COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

PROVA CONCLUSIVA DI MATEMATICA
Vicenza, 01/02/2019
II parte

Questa è la II parte della prova conclusiva scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = x\, e^{-x}$$

se ne calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ integrando per parti. Si calcoli poi l'integrale di f nell'intervallo $\big[-\ln 2, 0\big]$. Si stabilisca infine se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la trasformazione lineare

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

si stabilisca se essa è invertibile. Si dica poi se T è suriettiva. Si determini la dimensione e una possibile base della sua immagine. Si dica se il vettore $(-1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T e infine si trovino tutti i vettori in cui la trasformazione T si annulla.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = \ln(x - y^2) - \ln(1 - xy)$$

si determini e si disegni il suo dominio e se ne indichino un punto interno e un punto di frontiera. Si calcoli il gradiente di f e si dica se in qualche punto dell'asse x nel dominio ci possono essere punti stazionari. Si scriva infine la restrizione di f sui punti della retta $x = 1$.

QUESITO 1. Si dica il motivo per cui, se una primitiva esiste per una funzione f, allora certamente questa primitiva non è l'unica.

QUESITO 2. In quale caso un integrale di Riemann generalizzato del tipo $\int_a^{+\infty} f$ converge?

QUESITO 3. Che cosa significa che i vettori $v^1, v^2, \ldots, v^k$ sono linearmente dipendenti?

QUESITO 4. Si enunci il teorema di Rouché–Capelli.

QUESITO 5. Che cosa significa per definizione che una forma quadratica è semidefinita positiva?