

COGNOME																			
NOME																			
MATRICOLA															VR				

**PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA**  
**Vicenza, 18/01/2016**  
**II parte**

Questa è la II parte della prova conclusiva scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

**ESERCIZIO 1 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito  $\int f(x) dx$  integrando per parti. Si dica perché l'integrale di  $f$  nell'intervallo  $[1, e]$  deve essere positivo e, successivamente, lo si calcoli. Si stabilisca infine se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  converge o diverge.

**ESERCIZIO 2 (PUNTI 5).** Si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ , con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dica anzitutto se, in base al teorema di Rouché–Capelli, il sistema ha soluzioni. In caso affermativo si risolva il sistema e si indichi una base delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si dica infine se tra le soluzioni di  $Ax = b$  ci sono vettori a componenti tutte positive.

**ESERCIZIO 3 (PUNTI 5).** Data la funzione

$$f(x, y) = \ln \left( 1 - x^2 - (y - 1)^2 \right) - \ln \left( 1 - x^2 - y \right)$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si indichino un punto interno e un punto di frontiera per il dominio di  $f$ . Si calcolino le derivate parziali di  $f$  e si dica se il punto  $(0, \frac{1}{2})$  è stazionario. Si determini infine la curva di livello 0 di  $f$ .

- QUESITO 1.** Che cosa si intende con primitiva di una funzione reale  $f$ ?
- QUESITO 2.** Che cosa si intende con curva di livello  $k$  di una funzione  $f(x, y)$ ?
- QUESITO 3.** Si enunci il teorema fondamentale del calcolo.
- QUESITO 4.** Si enunci il teorema di Cramer.
- QUESITO 5.** A quale proposito può essere utile il gradiente secondo di una funzione di più variabili?