempre il grafico di una funzione; si consideri ad esempio la curva di livello 1 di $f(x, y) = x^2 + y^2$, che è una circonferenza. Come noto una circonferenza non è il grafico di una funzione.

QUESITO 4. Una forma quadratica $q(x, y)$ si dice indefinita se esistono due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in cui si ha

$$q(x_1, y_1) > 0 \quad \text{e} \quad q(x_2, y_2) < 0.$$

Un esempio è la $q(x, y) = x^2 - y^2$, per cui si ha $q(1, 0) > 0$ e $q(0, 1) < 0$.

QUESITO 5. La derivata parziale rispetto ad y di una funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è il

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \text{ se questo esiste ed è finito.}$$