

COGNOME															
NOME															
MATRICOLA															

ESAME DI MATEMATICA
Vicenza, 12/02/2025
II parte

Questa è la II parte della prova scritta e hai 60 minuti per completarla. Va svolta nel foglio protocollo a quadretti, compresi i quesiti teorici. Ci sono 3 esercizi e 5 quesiti di carattere teorico. Il punteggio massimo di ogni esercizio è indicato. Ogni quesito teorico vale 1 punto. Ricordo che un punteggio inferiore a 3 nei quesiti teorici può portare alla convocazione alla prova orale.

ESERCIZIO 1 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0, \end{cases}$$

se ne disegni un grafico utilizzando le trasformazioni elementari. Si dica se f è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e si dica qual è l'insieme dei valori che la f assume. Calcolare poi in quale punto f assume il valore $-\frac{1}{2}$. Si dica infine se ad f è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0, 2]$ e si verifichi se la tesi è comunque vera.

ESERCIZIO 2 (PUNTI 5). Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si scriva l'espressione della trasformazione lineare T rappresentata da A . Si dica se T è invertibile. Si trovi la dimensione e una base dell'immagine di T . Si calcoli $A \cdot A^T$, provando che è simmetrica. È vero che ogni vettore di \mathbb{R}^3 ha almeno una controimmagine attraverso T ?

ESERCIZIO 3 (PUNTI 5). Data la funzione

$$f(x, y) = x + \ln\left(x + \frac{1}{y}\right),$$

si determini e si disegni il suo dominio. Si calcoli il gradiente di f e si dica se ci sono punti stazionari. Perché possiamo dire, senza trovarla, che la curva di livello 0 di f non passa per il punto $(0, 2)$?

QUESITO 1. Si spieghi, con un esempio, cosa significa costruire la funzione composta di due funzioni.

QUESITO 2. Si enunci il teorema del valor medio (di Lagrange).

QUESITO 3. Si fornisca un esempio di un integrale “quasi immediato”.

QUESITO 4. Che cosa significa per definizione che i vettori v^1, v^2, v^3 sono linearmente dipendenti?

QUESITO 5. Si spieghi che cosa significa fare una restrizione di una funzione di due variabili.

