COGNOME															
NOME															
MATRICOLA									VR						

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 24/01/2025
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ -\ln(x+2) & x > -1, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si indichino gli estremi superiore e inferiore di f. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-2, 0]$ e si verifichi comunque quanto afferma la tesi.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare T rappresentata da A. Si dica se T è invertibile. Si trovi la dimensione e una base dell'immagine di T. Si determini infine la controimmagine attraverso la T del vettore nullo.

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x + \ln\left(1 + x^2 + y^2\right),$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si provi che $(-1, 0)$ è l'unico punto stazionario. Si scriva l'espressione della restrizione di f alla retta verticale passante per $(-1, 0)$ e, usando questa restrizione, si provi che il punto non è di massimo.

QUESITO 1. Data una funzione f, che cosa si intende con sua funzione inversa?

QUESITO 2. Si scriva il limite del rapporto incrementale di $f(x) = e^{1-x}$ nel punto $x_0 = -1$

QUESITO 3. Che cosa otteniamo facendo la differenza di due primitive di una funzione f?

QUESITO 4. Che cosa significa che i vettori v^1, v^2, v^3 sono generatori di $\mathbb{R}^2$?

QUESITO 5. Volendo definire correttamente la derivata parziale rispetto ad y di una funzione $f(x, y)$ nel punto $(1, -2)$, come occorre modificare la scrittura $f'_y(1, -2) = \lim_{y \to -2} \dfrac{f(-2, y) - f(1, -2)}{y - 2}$?