FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 3 – Soluzioni I parte

DOMANDA 1. Possiamo scrivere

$$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^{4/3} \cdot 2^{3/4} = 2^{4/3+3/4} = 2^{25/12}.$$

DOMANDA 2. Si ha

$$\log_2(x+2) = -2 \quad \iff \quad x+2 = \frac{1}{4} \quad \iff \quad x = -\frac{7}{4}.$$

DOMANDA 3. Si ha

$$3^{x-2} > \frac{1}{3} \quad \iff \quad 3^{x-2} > 3^{-1} \quad \iff \quad x-2 > -1 \quad \iff \quad x > 1.$$

DOMANDA 4. Per ottenere un polinomio a coefficienti interi si può raccogliere $\frac{1}{10}$:

$$\frac{2}{5}x^4 - \frac{5}{2}y^2 = \frac{1}{10}(4x^4 - 25y^2) = \frac{1}{10}(2x^2 - 5y)(2x^2 + 5y).$$

DOMANDA 5. Per sapere se i punti appartengono alla circonferenza basta sostituire le componenti e vedere se l'equazione è soddisfatta oppure no. Con il punto $P(1,-1)$ si ha che l'equazione non è soddisfatta, con il punto $Q(2,-1)$ invece l'equazione è soddisfatta.

DOMANDA 6. Si tratta delle x tali che $f(x) \in (-1,1)$, cioè delle x tali che $-1 < 1 - x^2 < 1$. La doppia disequazione equivale ad un sistema, oppure equivale a $-2 < -x^2 < 0$, cioè alla doppia disequazione $0 < x^2 < 2$. Le soluzioni di quest'ultima sono date dall'insieme $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$. [1]

DOMANDA 7. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \cdot e^{+\infty} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

DOMANDA 8. Si ha

$$D(xe^{-x}) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

DOMANDA 9. Si ha

$$\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\big|_0^1 = -(e^{-1} - 1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$$

DOMANDA 10. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

[1] Si pensi che $0 < x^2 < 2$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1. Il dominio della funzione $f(x) = x^2 \ln^2 x$ è l'intervallo $(0, +\infty)$.
Gli zeri (punti in cui f vale zero) sono soltanto il punto $x = 1$. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln^2 x = +\infty$$

e (uso il cambio di variabile $\frac{1}{x} = y$, da cui $x = \frac{1}{y}$)

$$\lim_{x\to0^+} x^2 \ln^2 x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^2 \frac{1}{y}}{y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-\ln y)^2}{y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^2 y}{y^2} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 = 0.$$

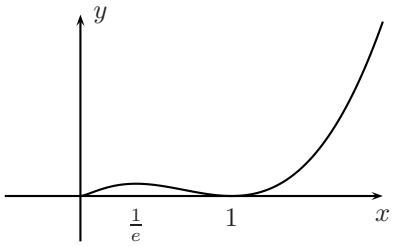
Per ottenere il grafico calcoliamo e studiamo la derivata.

$$f'(x) = 2x \ln^2 x + x^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln^2 x + 2x \ln x = 2x \ln x(\ln x + 1).$$

La derivata si annulla in $x = 1$ e in $x = \frac{1}{e}$. Studiando il segno di $\ln x$ e di $\ln x + 1$ si trova che la derivata è positiva in $(0, \frac{1}{e})$ e in $(1, +\infty)$. Pertanto in questi intervalli la funzione è crescente; invece è descrescente in $(\frac{1}{e}, 1)$; quindi ha in $\frac{1}{e}$ un punto di massimo locale e in 1 un punto di minimo locale.
Per un grafico più realistico possiamo capire con che pendenza la funzione tende a zero in zero (da destra). Basta calcolare il limite della derivata e cioè

$$\lim_{x\to0^+} 2x \ln x(\ln x + 1) = \lim_{x\to0^+} (2x \ln^2 x + 2x \ln x).$$

Ricordando che entrambe le funzioni $x \ln x$ e $x \ln^2 x$ tendono a zero, possiamo dire che il limite cercato è zero e che quindi la pendenza da destra è nulla. Il grafico di f è quindi tangente all'asse x. Il grafico è riportato qui sotto.



ESERCIZIO 2. L'intervallo di integrazione è illimitato e la funzione integranda è illimitata vicino a 0 (quindi ci sono due tipi di problemi). Si spezza l'integrale nella somma di due integrali distinti, in ciascuno dei quali c'è un solo tipo di problema. Scriviamo allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3} + x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^{2/3} + x^{3/2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3} + x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

Per $x \to 0^+$ si ha che è trascurabile $x^{3/2}$ rispetto a $x^{2/3}$ e quindi possiamo dire che

$$\frac{1}{x^{2/3} + x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{2/3}} \quad \text{, per } x \to 0^+.$$

Quindi, dato che $\frac{1}{x^{2/3}}$ è integrabile in $[0, 1]$ ($\alpha = \frac{2}{3} < 1$), allora $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}+x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ converge.
Per $x \to +\infty$ si ha che invece è trascurabile $x^{2/3}$ rispetto a $x^{3/2}$ e quindi possiamo dire che

$$\frac{1}{x^{2/3} + x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{, per } x \to +\infty.$$

Quindi, dato che $\frac{1}{x^{3/2}}$ è integrabile in $[1, +\infty]$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), anche $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}+x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ converge.
Pertanto l'integrale dato converge.

ESERCIZIO 3. La serie è riconducibile ad una serie geometrica. Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 2^{3n}}{3 \cdot 3^{2n}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

Quesito 1. x_0 è un punto di massimo locale per la funzione f se in un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 si ha che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).^2$$

Quesito 2. La scrittura $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (si faccia attenzione che il limite è per x che tende a 0 da destra) significa che

qualunque sia $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (0, \delta)$ si ha $f(x) > \varepsilon$.

Quesito 3. L'integrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ è un integrale generalizzato se la funzione f non è limitata nell'intervallo $(0, 1)$ (ad esempio se risulta $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$).

Quesito 4. Dire che i vettori u, v, w sono linearmente dipendenti significa che almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri due.

Quesito 5. Una trasformazione T di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ si dice lineare se ha le due seguenti proprietà:

1. per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha che $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
2. per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni scalare α si ha che $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

[2] Sarebbe bene fare anche l'intersezione di questo intorno con il dominio di f, in quanto x_0 potrebbe non essere un punto interno.