COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 11/01/2013
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x+1) & -1 < x < 0 \\ x^2 - 1 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si determini l'immagine di f, cioè l'insieme dei valori che f assume e si indichino gli eventuali punti di massimo/minimo, globali e locali. Si dica poi se f è derivabile nell'intervallo $(-1, 1)$ e si scriva l'espressione della sua derivata, dove esiste.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$v^1 = (0, -1, 1, 0) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0, 1) \quad , \quad v^3 = (1, 0, 1, -1).$$

Si dica se essi sono linearmente dipendenti o indipendenti. Tra i vettori dati ci sono coppie di vettori ortogonali? Si determini la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori. Si scriva il vettore nullo come combinazione lineare di v^1, v^2, v^3. Si dica infine se il quarto vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$ appartiene a V.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left[(x - y^2)(y - x^2)\right],$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f. Si scriva l'espressione della restrizione di f alla retta di equazione $x - y = 0$ e si trovino i punti stazionari (vincolati) di f lungo tale restrizione.

QUESITO 1. Che cosa significa che da un insieme A ad un insieme B è definita una funzione f, cioè in simboli $f : A \to B$?

QUESITO 2. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 3. Si indichino almeno due proprietà che garantiscono l'integrabilità di una funzione f in un intervallo $[a, b]$.

QUESITO 4. Se A è una matrice quadrata, come si calcola, in generale, il determinante di A?

QUESITO 5. Per un problema di max/min di una funzione f con vincolo $g(x, y) = 0$, si scriva l'espressione della relativa funzione Lagrangiana.