COGNOME												
NOME												
MATRICOLA					VR							

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 02/02/2009
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = x - \frac{\log x}{x},$$

si determini il suo insieme di definizione e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e si verifichi che $x = 1$ è punto stazionario di f. Si calcoli poi l'integrale $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$ e infine si dica se l'integrale generalizzato $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i vettori

$$x = (1, 1, 3) \quad , \quad y = (1, 2, 2) \quad , \quad z = (1, 3, 1),$$

si provi che essi sono linearmente dipendenti e si determini la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ da essi generato. Si dica poi se ce ne sono almeno due che sono ortogonali tra loro. Si scriva uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log y}{\log x},$$

si rappresenti sul piano cartesiano il suo insieme di esistenza e si indichino un punto interno e uno di frontiera a tale insieme. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari. Si determini infine l'insieme in cui la funzione f è positiva.

QUESITO 1. Che cosa significa che la funzione f è derivabile nel punto x_0?

QUESITO 2. Che cosa è l'integrale indefinito di una funzione f in un certo intervallo I?

QUESITO 3. Che cosa significa che i vettori $v^1, v^2, \ldots, v^n$ sono linearmente dipendenti?

QUESITO 4. Che cosa afferma il teorema di Rouché–Capelli?

QUESITO 5. Si scriva la definizione di derivata parziale di una funzione $f(x, y)$ rispetto ad y nel punto (x_0, y_0).