COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 25/08/2022
II parte

Questa è la II parte della prova scritta dell'esame di Matematica. La durata della prova è di 60 minuti e per lo svolgimento devi usare i fogli protocollo a quadretti. In questo foglio trovi 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x)+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1-\sqrt{x} & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si dica quali dei teoremi di Weierstrass, Rolle e Lagrange sono applicabili alla funzione f nell'intervallo $\big[0,4\big]$. Infine si calcoli l'integrale di f nell'intervallo $\big[0,4\big]$.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare T associata alla matrice A, precisando tra quali spazi opera. Indicando con u^1 e u^2 i primi due vettori fondamentali di $\mathbb{R}^3$ e con v il vettore $u^1 + u^2$, si scriva $T(v)$. Si dica se l'immagine di T è tutto il codominio. Si dica se il vettore $(1,3,1)$ sta nell'immagine di T e, in caso affermativo, di quale vettore è il trasformato.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si provi che la funzione non ha punti stazionari. Dopo aver verificato che f si annulla nei punti $(1,1)$, $(1,-1)$ e i loro opposti, si trovino tutti i punti in cui la funzione si annulla.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: "una funzione continua in un punto x_0 può non essere derivabile in questo punto".

QUESITO 2. Si dia la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

QUESITO 3. Si dica che cosa vuol dire che la funzione f è una primitiva della funzione g.

QUESITO 4. Si commenti l'affermazione: "se A è una matrice 2×3 il rango di A è massimo se e solo se il determinante di A non si annulla".

QUESITO 5. Che cosa è la matrice Hessiana di una funzione di due variabili?