FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 9 – Soluzioni I parte

Domanda 1. Dato che $4^{x+1} + 2^{2x} = 4^x \cdot 4 + 4^x$, si ha

$$4^{x+1} + 2^{2x} = 4^x(4+1) = 5 \cdot 4^x.$$

Domanda 2. Le condizioni di esistenza sono date dal sistema

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x > 0 \\ \ln x + 1 \ne 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \ne -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \ne \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Quindi la frazione è definita nell'insieme $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

Domanda 3. L'equazione equivale a

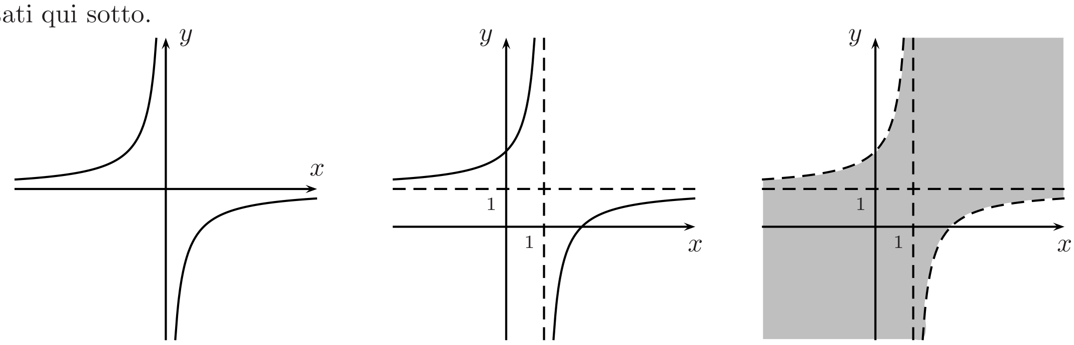
$$3 \cdot 2^{2x} = 1 \quad \text{cioè} \quad 2^{2x} = \frac{1}{3} \quad \text{cioè} \quad 2x = \log_2 \frac{1}{3} \quad \text{quindi} \quad x = -\frac{\log_2 3}{2}.$$

Domanda 4. Ricordando che si deve porre la condizione di esistenza $x > 0$ (il secondo logaritmo è definito in realtà per $x \ne 0$, ma il primo richiede ovviamente $x > 0$), possiamo utilizzare la proprietà che esprime la somma di logaritmi nel logaritmo del prodotto. Quindi possiamo dire che la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x^3) < 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x^3) < \ln e \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^3 < e \end{cases} \quad \text{cioè infine} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < \sqrt[3]{e}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'intervallo $(0, \sqrt[3]{e})$.

Domanda 5. Consideriamo intanto l'equazione corrispondente $(x-1)(y-1)+1 = 0$, cioè $(x-1)(y-1) = -1$. La curva dei punti che sono soluzioni di questa si può ottenere dalla traslazione della curva di equazione $xy = -1$, che è l'iperbole con rami nel secondo e quarto quadrante. La traslazione porta il centro nel punto $(1, 1)$.
Per trovare le soluzioni della disequazione iniziale basta osservare che nel centro $(1, 1)$ la disequazione è verificata e quindi la regione è quella che contiene il centro. I punti sull'iperbole non fanno parte della regione. Si hanno quindi i grafici riportati qui sotto.



Domanda 6. Con l'algebra dei limiti si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + e^{1/x}}{e^x} = \frac{\sqrt{1+\infty} + e^{1/(-\infty)}}{e^{-\infty}} = \frac{\sqrt{+\infty} + e^0}{0^+} = \frac{+\infty + 1}{0^+} = +\infty.$$

Domanda 7. L'integrale è riconducibile ad un integrale del tipo $\int e^{f(x)} Df(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$, con $f(x) = 4 - 5x^2$. Occorre però osservare che la derivata di f è $Df(x) = -10x$, mentre dentro all'integrale abbiamo soltanto x. Allora possiamo aggiustare la costante moltiplicando e dividendo per -10. Si ha

$$\int x e^{4-5x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10} \int (-10x) e^{4-5x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10} e^{4-5x^2} + c.$$

Domanda 8. Possiamo semplificare il termine generale della serie trascurando le quantità trascurabili. Si ha

$$\text{per } n \to +\infty, \quad \frac{n+1}{1+2n^3} \sim \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

La nostra serie è quindi equivalente alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$. [1] Quest'ultima è una serie convergente, dato che ha lo stesso carattere di una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 2 > 1$.

Domanda 9. Occorre che il prodotto interno dei due vettori sia uguale a zero. Si ha

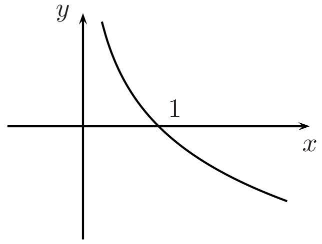
$$\langle v, u\rangle = \langle (k, 3, -2), (k, -1, -k)\rangle = k^2 + 2k - 3.$$

Occorre quindi risolvere l'equazione $k^2 + 2k - 3 = 0$, che ha le due soluzioni $k = 1$ oppure $k = -3$.

Domanda 10. La curva di livello 1 della funzione $f(x, y) = xe^y$ è l'insieme dei punti del piano che soddisfano l'equazione $f(x, y) = 1$, cioè

$$xe^y = 1.$$

Occorre ricavare una variabile in funzione dell'altra e sono possibili due strade.



Ricavando y in funzione di x (è più lungo ma poi è più facile disegnare il grafico perché di solito siamo abituati a fare così) sono equazioni equivalenti

$$e^y = \frac{1}{x} \quad , \quad y = \ln\frac{1}{x} \quad , \quad y = -\ln x.$$

A questo punto possiamo disegnare il grafico usando le trasformazioni elementari.

L'altra strada è quella di ricavare x in funzione di y (più semplice ma poi per disegnare il grafico dobbiamo fare uno scambio degli assi):

$$x = \frac{1}{e^y} \quad \text{cioè} \quad x = e^{-y}.$$

In entrambi i casi si ottiene il grafico riportato qui sopra.

[1] In questa faccio partire n da 1 anziché da 0, per ovvi motivi. La cosa non altera minimamente la questione, dato che la convergenza di una serie non dipende dai primi termini.

FACSIMILE ESAME di MATEMATICA – Tema 9 – Soluzioni II parte

Esercizio 1. Le condizioni di esistenza della funzione f sono espresse dal sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 > 0 \\ \ln(x^2) \neq 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

La funzione f è quindi definita nell'insieme $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$. Si tratta di un insieme aperto simmetrico rispetto all'origine.
La funzione f ha una simmetria, dato che

$$f(-x) = \frac{1}{-x\ln((-x)^2)} = -\frac{1}{x\ln(x^2)} = -f(x).$$

Si tratta di una funzione dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine.
Calcoliamo i limiti significativi: possiamo limitarci a quelli sulla parte positiva, cioè 0 (da destra), 1 (da destra e da sinistra) e $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln(x^2)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x\ln(x^2)} = \frac{1}{1\cdot\ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x\ln(x^2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Un po' più elaborato è il limite a 0^+, che presenta una forma indeterminata a denominatore.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x\ln(x^2)} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2x\ln x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{\ln x} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} \frac{-1/x^2}{1/x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = -\infty.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\ln^2(x^2)}\left(\ln(x^2) + x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right) = -\frac{\ln(x^2)+2}{x^2\ln^2(x^2)}.$$

Ponendo la derivata uguale a zero si ottiene l'equazione

$$\ln(x^2)+2 = 0 \quad \text{cioè} \quad \ln(x^2) = -2 \quad \text{cioè} \quad x^2 = e^{-2} \quad \text{cioè} \quad x = \pm\frac{1}{e},$$

che sono i punti stazionari.
Troviamo una primitiva di f risolvendo l'integrale indefinito (possiamo pensare $x > 0$)

$$\int \frac{1}{x\ln(x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{D\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\ln x| + c.$$

Pertanto l'integrale definito di f tra e ed e^2 vale

$$\int_e^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2}\big(\ln(\ln e^2) - \ln(\ln e)\big) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Esercizio 2. Per capire se i vettori sono dipendenti o indipendenti possiamo calcolare il rango della matrice che si ottiene disponendoli ad esempio in riga, cioè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

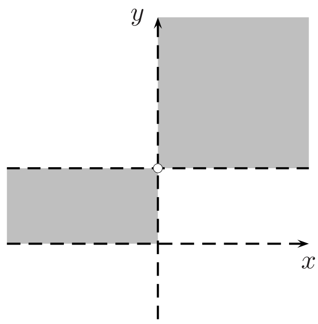
Il minore di ordine 3 formato dalle prime 3 colonne è nullo, ma quello formato dalle ultime 3 colonne è diverso da zero e quindi il rango di A è 3. Questo ci permette di dire che i 3 vettori sono linearmente indipendenti.
La la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ da essi generato è uguale al rango di A e quindi è 3.
Per quanto riguarda l'ortogonalità risulta che v e u sono ortogonali dato che

$$\langle v,u\rangle = \langle(1,-1,0,1),(1,1,-1,0)\rangle = 1-1 = 0.$$

Invece v,w e u,w non sono ortogonali.
Se osserviamo che $z = (2,-2,0,1)$ è la somma di v,u,w possiamo dire immediatamente che z appartiene al sottospazio generato da v,u,w e si ha $z = v+u+w$.

Esercizio 3. Le condizioni di esistenza della funzione sono date dai due sistemi

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ \ln y > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ \ln y < 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y < 1. \end{cases}$$



L'insieme in cui f è definita è rappresentato a fianco. È un insieme aperto.
Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x \ln y} \cdot \ln y = \frac{1}{x}$$

e

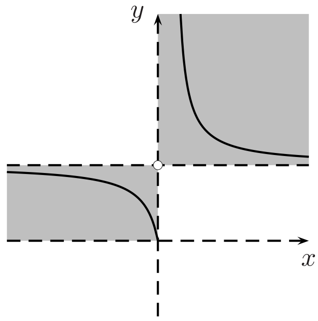
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x \ln y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{y \ln y}.$$

Dato che le derivate parziali non possono annullarsi, non ci sono punti stazionari.
La curva di livello 0 di f è l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$\ln\big(x \ln y\big) = 0 \quad \text{cioè} \quad x \ln y = 1.$$

Possiamo cercare di ricavare y in funzione di x:

$$\ln y = \frac{1}{x} \quad \text{quindi} \quad y = e^{1/x}.$$



La curva di livello 0 di f è quindi il grafico della funzione $x \mapsto e^{1/x}$. Da un semplice calcolo dei limiti (a $\pm\infty$ e in 0) si trova che la curva è come rappresentato in figura.

Quesito 1. Il teorema degli zeri dice che se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e f assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo (quindi $f(a)f(b) < 0$), allora c'è un punto c interno all'intervallo $[a, b]$ (quindi $c \in (a, b)$), in cui $f(c) = 0$.

Quesito 2. Vi sono più modi per rispondere.
Si può dire che il rango è 2 se le 3 righe sono dipendenti e nello stesso tempo ve ne sono 2 di indipendenti.
Oppure, in termini di minori della matrice, se vi è un minore di ordine 2 diverso da zero e tutti i minori di ordine 3 sono nulli.

Quesito 3. Il teorema dice che se un sistema lineare $Ax = b$ ha una soluzione $\overline{x}$, allora tutte le soluzioni si possono scrivere come $\overline{x} + v$, dove v è una soluzione del sistema omogeneo associato $Ax = 0$, ossia un elemento del nucleo della trasformazione lineare f rappresentata dalla matrice A. Pertanto l'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ è $\overline{x} + \ker f$.

Quesito 4. La forma quadratica è semidefinita positiva se, detta A la matrice simmetrica della forma quadratica, il determinante di A si annulla e gli elementi sulla diagonale sono non negativi.

Quesito 5. Significa che il punto (x_0, y_0) annulla il gradiente di f, cioè che f è derivabile in (x_0, y_0) e risulta $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.