COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 10/06/2014
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione $f(x) = x + \ln(x^2)$, se ne determini il dominio e si calcolino i limiti significativi. Si calcoli la derivata di f, si trovino i punti stazionari e si studi la natura di questi punti (cioè se sono eventualmente punti di massimo/minimo). Con le informazioni ottenute si disegni poi un possibile grafico di f. Si dica infine se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge o diverge.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se le sue righe sono vettori linearmente dipendenti o indipendenti. Si stabilisca poi se le colonne sono linearmente dipendenti o indipendenti. Si dica se il vettore $(2, 0, -1)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Si dica infine se il primo vettore fondamentale di $\mathbb{R}^4$, cioè il vettore $u^1 = (1, 0, 0, 0)$, appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di A.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = xy + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{y}\right),$$

si determini e si rappresenti sul piano cartesiano il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Si calcoli il gradiente di f. Si determini infine l'unico punto stazionario della funzione.

QUESITO 1. Si enunci il teorema di Weierstrass

QUESITO 2. Si dica quando una funzione f si dice derivabile in un punto x_0

QUESITO 3. Si indichino almeno due proprietà di una funzione che garantiscono la sua integrabilità (secondo Riemann) in un intervallo $[a, b]$

QUESITO 4. Si scriva l'espressione della serie armonica e si dica se essa converge o diverge

QUESITO 5. Che cosa significa, per definizione, che i vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono linearmente indipendenti?