

COGNOME															
NOME															
MATRICOLA															

VR						
----	--	--	--	--	--	--

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 05/07/2024
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & x \leq 1 \\ e + \frac{1}{x} & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} . Si dica se per la funzione f nell'intervallo $[0, e]$ sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass. Si dica poi in quali eventuali punti è verificata la tesi del teorema.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i tre vettori

$$v^1 = (1, 0, 0, 1) \quad , \quad v^2 = (0, 1, -1, 0) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 1, 0)$$

si dica se essi sono linearmente indipendenti o dipendenti. Sono generatori di tutto \mathbb{R}^4 ? Se no, qual è la dimensione del sottospazio \mathcal{S} da essi generato? Nei tre vettori dati ci sono coppie di vettori ortogonali? Il vettore fondamentale $(1, 0, 0, 0)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati?

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$$

Si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari, uno dei quali è l'origine. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Attraverso le restrizioni di f agli assi cartesiani si verifichi la natura dell'origine, già trovata in precedenza.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: “una funzione continua in un punto x_0 è certamente derivabile in questo punto”.

QUESITO 2. Si dia la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0 .

QUESITO 3. Si indichi una proprietà di una funzione f che garantisce la sua integrabilità in un intervallo $[a, b]$.

QUESITO 4. Si commenti l'affermazione: “il rango di una matrice quadrata A è sempre uguale al numero di righe di A ”.

QUESITO 5. Quale proprietà della matrice Hessiana di una funzione di due variabili in un punto stazionario consente di concludere che il punto è di massimo locale?