FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 2 – Soluzioni I parte

Domanda 1. Si ha $16x^5 - 9x^3 = x^3(16x^2 - 9) = x^3(4x-3)(4x+3)$.

Domanda 2. Dato che $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-1/3}$, si ha che $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{3}$.

Domanda 3. Si ha

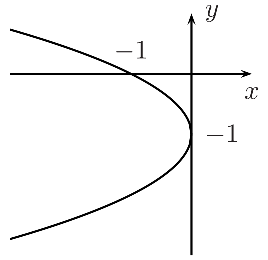
$$2e^x = 3 \qquad , \qquad e^x = \frac{3}{2} \qquad , \qquad x = \ln\frac{3}{2}.$$

Domanda 4. La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x < 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x > 0 \\ -\sqrt{2} < \ln x < \sqrt{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x > 0 \\ e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'intervallo $S = (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}})$.

Domanda 5.

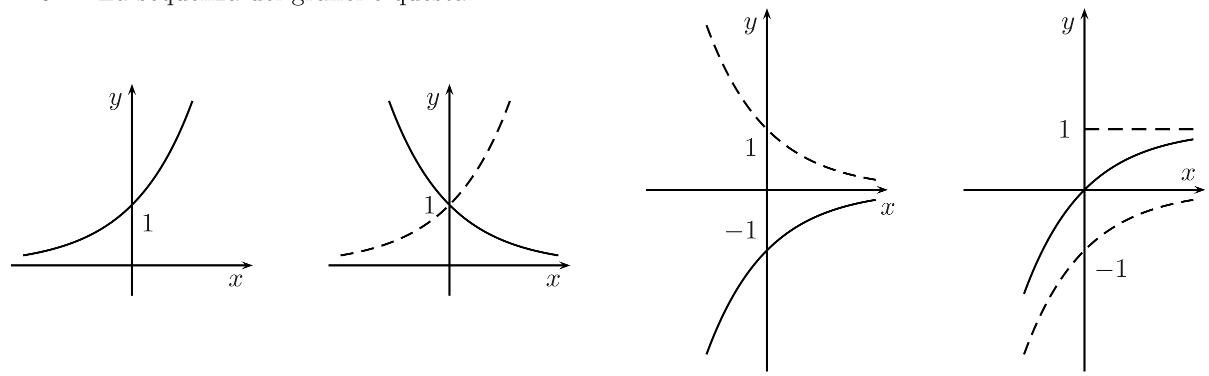


L'equazione equivale a

$$x = -y^2 - 2y - 1 \quad \text{cioè} \quad x = -(y+1)^2.$$

Si tratta della parabola raffigurata a fianco.

Domanda 6. La sequenza dei grafici è questa:



$x \mapsto e^x$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x}$ $\qquad$ $x \mapsto -e^{-x}$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - e^{-x}$

Domanda 7.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{1/x} + \sqrt{-x}}{1 + \ln(1 + \frac{1}{x})} = \frac{e^0 + \infty}{1 + \ln(1+0)} = \frac{1+\infty}{1+0} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

Domanda 8. I punti stazionari sono i punti che annullano la derivata di f. Si ha $f'(x) = 2x^2 + 2x - 4 = 2(x^2 + x - 2)$. Quindi risolvo l'equazione

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad \text{che ha le soluzioni } x = -2 \text{ e } x = 1.$$

Domanda 9. L'integrale è del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x)\,\mathrm{d}x$ con $f(x) = 1 - 2x$ e $\alpha = -\frac{1}{2}$. Occorre aggiustare la costante della derivata di f, che è -2. Quindi si ha

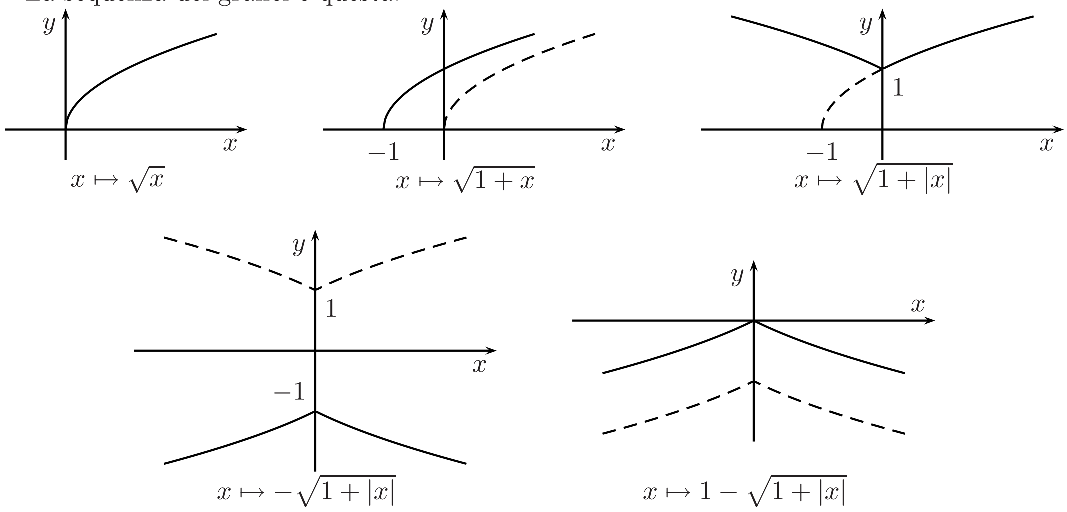
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x = \int (1-2x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int(-2)(1-2x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-2x} + c.$$

Domanda 10. L'integrale $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ è del tipo $\int f^2(x) Df(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^3(x)}{3} + c$. Quindi si ha

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{3} + c \quad \text{e pertanto}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^e = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 1. La sequenza dei grafici è questa:



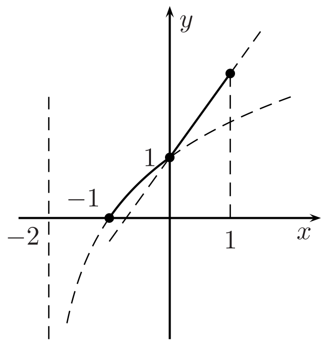
Dall'ultimo grafico si vede che l'estremo superiore (anche massimo) della funzione è 0, mentre l'estremo inferiore è $-\infty$.[1] L'immagine di $x \mapsto 1-\sqrt{1+|x|}$ è quindi l'intervallo $(-\infty, 0]$. Concludiamo con la controimmagine dell'intervallo $[-1, 0]$. Calcoliamo la controimmagine del valore -1 risolvendo l'equazione

$$1-\sqrt{1+|x|}=-1 \quad \text{cioè} \quad \sqrt{1+|x|}=2 \quad \text{cioè} \quad 1+|x|=4 \quad \text{cioè} \quad |x|=3.$$

Dato che le soluzioni di quest'ultima sono ± 3, la controimmagine di $[-1, 0]$ è l'intervallo chiuso $[-3, 3]$.

Esercizio 2. Disegniamo intanto un grafico della funzione

$$f(x)=\begin{cases} \log_2(x+2) & -1 \le x \le 0 \\ x\ln 4+1 & 0<x \le 1. \end{cases}$$



Per ottenere il grafico abbiamo considerato che $f(0)=\log_2 2=1$ e che la retta di equazione $y=x\ln 4+1$ passa per il punto $(0,1)$. Dal grafico risulta evidente che la funzione è continua in tutto il suo dominio. Confermiamo questo analiticamente. Nell'intervallo $[-1, 0)$ f è continua in quanto coincide con la funzione elementare $x \mapsto \ln_2(x+2)$. Nell'intervallo $(0, 1]$ la funzione è continua in quanto coincide con un polinomio. Possiamo anche dire che f è continua in 0 da sinistra in quanto coincide con la funzione logaritmica in $[-1, 0]$. Verifichiamo attraverso la definizione la continutà in 0 da destra: si ha

$$f(0)=\log_2 2=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln 4+1)=1.$$

Quindi f è continua anche in 0 e dunque lo è in tutto l'intervallo $[-1, 1]$.
Passiamo alla derivabilità. In realtà il grafico è stato fatto usando già informazioni ricavate dalle pendenze destra e sinistra delle due curve. Studiamo analiticamente la questione. La funzione è certamente derivabile in $(-1, 0)$ e in $(0, 1)$ in quanto coincide con funzioni elementari. Possiamo anche affermare che f è derivabile in 0 da sinistra e derivabile in 0 da destra. Occorre però vedere se le due derivate sono uguali. Essendo la funzione continua in 0 possiamo fare o i limiti dei rapporti incrementali o anche i limiti delle funzioni derivate. Seguiamo questa seconda strada. La derivata di f è

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+2)\ln 2} & x \in (-1, 0) \\ \ln 4 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{1}{2\ln 2} \quad \text{mentre} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\ln 4.$$

Quindi questo ci dice che f non è derivabile in 0 (c'è un punto angoloso in quanto derivata destra e sinistra sono finite).

[1] Che la funzione non sia inferiormente limitata risulta ovvio pensando che $\lim_{x\to\pm\infty}(1-\sqrt{1+|x|})=-\infty$.

Esercizio 3. Occorre osservare che nell'intervallo di integrazione $[\frac{1}{e}, e]$ la funzione $x \mapsto \ln x$ cambia segno (si annulla in 1, è negativa in $[\frac{1}{e}, 1)$ e positiva in $(1, e]$). Quindi l'integrale va diviso in due:

$$\int_{1/e}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+|\ln x|}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{1/e}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Calcoliamo a parte le primitive, osservando che $\frac{1}{x} = D(\ln x)$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}(1+\ln x)^{1/3}\,\mathrm{d}x = \frac{(1+\ln x)^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}(1+\ln x)^{4/3} + c$$

e

$$\int \frac{\sqrt[3]{1-\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)^{1/3}\,\mathrm{d}x = -\frac{(1-\ln x)^{4/3}}{4/3} + c = -\frac{3}{4}(1-\ln x)^{4/3} + c.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{1/e}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+|\ln x|}}{x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{4}(1-\ln x)^{4/3}\Big|_{1/e}^{1} + \frac{3}{4}(1+\ln x)^{4/3}\Big|_{1}^{e} \\
&= -\frac{3}{4}\left(1-2^{4/3}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{4/3}-1\right) \\
&= \frac{3}{2}2^{4/3} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Quesito 1. Una funzione f si dice continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Quesito 2. Un esempio di intervallo chiuso e non limitato è $[0, +\infty)$.

Quesito 3. La scrittura

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to +\infty \qquad \text{significa che} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Quesito 4. Dire che la funzione g è una primitiva della funzione f nell'intervallo I significa che g è derivabile in I e $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Quesito 5. Il teorema fondamentale del calcolo dice:
se la funzione f è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la sua funzione integrale, e cioè la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

è derivabile in $[a, b]$ e si ha $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.
Inoltre, se G è una qualunque primitiva di f, si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$