

COGNOME																	
NOME																	
MATRICOLA																	

VR						
----	--	--	--	--	--	--

**ESAME DI MATEMATICA**  
**Vicenza, 07/06/2017**  
**II parte**

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) - 1 & -1 < x < 0 \\ -e^{-x} & x \geq 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Sulla base del grafico si dica qual è l'immagine di  $f$  e se esistono punti di massimo o di minimo. Si dica poi se  $f$  è derivabile in  $(-1, +\infty)$ . Si calcoli infine l'integrale generalizzato di  $f$  nell'intervallo  $[0, +\infty)$ , cioè  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Si consideri in  $\mathbb{R}^4$  il sottospazio  $S$  generato dai vettori

$$v^1 = (0, -1, 0, 1) \quad , \quad v^2 = (-1, 0, 0, 1) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 0, 0).$$

Si dica, motivando adeguatamente la risposta, se  $v^1, v^2, v^3$  sono una base di  $S$ . Successivamente si determini la dimensione di  $S$ . Indicata poi con  $A$  la matrice formata con i tre vettori disposti in riga e con  $T$  la trasformazione lineare associata alla matrice  $A$ , si dica se l'immagine di  $T$  coincide oppure no con  $\mathbb{R}^3$ . Si indichi infine una base di questa immagine di  $T$ .

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(1 + y - x),$$

si determini e si disegni nel piano cartesiano il suo dominio. È vero che la funzione si annulla in tutti i punti del dominio che stanno sulla bisettrice del primo e terzo quadrante? Si calcoli il gradiente di  $f$  e si dica se ci sono punti stazionari per la funzione. È vero che tutti i punti in cui la funzione si annulla sono stazionari?

QUESITO 1. Che cosa si intende con punto di massimo locale di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

QUESITO 2. Si enunci il teorema degli zeri.

QUESITO 3. Che cosa è per definizione la derivata destra di una funzione reale  $f$  nel punto 1?

QUESITO 4. Si definisca, nel caso generale, il rango di una matrice.

QUESITO 5. Che cosa significa che una forma quadratica  $Q(x, y)$  è definita positiva?