

COGNOME											
NOME											
MATRICOLA											

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 11/06/2010
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - e^{x-4},$$

si determini il suo insieme di definizione e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f e, in base al segno di questa, si dica in quali intervalli la funzione f è monotona. Si provi infine che alla funzione f è applicabile il teorema degli zeri nell'intervallo $[3, 4]$ e se ne deducano le conseguenze.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i vettori

$$v^1 = (1, 1, 0) \quad , \quad v^2 = (0, 1, -1) \quad , \quad v^3 = (0, -1, 1) \quad , \quad v^4 = (1, 1, 1)$$

si dica se essi sono generatori di \mathbb{R}^3 . Si dica poi se essi sono una base di \mathbb{R}^3 . Detta infine V la matrice ottenuta disponendo i vettori in colonna e f la trasformazione lineare associata a V , si dica se f è iniettiva e suriettiva.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \sqrt{x+y},$$

si rappresenti sul piano cartesiano il suo insieme di esistenza e si dica se esso è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f . Si provi infine graficamente che la curva di equazione $y - e^{-x} = 0$ è interamente contenuta nel dominio di f e si scriva la restrizione di f a questa curva.

QUESITO 1. Che cosa significa che una funzione f è crescente in un dato intervallo?

QUESITO 2. Che cosa significa la scrittura $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow +\infty$ (che si legge anche “ $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ ” per $x \rightarrow +\infty$)?

QUESITO 3. Si enunci il teorema di Lagrange (o del valor medio).

QUESITO 4. Come viene definita la funzione integrale di una funzione f nell'intervallo $[a, b]$?

QUESITO 5. Che cosa afferma il teorema di Rouché–Capelli?