

DOMANDA 1. Si può usare la regola di Ruffini, dato che il polinomio divisore è del tipo $x + a$. La tabella finale è la seguente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

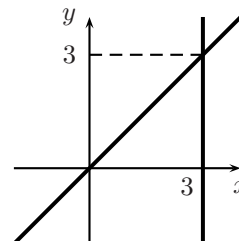
Vi si può leggere il quoziente, che è $(x^2 - x)$ e il resto, che è 0.

DOMANDA 2.

Con un doppio raccoglimento si ha

$$3x - 3y - x^2 + xy = 3(x - y) - x(x - y) = (x - y)(3 - x).$$

Quindi l'equazione $3x - 3y - x^2 + xy = 0$ equivale alla $(x - y)(3 - x) = 0$ e questa nel piano individua una coppia di rette: le rette di equazione $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante) e $x = 3$ (retta verticale di ascissa 3). Il grafico è qui a fianco.



DOMANDA 3. Usando le proprietà delle potenze possiamo trasformare l'equazione data in una sequenza di equazioni equivalenti:

$$10^{x-2} + 2^x \cdot 5^x = 101 \quad ; \quad \frac{1}{100} \cdot 10^x + 10^x = 101 \quad ; \quad 10^x \left(\frac{1}{100} + 1 \right) = 101 \quad ; \quad 10^x \cdot \frac{101}{100} = 101 \quad ; \quad 10^x = 100.$$

La soluzione è quindi $x = 2$.

DOMANDA 4. Ricordando che deve essere $x > 0$, anche qui trasformiamo la disequazione data in una sequenza di disequazioni equivalenti (possiamo scrivere $\log_{100} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} x}{2}$):

$$\log_{10} x + \log_{100} x < \frac{3}{2} \quad ; \quad \log_{10} x + \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 100} < \frac{3}{2} \quad ; \quad \log_{10} x + \frac{\log_{10} x}{2} < \frac{3}{2} \quad ; \quad \left(1 + \frac{1}{2} \right) \log_{10} x < \frac{3}{2}.$$

Da questa segue allora

$$\log_{10} x < 1 \quad \text{e quindi} \quad 0 < x < 10.$$

DOMANDA 5. L'uguaglianza non è certamente vera per $x = 2$ (entrambe le frazioni perdono di significato) e non è vera per $x < 2$, dato che in tal caso il primo membro è positivo, mentre il secondo è negativo. Quindi l'uguaglianza è vera per $x > 2$.

Alternativamente possiamo dire che $\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{1}{|x-2|}$ e quest'ultima coincide con $\frac{1}{x-2}$ appunto per $x > 2$.

DOMANDA 6. Ricordando che $\log_2(x-2)^2$ significa $\log_2((x-2)^2)$ e non $(\log_2(x-2))^2$, il dominio della funzione $f(x) = \log_2(x-2)^2$ è l'insieme delle x che rendono positivo l'argomento $(x-2)^2$: si tratta delle $x \neq 2$, cioè dell'insieme $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

DOMANDA 7. Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c.$$

Quindi

$$\int_{-1}^1 e^{-x} dx = -(e^{-1} - e) = e - \frac{1}{e}.$$

DOMANDA 8. Volendo evitare la risposta banale del vettore nullo (peraltro accettabile) ad esempio possiamo dire che il vettore $(1, 1, -1, 1)$ è ortogonale a $(1, 0, 2, 1)$ (il loro prodotto interno è zero).

DOMANDA 9. I due vettori $(1, -1)$ e $(-2, 2)$ sono linearmente dipendenti (il secondo è un multiplo del primo). Quindi generano un sottospazio di dimensione 1, lo stesso che è generato da uno solo dei due (indifferentemente). Quindi ad esempio una base è data dal solo vettore $(1, -1)$. Si dovrebbe scrivere correttamente: una base del sottospazio è $\{(1, -1)\}$.

DOMANDA 10. Il trasformato del vettore $(1, 2)$ attraverso la trasformazione rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene facendo il prodotto tra la matrice e il vettore, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 6 – Soluzioni II parte

ESERCIZIO 1. Possiamo ottenere tutte le proprietà richieste studiando la derivata della funzione f , che è

$$f'(x) = D\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Anzitutto possiamo affermare che non ci sono punti stazionari nell'intervallo $(0, 1)$, dato che la derivata di f si annulla solo se $\ln x = 1$ e cioè se $x = e$.

Il segno di f' ci può dare informazioni sulla monotonia. Si ha

$$f'(x) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad \ln x - 1 > 0$$

e questo avviene se $x > e$: quindi nell'intervallo $(0, 1)$ la derivata di f è negativa e pertanto f è monotona decrescente. A questo punto, anche senza conoscere i limiti agli estremi dell'intervallo, possiamo dire che f non ha né massimo, né minimo: infatti, essendo f decrescente, possiamo dire che

$$\sup f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \inf f = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$$

ma f non assume questi valori in quanto l'intervallo $(0, 1)$ è aperto.

ESERCIZIO 2. Si tratta di un integrale generalizzato. Notando che la funzione f è nulla in $(-\infty, 0]$, possiamo dire che, se l'integrale esiste, esso coincide con

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

Si può notare ora che la funzione è limitata in $(0, +\infty)$, dato che il limite a $+\infty$ è (facilmente) 0 e inoltre il limite a 0^+ è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0.$$

L'unico problema dell'integrale è quindi l'intervallo non limitato. L'integrale si può calcolare con la definizione, dato che siamo in grado di trovare una primitiva di f : l'integrale è del tipo $\int e^{f(x)} Df(x) dx$ e si ha

$$\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \int e^{-1/x} D(-1/x) dx = e^{-1/x} + c.$$

Dato che comunque la primitiva non è definita in 0 (tende però a 0), dividiamo in due l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

Per il primo integrale si ha

$$\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-1/x} \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (e^{-1} - e^{-1/a}) = e^{-1}.$$

Per il secondo integrale si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-1/x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-1/b} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}.$$

Quindi in definitiva l'integrale dato vale $e^{-1} + 1 - e^{-1}$, cioè 1.

ESERCIZIO 3. La trasformazione T può essere rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di T , ovvero il rango di A è 3, dato che il determinante di A è -2 . Ricordo che il rango di T è la dimensione dell'immagine di T , che quindi risulta essere tutto $\mathbb{R}^3$.

La nullità di T (la indico con $\nu(T)$), cioè la dimensione del nucleo di T , si trova applicando il cosiddetto teorema “nullità + rango”, che dice che

$$r(T) + \nu(T) = n \quad (\text{nel nostro caso } n = 3)$$

e quindi $\nu(T) = n - r(T) = 3 - 3 = 0$. Pertanto il nucleo di T si riduce in questo caso al sottospazio banale dato dal solo vettore nullo.

Infine è richiesta una base di $\text{Im } T$. Dato che $\det(A) \neq 0$, le tre colonne di A , che sono generatori di $\text{Im } T$, sono linearmente indipendenti, e quindi le tre colonne di A formano una base dell'immagine di T . Essendo $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$ ed essendo richiesta una base di $\text{Im } T$, risposta certamente accettabile sarebbe stata anche la base fondamentale di $\mathbb{R}^3$.

QUESITO 1. Se la serie $\sum a_n$ converge, possiamo dire che il suo termine generale a_n tende a zero per $n \rightarrow +\infty$.

QUESITO 2. L'unica combinazione lineare di vettori l.i. che può essere uguale al vettore nullo è quella che ha coefficienti tutti nulli, quindi possiamo dire appunto che tutti i coefficienti di questa combinazione sono uguali a zero.

QUESITO 3.

- La prima affermazione è vera: tre vettori generano $\mathbb{R}^2$ se ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può esprimere come loro combinazione lineare. I vettori possono essere linearmente dipendenti (anzi, certamente lo sono!). Ad esempio, i tre vettori $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ generano $\mathbb{R}^2$ e sono linearmente dipendenti.
- La seconda affermazione è falsa: due vettori di $\mathbb{R}^3$ possono al più generare un sottospazio di dimensione 2, e quindi non tutto $\mathbb{R}^3$.

QUESITO 4. Con minore di una matrice A (indipendentemente dalle sue dimensioni) si intende un qualunque determinante di una sottomatrice (quadrata) di A .

QUESITO 5. Il rango di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è la dimensione dell'immagine di T , che è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.