FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 8 – Soluzioni I parte

DOMANDA 1. Si ha
$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{100}=10^{1/2}\cdot 10^{2/3}=10^{7/6}.$$

DOMANDA 2. Si ha
$$\log_2\left(4^{100}\right)=100\log_2 4=200.$$

DOMANDA 3. Si tratta di un'equazione esponenziale riconducibile ad un'equazione di secondo grado. Ponendo $2^x=t$ l'equazione diventa
$$t^2+t=2\quad\text{cioè}\quad t^2+t-2=0\quad\text{cioè}\quad (t-1)(t+2)=0.$$
Le soluzioni di quest'ultima sono $t=1$ oppure $t=-2$. Tornando alla variabile x abbiamo $2^x=1$ oppure $2^x=-2$. La seconda è chiaramente impossibile; la prima equivale a $2^x=2^0$ e quindi si trova l'unica soluzione $x=0$.

DOMANDA 4. Le radici del polinomio $3x^2-7x+4$ sono $x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{7\pm1}{6}$, e cioè $\frac{4}{3}$ oppure 1. Pertanto la scomposizione è
$$3x^2-7x+4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)=(3x-4)(x-1).$$ [1]

DOMANDA 5. Non conviene sviluppare il quadrato. Si può scrivere direttamente la doppia disequazione equivalente
$$-7\le x-2\le 7\qquad\text{da cui}\qquad -5\le x\le 9.$$

DOMANDA 6. Le condizioni di esistenza sono date dal sistema
$$\begin{cases} x-5\ge 0\\ \sqrt{x-5}-\sqrt{5}\ne 0\end{cases}\quad\text{cioè}\quad\begin{cases} x\ge 5\\ \sqrt{x-5}\ne\sqrt{5}\end{cases}\quad\text{cioè}\quad\begin{cases} x\ge 5\\ x-5\ne 5\end{cases}\quad\text{cioè}\quad\begin{cases} x\ge 5\\ x\ne 10.\end{cases}$$
Quindi il dominio di f è l'insieme $[5,10)\cup(10,+\infty)$.

DOMANDA 7. Si ha
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-e^x}{\ln x}=\frac{0-1}{-\infty}=\frac{-1}{-\infty}=0.$$

DOMANDA 8. Integrando per parti si ha
$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c.$$

DOMANDA 9. La matrice della forma quadratica è
$$\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}.$$
Il determinante è negativo e quindi la forma quadratica è indefinita.

DOMANDA 10. Si ha
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1\cdot e^{xy}-ye^{xy}\cdot x}{e^{2xy}}=\frac{e^{xy}(1-xy)}{e^{2xy}}=\frac{1-xy}{e^{xy}}.$$

[1] Ricordare che, se il polinomio ha un coefficiente di x^2 diverso da 1, scrivendo la fattorizzazione (dopo aver calcolato le radici) occorre scrivere davanti al prodotto dei due fattori questo coefficiente.

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 8 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. La fuzione $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ è definita per $x > 0$, cioè nell'intervallo $(0, +\infty)$, che è un insieme aperto. Una primitiva di f è la funzione $g(x) = \frac{\ln^4 x}{4}$. [2] Calcoliamo ora l'integrale generalizzato su $[1, +\infty)$. Si ha

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^4 x}{4}\Big|_1^b = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} \ln^4 b = +\infty.$$

L'integrale quindi diverge.

Esercizio 2. Il determinante di A è 0 e quindi le colonne di A sono linearmente dipendenti. La dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da esse generato è pari al rango di A, che risulta essere 2, considerando ad esempio il minore che si ottiene con le ultime due righe e le ultime due colonne (il minore vale 3).
Passiamo ora al sistema $Ax = b$. Anzitutto occorre vedere il rango di $A|b$: osservando che in $A|b$ la terza riga è la somma delle prime due, possiamo dire che il rango di $A|b$ è 2, quindi uguale al rango di A: il sistema quindi ha soluzioni. La dimensione dello spazio delle soluzioni è pari a $n - rA = 3 - 2 = 1$.
Per trovare le soluzioni possiamo eliminare la prima equazione e rendere parametro la x. Riscriviamo quindi il sistema come

$$\begin{cases} y + z = -1 + x \\ -y + 2z = -x \end{cases}$$

da cui, con Cramer, si ottengono

$$y = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1+x & 1 \\ -x & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-2 + 2x + x) = x - \frac{2}{3}$$

e

$$z = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1+x \\ -1 & -x \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-x - 1 + x) = -\frac{1}{3}.$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come i vettori del tipo $(x, x - \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, con x parametro arbitrario.

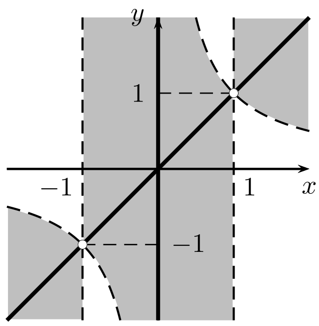
Esercizio 3. Le condizioni di esistenza della funzione sono date dal sistema

$$\begin{cases} \frac{1-x^2}{1-xy} > 0 \\ 1 - xy \neq 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \\ 1 - xy > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 - x^2 < 0 \\ 1 - xy < 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ xy < 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 > 1 \\ xy > 1. \end{cases}$$

Osservando che l'equazione $x^2 = 1$ individua le due rette verticali di equazione $x = 1$ e $x = -1$ e che l'equazione $xy = 1$ individua un'iperbole con rami nel primo e terzo quadrante, si ottiene il dominio raffigurato a fianco. Si tratta di un insieme aperto in quanto la frontiera è esclusa.
Dopo aver osservato che il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine, possiamo dire che la funzione f è pari rispetto all'origine, dato che



$$f(-x, -y) = \ln\left(\frac{1 - (-x)^2}{1 - (-x)(-y)}\right) = \ln\left(\frac{1 - x^2}{1 - xy}\right) = f(x, y).$$

La restrizione di f all'asse y è:

$$f(x, y)\Big|_{x=0} = \ln 1 = 0.$$

La curva di livello 0 si ottiene ponendo $f(x, y) = 0$, da cui si ricava

$$\frac{1 - x^2}{1 - xy} = 1 \qquad \text{cioè} \qquad 1 - x^2 = 1 - xy \qquad \text{cioè} \qquad x(x - y) = 0.$$

Si tratta di due rette, di equazione $x = 0$ (l'asse y) e $y = x$, quest'ultima ad eccezione dei punti di ascissa -1 e 1. La curva di livello 0 è tracciata in modo più marcato nella figura sopra.

[2]Infatti l'integrale indefinito $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$ è del tipo $\int f^\alpha(x) Df(x)\,\mathrm{d}x$, con $f(x) = \ln x$ e $\alpha = 3$.

Infine le derivate parziali. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-xy}{1-x^2} \cdot \frac{-2x(1-xy)-(1-x^2)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{x^2y-2x+y}{(1-x^2)(1-xy)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-xy}{1-x^2} \cdot (1-x^2) \cdot \left(-\frac{1}{(1-xy)^2}\right) \cdot (-x) = \frac{x}{1-xy}.$$

Quesito 1. Il teorema di Lagrange afferma che, se f è una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile nei punti interni, cioè nell'intervallo (a,b), allora c'è un punto c interno all'intervallo $[a,b]$ (quindi $c \in (a,b)$), in cui si ha

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Una funzione alla quale non è applicabile il teorema è ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1,1]$, dato che la funzione non è derivabile in 0.

Quesito 2. Dire che S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ significa che se prendiamo due vettori qualunque in S ogni loro combinazione lineare sta ancora in S.
Un esempio di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ è ogni retta che passa per l'origine.

Quesito 3. Il nucleo di una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è l'insieme dei vettori $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $f(x) = 0$. Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
Il nucleo di una trasformazione lineare non può essere l'insieme vuoto in quanto esso contiene certamente almeno il vettore nullo.

Quesito 4. La definizione di derivata parziale rispetto ad x, nel punto (x_0, y_0), della funzione $f(x,y)$ è il

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \quad \text{, se questo esiste ed è finito.}$$

Quesito 5. Una forma quadratica $q(x,y)$ si dice semidefinita positiva quando è sempre maggiore o uguale a zero e si annulla in modo non banale, cioè quando

$$q(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ed esiste un } (x_0,y_0) \neq (0,0) \text{ per cui } q(x_0,y_0) = 0.$$