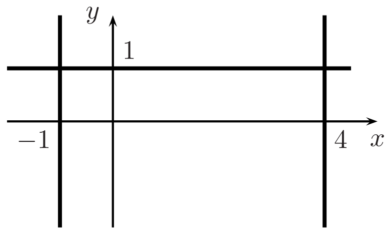
FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 5 – Soluzioni I parte

DOMANDA 1. L'uguaglianza deriva dall'applicazione della proprietà $\ln(t^n) = n \ln t$ con n dispari. Per l'esistenza di entrambi i membri è richiesto che sia $t > 0$. Nel nostro caso quindi

$$\ln(x^6) = \ln\left((x^2)^3\right) = 3\ln(x^2),$$

ed è richiesto che sia $x^2 > 0$, il che vuol dire $x \neq 0$.

DOMANDA 2.



L'equazione $(y-1)(x^2-3x-4) = 0$ ha per soluzioni i punti (x, y) del piano in cui $y = 1$ oppure quelli in cui la x annulla il polinomio $x^2 - 3x - 4$, che sono $x = -1$ oppure $x = 4$. Si tratta pertanto di tre rette nel piano, di equaiozione appunto $y = 1$, $x = -1$ oppure $x = 4$. L'insieme è raffigurato a fianco.

DOMANDA 3. Si ha

$$3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x-3)(x+3).$$

DOMANDA 4. La quantità $\ln(x^2)$ è definita per $x \neq 0$. Quindi la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln(x^2) < 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < e \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono date dall'insieme $(-\sqrt{e}, 0) \cup (0, \sqrt{e})$.

DOMANDA 5. L'equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}x + y = 0$ equivale alla $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$. Completando i quadrati si ha

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 2y + 1 = \frac{13}{4} \quad \text{cioè} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{13}{4}.$$

Si tratta quindi della circonferenza di centro $(\frac{3}{2}, -1)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

DOMANDA 6. Il rapporto incrementale di $f(x) = x^2 + x$, con punto iniziale $x_0 = 1$ è

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

DOMANDA 7. La funzione è certamente continua in tutti i punti diversi da 0 (funzioni elementari). Possiamo anche dire che è continua in 0 da destra per definizione. Abbiamo poi

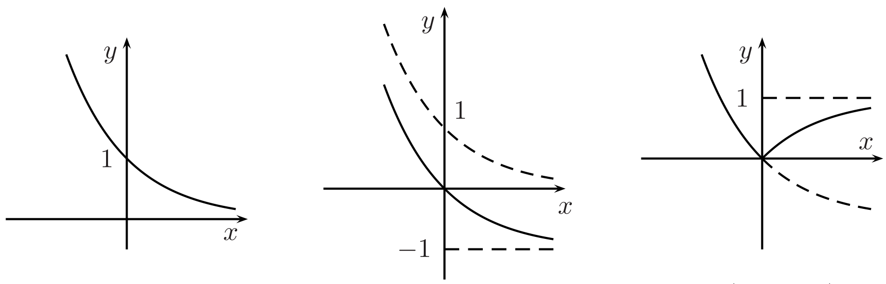
$$f(0) = 1 \text{ (prima espressione)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x) = 1.$$

Quindi f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

DOMANDA 8. Si tratta di un limite notevole. Ricordando che in generale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = b \quad \text{si ha} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x} = \frac{1}{3}.$$

DOMANDA 9. Il grafico della funzione $f(x) = |e^{-x} - 1|$ si può ottenere facilmente attraverso trasformazioni elementari, a partire dal grafico della funzione $x \mapsto e^{-x}$.



$x \mapsto e^{-x}$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x} - 1$ $\qquad$ $x \mapsto |e^{-x} - 1|$

Dall'ultimo grafico ottenuto si vede facilmente che i valori che la funzione assume (cioè l'immagine) sono dati dall'intervallo $[0,+\infty)$: il minimo di f è 0 e il punto di minimo è $x_0 = 0$.

Domanda 10. Abbiamo $f(x) = \sqrt{x}$ e il polinomio è centrato in $x_0 = 1$. Il polinomio di Taylor di 2° grado è

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} \qquad \text{da cui} \qquad f'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Pertanto il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 5 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. Verifichiamo intanto che $x_0 = 0$ è punto stazionario della funzione $f(x) = e^{-x^2}$. Si ha

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{e risulta} \quad f'(x_0) = f'(0) = 0.$$

Per concludere che 0 è punto di massimo locale si può osservare che la derivata prima di f è positiva a sinistra di 0 e negativa a destra. Quindi, essendo f crescente a sinistra e decrescente a destra, si ha che 0 è di massimo locale. Si poteva, alternativamente, osservare che la derivata seconda

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \quad \text{è negativa nel punto } x_0 = 0.$$

Passiamo alla seconda domanda. La scrittura

$$e^{-x^2} = o(e^x) \quad , \text{per } x \to -\infty$$

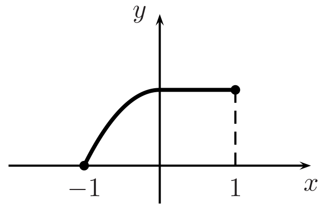
significa che il limite per $x \to -\infty$ del quoziente delle due funzioni è zero. Occorre appunto verificare questo. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x(x+1)} = e^{+\infty\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

Esercizio 2.

Il grafico di f si ottiene facilmente nell'intervallo $[-1,0]$ con trasformazioni elementari del grafico di x^2. La funzione è poi costante nell'intervallo $[0,1]$.
Il teorema di Lagrange ha come ipotesi che la funzione sia continua nell'intervallo $[-1,1]$ e derivabile nell'intervallo $(-1,1)$. Occorre verificare se f ha queste proprietà.
C'è la continuità (l'unico punto da controllare è 0), dato che

$$f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 1.$$



Anche per quanto riguarda la derivabilità l'unico punto da controllare è 0: calcoliamo le derivate destra e sinistra, facendo il limite della funzione derivata. Possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} (-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} 0 = 0.$$

Pertanto f è derivabile e le ipotesi del teorema di Lagrange sono verificate. Il teorema è applicabile e la tesi è sicuramente vera.
L'esercizio chiede ora di verificare la tesi. Si tratta di provare che c'è almeno un punto c nell'intervallo $(-1,1)$ in cui si ha

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}.$$

Il quoziente a destra vale $\frac{1}{2}$. Si noti che ora possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

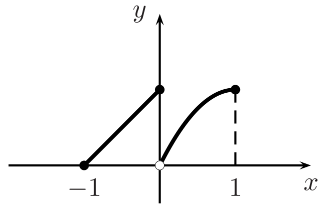
Dato che nell'intervallo $[0, 1)$ la derivata vale 0, il punto c deve trovarsi nell'intervallo $(-1, 0)$ e quindi poniamo

$$-2x = \frac{1}{2} \qquad \text{da cui si ricava} \qquad x = -\frac{1}{4}.$$

Quindi la tesi è verificata nell'unico punto $c = -\frac{1}{4}$.

Esercizio 3.

Il grafico di f è formato da un tratto di retta e da un arco di parabola. Il grafico è riportato a destra.



Per definizione la funzione integrale di f in $[-1, 1]$ è

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Occorre distinguere i due casi.

(i) se $x \in [-1, 0]$, allora

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x} (t+1)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2};$$

(ii) se invece $x \in (0, 1]$, allora

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (t+1)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} (1-(1-t)^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} (2t - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Quindi in definitiva si ha

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^3}{3} & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Da ultimo, possiamo verificare che F è continua nell'intervallo $[-1, 1]$. È certamente continua per $x \neq 0$, dato che si tratta di un polinomio. In 0 è continua dato che

$$F(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2}.$$

Quesito 1. La scrittura $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ significa per definizione che

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $x < -\delta$, allora si ha che $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Quesito 2. Supponiamo che f e g siano due funzioni per cui sia possibile costruire la funzione composta $f \circ g$, cioè la funzione $x \mapsto f(g(x))$. Se f e g sono derivabili, allora la regola di derivazione della funzione composta dice che

$$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Ad esempio, se abbiamo $f(t) = \ln t$ e $g(x) = \sqrt{x}$, allora $f(g(x)) = \ln \sqrt{x}$. Si ha

$$D \ln \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Quesito 3. Il simbolo $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ indica l'integrale indefinito della funzione f, ossia l'insieme di tutte le primitive della funzione f, cioè l'insieme di tutte le funzioni che hanno per derivata la funzione f.

Quesito 4. Una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano tutto $\mathbb{R}^n$.

Quesito 5. Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora il determinante di A è il numero reale che si ottiene con

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

dove gli a_{1i} sono gli elementi della prima riga di A e gli A_{1i} sono i complementi algebrici di questi. Si dice complemento algebrico A_{1i} la quantità $(-1)^{1+i}M_{1j}$, dove infine con M_{1j} si indica il minore complementare dell'elemento a_{1i}, cioè il determinante della sottomatrice di A che si ottiene eliminando la prima riga e la j-esima colonna.