FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 7 – Soluzioni I parte

Domanda 1. Applicando la regola di Ruffini (o la divisione di Euclide) si trova che il quoziente è $Q(x) = 3x^2 - 6x + 10$ e il resto è $R(x) = -19$. Quindi $P(x)$ si può esprimere con $P(x) = (3x^2 - 6x + 10)(x + 2) - 19$.

Domanda 2. Per avere dopo il raccoglimento un polinomio a coefficienti interi possiamo raccogliere un fattore con parte numerica $\frac{1}{18}$, che è il minimo comune multiplo dei tre denominatori. Si ha

$$\frac{2}{3}x^2y - \frac{5}{6}xy^3 + \frac{8}{9}x^2y^2 = \frac{1}{18}xy(12x - 15y^2 + 16xy).$$

Domanda 3. Si ha

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Domanda 4. Dato che $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2 = \log_3 9$, l'equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x > 1 \\ \log_3 \Big(x(x-1)\Big) = \log_3 9 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x(x-1) = 9 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Soltanto la radice positiva è accettabile, dato che $\frac{1+\sqrt{37}}{2} > 1$.

Domanda 5. La disequazione equivale a

$$2^{x+1} \geq 2^{3x} \quad \text{cioè} \quad x + 1 \geq 3x \quad \text{cioè} \quad x \leq \frac{1}{2}.$$

Domanda 6. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} \Big(x \ln(x-1)\Big) = 1 \cdot \ln(0^+) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Domanda 7. Si ha

$$D\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Domanda 8. Si può osservare che l'integrale è riconducibile ad un integrale del tipo $\int \frac{Df(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$, essendo $f(x) = x^2 - 1$. Occorre aggiustare però una costante, dato che la derivata di f è $2x$. Quindi

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c.$$

Domanda 9. Per definizione

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \Big(-\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \Big(-\frac{1}{b} + 1\Big) = 1.$$

Domanda 10. Anzitutto A è invertibile dato che il determinante di A è 1. Indicando con A_{ca} la matrice dei complementi algebrici di A, si ha

$$A_{ca} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^\star = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 7 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. La funzione è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$ ed è continua in tale intervallo. In particolare è continua in 0 da destra. Quindi il limite in 0 coincide con $f(0) = 0$. Il limite all'infinito è

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x}{e^x} = 0$$

per confronto tra potenze ed esponenziale a $+\infty$.
Per trovare i punti di massimo e di minimo calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} = -e^{-x}(x^2 - 3x + 1).$$

I punti stazionari sono $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Lo studio del segno della derivata[1] porta a dire che la funzione f decresce tra 0 e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, cresce tra $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e decresce oltre $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Quindi il punto $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo locale e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo locale. Per disegnare il grafico si tenga conto del fatto che $f(1) = 0$. Il grafico porta a capire che i due punti stazionari sono rispettivamente di minimo globale e di massimo globale.
L'immagine della funzione, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume, sono i valori compresi tra il minimo ed il massimo, che si ottengono rispettivamente calcolando $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ e $f(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$.[2] Possiamo scrivere che l'immagine di f è l'intervallo (chiuso e limitato) $\Big[f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}), f(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\Big]$.

Esercizio 2. Calcoliamo intanto l'integrale indefinito (per parti):

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = x\cdot(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

Per definizione allora si ha

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\Big(-xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\Big(-be^{-b} - e^{-b} + 1\Big) = 1.$$ [3]

Passiamo alla seconda parte. Possiamo confrontare la funzione $x^{10}e^{-x}$ con la funzione $\frac{1}{x^2}$, il cui integrale all'infinito converge. Se troviamo che la nostra funzione è trascurabile rispetto ad $\frac{1}{x^2}$ possiamo dire che anche il nostro integrale converge. Calcoliamo allora il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{12}}{e^x} = 0$$

per il solito confronto potenza/esponenziale. Il risultato trovato ci dice che

$$x^{10}e^{-x} = o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\ ,\ \text{per } x\to+\infty.$$

Quindi, dato che la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$, anche la funzione $x^{10}e^{-x}$ lo è e l'integrale $\int_0^{+\infty} x^{10}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Esercizio 3. La matrice di rappresentazione di T è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le sue colonne non sono una base dell'immagine di T, dato che sono linearmente dipendenti (sono tre vettori in $\mathbb{R}^2$). Per trovare una base di ImT possiamo intanto osservare che il rango di A è 2 e che il minore di A che si ottiene con le ultime due colonne è diverso da zero. Quindi una base di ImT è ad esempio quella formata dalla seconda e dalla terza colonna di A.
Troviamo il nucleo di T risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

---

[1] La derivata di f è positiva se $x^2 - 3x + 1 < 0$, cioè per valori di x compresi tra le due radici.

[2] Con una calcolatrice si ottiene che $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \approx -0.161$ e $f(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \approx 0.309$.

[3] Si ricordi che

$$\lim_{b\to+\infty} be^{-b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = 0.$$

In conseguenza di quanto detto sopra sul minore non nullo, possiamo scrivere le soluzioni in funzione di x_1, che diventa un parametro. Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -x_1 \\ -x_2 + x_3 = x_1. \end{cases}$$

Con Cramer si trova

$$x_2 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} = -x_1$$

e

$$x_3 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ -1 & x_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le soluzioni si possono quindi scrivere come i vettori del tipo $(x_1, -x_1, 0)$, con x_1 parametro reale. Dato che $(x_1, -x_1, 0) = x_1(1, -1, 0)$, Il vettore $(1, -1, 0)$ è un generatore del nucleo di T. Essendo non nullo esso costituisce anche una base di $\mathrm{Ker}T$.
Infine, il vettore $(-2, 2, 0)$ appartiene al nucleo di T, dato che $(-2, 2, 0) = -2(1, -1, 0)$ (oppure si poteva anche osservare fin da subito che il vettore $(-2, 2, 0)$ è soluzione del sistema che definisce il nucleo).

Quesito 1. La derivata di una funzione f nel punto x_0 è il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ , se questo esiste ed è finito.}$$

Quesito 2. La funzione integrale di una funzione f definita nell'intervallo $[0, 1]$ è la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ , con } 0 \leq x \leq 1.$$

Tale funzione F esiste se la funzione f è integrabile nell'intervallo $[0, 1]$.

Quesito 3. Una serie geometrica di ragione r, cioè la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge se (e solo se) $|r| < 1$. In tali casi la somma della serie è $\dfrac{1}{1-r}$.

Quesito 4. Il rango di una trasformazione lineare T è la dimensione dell'immagine di T.

Quesito 5. Il teorema di Cramer dice che, dato un sistema lineare quadrato $Ax = b$, esso ha una sola soluzione se e solo se il determinante di A è diverso da zero.