FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 4 – Soluzioni I parte

DOMANDA 1. Dopo aver osservato che l'espressione è definita per $x \neq -1$, possiamo scrivere

$$x - \frac{x^2-1}{x+1} = x - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - (x-1) = 1.$$

DOMANDA 2. L'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 2$.

DOMANDA 3. La disequazione equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+2 > x^2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad -2 \leq x < 0 \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date dall'insieme $[-2,0) \cup [0,2)$, cioè l'intervallo $[-2,2)$.

DOMANDA 4. Raccogliendo x^2 si ha

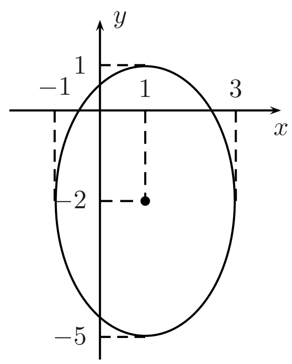
$$x^4 + 6x^3 - 7x^2 = x^2(x^2 + 6x - 7) = x^2(x-1)(x+7).$$

DOMANDA 5.

Dividendo ambo i membri per 36 (così il termine a destra diventa 1), possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Si tratta quindi dell'ellisse di centro il punto $(1,-2)$ e semiassi 2 (sulle x) e 3 (sulle y). Eccolo raffigurato a fianco.



DOMANDA 6. Propongo questa soluzione (sono possibili altri metodi, come un cambio di variabile):

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Alternativamente, oltre al cambio di variabile più "naturale" $\sqrt{x} = t$, si può operare la sostituzione $x - 1 = t$ (quindi $x = 1 + t$), che porta al

$$\lim_{t\to0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = \frac{1}{2}, \quad \text{caso particolare del limite notevole } \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^b - 1}{t} = b.$$

DOMANDA 7. Basta trovare la derivata con le regole di derivazione e poi calcolarla nel punto $x_0 = 4$. Si ha

$$D\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2}.$$

Calcolando questa nel punto $x_0 = 4$ si ottiene $\frac{\frac{1}{4}\cdot3-2}{9} = -\frac{5}{36}$.

DOMANDA 8. Si ha

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + c.$$

Domanda 9. Possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n^7}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$$

e si tratta quindi di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = \frac{7}{6}$. Essendo $\alpha > 1$ la serie converge.

Domanda 10. Abbiamo $f(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = -1$.
In generale l'equazione della retta tangente è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Nel nostro caso abbiamo

$$f(x_0) = f(-1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) = f'(-1) = -2, \quad \text{e quindi l'equazione richiesta è} \quad y = -2(x+1).$$

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 4 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. Esaminiamo la continuità. Il valore di f in 0 è $f(0) = 1$ (si calcola con la funzione logaritmica). Possiamo dire che la funzione, per come risulta definita, è certamente continua da destra. Da sinistra si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} = 1.$$

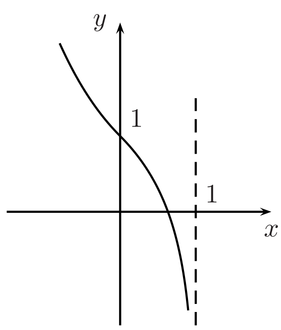
Quindi la funzione è continua in 0.
Passiamo alla derivabilità. La funzione è certamente derivabile in 0 da destra con derivata destra $f'_+(0) = -1$ (la derivata di $1 + \ln(1-x)$ è $\frac{1}{x-1}$). Possiamo ora calcolare la derivata sinistra in 0 con il limite della derivata in 0 da sinistra:

$$\lim_{x \to 0^-} D(e^{-x}) = \lim_{x \to 0^-} (-e^{-x}) = -1.$$

Essendo uguali le derivate destra e sinistra, possiamo dire che la funzione f è derivabile in 0.
Dai calcoli fatti fino ad ora possiamo dire che $f'(0) = -1$ e quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è

$$y = f(0) + f'(0)x \qquad \text{e cioè} \qquad y = 1 - x.$$

Passiamo alle altre domande. Il grafico di e^{-x} si ottiene dal grafico di e^x facendone il simmetrico rispetto all'asse y. Il grafico di $1 + \ln(1-x)$ si ottiene a partire dal grafico di $\ln x$ e passando poi per i grafici di $\ln(1+x)$, di $\ln(1-x)$. Si ottiene quanto raffigurato a destra.



L'immagine della funzione f è tutto $\mathbb{R}$.[1] Per calcolare la controimmagine dell'intervallo $[0,2]$ dobbiamo anzitutto trovare le controimmagini degli estremi: $f^{-1}(0)$ è il valore di x per cui $f(x) = 0$. Occorre risolvere quindi l'equazione

$$1 + \ln(1-x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \ln(1-x) = -1 \quad \text{cioè} \quad 1 - x = e^{-1} \quad \text{cioè infine} \quad x = 1 - \frac{1}{e}.$$

Invece $f^{-1}(2)$ è il valore di x per cui $f(x) = 2$ e quindi risolviamo l'equazione

$$e^{-x} = 2 \quad \text{cioè} \quad -x = \ln 2 \quad \text{cioè} \quad x = -\ln 2.$$

La controimmagine di $[0,2]$ è quindi l'intervallo $[-\ln 2, 1 - \frac{1}{e}]$.

Esercizio 2. Occorre dividere in due l'integrale, dato che il segno di $x - 1$ cambia nell'intervallo di integrazione. Considerando che $x - 1 \le 0$ in $[0,1]$ e invece $x - 1 \ge 0$ in $[1,2]$, si ha

$$\int_0^2 \sqrt{1 + |x-1|}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)}\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{1 + (x-1)}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{2-x}\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{(2-x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 + \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 = -\frac{2}{3}(1 - 2^{3/2}) + \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) = \frac{4}{3}(2^{3/2} - 1).$$

[1] Si consideri che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Esercizio 3. Confrontiamo la nostra serie con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, che converge. Per operare il confronto calcoliamo il limite del quoziente tra i due termini generali, cioè il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Questo ci dice che $\frac{\ln n}{n^3}$ è trascurabile rispetto ad $\frac{1}{n^2}$, e quindi che anche la serie data converge.

Quesito 1. La funzione non è suriettiva in quanto l'immagine è l'intervallo $(-\infty, 1]$, che non coincide con tutto il codominio, che è $\mathbb{R}$.

Quesito 2. Dire che il punto x_0 è interno all'insieme A significa che possiamo trovare un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto x_0 che è completamente contenuto nell'insieme A.

Quesito 3. Le proprietà che garantiscono l'integrabilità di una funzione f in un intervallo $[a, b]$ sono:

- la continuità di f in $[a, b]$;
- la monotonia di f in $[a, b]$;
- la limitatezza di f in $[a, b]$ e il fatto che f abbia al più un numero finito di punti di punti di discontinuità.

Quesito 4. Un criterio di confronto per le serie è ad esempio il seguente: se una serie $\sum b_n$ converge e per una successione a_n vale che $a_n = o(b_n)$, per $n \to +\infty$, allora anche la serie $\sum a_n$ converge.

Quesito 5. Dire che i vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ generano il sottospazio S di $\mathbb{R}^n$ significa che ogni elemento di S si può ottenere come combinazione lineare dei vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$. Si può anche dire che facendo tutte le combinazioni lineari dei vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ si ottiene tutto l'insieme S.