COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 13/09/2024
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x} & x \leq 1 \\ \frac{1}{e} + \frac{1}{x} & x > 1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico. Si dica poi se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si determini poi l'immagine attraverso f dell'intervallo $\left[0, e\right]$ e si dica infine in quali punti dell'intervallo è verificata la tesi del teorema di Weierstrass.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Dati i tre vettori

$$v^1 = (1, 0, 0, 1) \quad , \quad v^2 = (0, 1, -1, 0) \quad , \quad v^3 = (1, -1, 1, 1)$$

si dica se essi sono generatori di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3. Se no, qual è la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$ da essi generato? Nei tre vettori dati ci sono coppie di vettori ortogonali? Si dica infine se il vettore $(1, 1, 1, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei tre vettori dati.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$$

Si calcoli il gradiente di f e si provi che ci sono due punti stazionari, uno dei quali è l'origine. Con le condizioni del secondo ordine si stabilisca se i punti stazionari sono di massimo/minimo. Si dica infine se lungo la retta $y = x$ la funzione f assume un segno costante.

QUESITO 1. Si commenti l'affermazione: "una funzione continua in un intervallo ha certamente un punto di massimo e un punto di minimo".

QUESITO 2. Si dia la definizione di derivata di una funzione f in un punto x_0.

QUESITO 3. Si indichi una proprietà di una funzione f che garantisce la sua integrabilità in un intervallo $[a, b]$.

QUESITO 4. Si commenti l'affermazione: "il rango di una matrice A può essere uguale al numero di righe solo se la matrice è quadrata".

QUESITO 5. Quale proprietà della matrice Hessiana di una funzione di due variabili in un punto stazionario consente di concludere che il punto è di sella, cioè né di massimo né di minimo locale?