COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 07/07/2022
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ 1 + \ln(1+x) & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica quali dei teoremi di Weierstrass, Rolle e Lagrange sono applicabili alla funzione f nell'intervallo $\big[-1, 1\big]$. Infine si calcoli l'integrale di f nell'intervallo $\big[-1, 1\big]$.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i tre vettori

$$v^1 = (-1, 1, 1) \quad , \quad v^2 = (1, 1, 0) \quad , \quad v^3 = (1, 3, 1)$$

si provi che essi non sono generatori di tutto $\mathbb{R}^3$ e si determini la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato. Si provi poi che il vettore $(-6, 8, 7)$ appartiene a questo sottospazio e lo si scriva come combinazione lineare dei vettori dati.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = xy - \frac{x}{y}$$

si determini e si disegni il suo dominio. In quali punti la funzione si annulla? Si calcoli il gradiente di f e trovino i suoi punti stazionari. È possibile stabilire se si tratta di punti di massimo/minimo con le condizioni del secondo ordine?

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: "una funzione derivabile in un punto x_0 può non essere continua in questo punto".

QUESITO 2. Si dia la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

QUESITO 3. Si commenti l'affermazione: "se la funzione g è primitiva della funzione f, allora la derivata di f è g".

QUESITO 4. Si commenti l'affermazione: "se il rango di una matrice A (quadrata) $n \times n$ non è n possiamo affermare che il determinante di A si annulla".

QUESITO 5. Che cosa è la matrice Hessiana di una funzione di due variabili?