COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 26/08/2015
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \leq 0 \\ 2 - e^{-x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si provi che ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 2]$ e si dica poi in quali punti è verificata la tesi. Si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si scriva infine l'espressione di f' dove essa esiste.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se essa è invertibile e, in caso affermativo, si determini la sua matrice inversa. Si dica se la prima riga di A si può scrivere come combinazione lineare delle ultime due colonne. Si dica se i vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ appartengono tutti al sottospazio generato dalle righe di A. Si stabilisca infine il segno della forma quadratica associata alla matrice A.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) - \ln(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si dica se si tratta di un insieme aperto e convesso. Si calcoli la derivata parziale di f rispetto alla variabile x e si dica se il punto $(0, 0)$ può essere stazionario. Esistono nel dominio punti in cui la funzione si annulla?

QUESITO 1. Se f è una funzione reale e I è un intervallo di $\mathbb{R}$, che cosa si intende con controimmagine di I attraverso f? Si fornisca eventualmente un esempio.

QUESITO 2. Si enunci il teorema di Lagrange (o del valor medio).

QUESITO 3. Che relazione sussiste tra l'integrale indefinito e l'integrale di Riemann di una stessa funzione f?

QUESITO 4. Si definisca, nel caso generale, il rango di una matrice.

QUESITO 5. Si fornisca una condizione sufficiente affinché un punto (x_0, y_0) sia di minimo per una funzione f (di due variabili).